

超短啁啾脉冲光束空间奇异性形成与消除^{*}

杨振军 胡 巍 傅喜泉 陆大全 郑一周

(华南师范大学传输光学实验室, 广州 510631)

(2002年5月16日收到 2002年11月18日收到修改稿)

研究了超短啁啾脉冲光束在真空中的传输行为以及在传输过程中时空奇异性的形成。结果表明, 对于脉冲时间较长(相对于一个光学周期)的超短啁啾脉冲光束, 噗啾导致的脉冲光谱展宽仍然会导致脉冲光束空间奇异性的出现。脉冲啁啾比脉冲长度对脉冲光束空间奇异性的出现影响更大。给出了超短啁啾高斯脉冲光束在不同参数下的数值模拟、空间奇异性出现的条件等, 并用复解析信号理论消除了空间奇异性的出现。

关键词: 单周期 缓变包络近似 奇异性 噗啾脉冲

PACC: 4255B, 4280W

1. 引言

自从 20 世纪 60 年代制造出第一台激光器到现在, 激光技术发展迅速。现在激光技术已经渗透到很多领域, 并起到了极其重要的作用。到目前为止, 人们已经可以产生各种激光, 就其周期而言, 已经可以产生单周期甚至更短的激光脉冲。由于脉冲极短, 所以在它的传输过程中时空变换有许多新特点, 例如空间和时间的耦合引起的时间微分效应、Guoy 相移引起的时间反转、极反转等等^[1-11]。超短脉冲具有许多新的特性, 所以我们应对以前的研究方法重新思考, 做一些有必要的改进。

对于脉冲长度接近或小于一个周期的超短脉冲而言, 缓变包络近似(slowly-varying envelope approximation, SVEA)已经不再适用^[2,9,11,12], 常用的复数表达方式, 即 e 指数函数加复振幅包络(complex amplitude envelope, CAE)的表示也不再适用, 而出现所谓的脉冲光束奇异性。这时的脉冲光束传输研究应使用复解析信号(complex analytical signal, CAS)^[13]。Porras 等^[11,12]对超短脉冲光束空间奇异性进行了分析, 指出对于一个周期或短于一个周期的脉冲, 缓变包络近似解会导致空间奇异性的出现, 而 CAS 解则可以消除此奇异性。对于大于一个光学周期的脉冲传输问题, CAS 解与 CAE 解是近似相等的, CAE 解

仍然可以给出相当准确的结果。

对于空间奇异性的研究, 关系到我们通常使用非常方便的复数表示法的有效性。已有的文献都是针对无啁啾脉冲, 本文研究了啁啾脉冲光束在真空中的传输问题。结果表明, 空间奇异性对啁啾系数的依赖很大。对于有几个甚至几十个周期长度的啁啾脉冲, 空间奇异性仍可能出现。此时脉冲啁啾引起的脉冲光谱展宽是导致奇异性主要原因。文中讨论了啁啾、时间、距离等对啁啾高斯脉冲光束的影响并给出了计算模拟。给出了解决这些奇异性的 CAS 解。

2. 脉冲光束的基本理论

由 Maxwell 方程和波动方程出发, 引入移动坐标 $\xi = z, \tau = t - z/c$, 可以得到真空中的脉冲光束传输方程

$$\left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial}{\partial \xi^2} - \frac{2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} \right) E(r, z, \tau) = 0, \quad (1)$$

式中 ∇_{\perp}^2 是横向 Laplace 算子, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。对(1)式做 Fourier 变换并利用傍轴近似条件 $\left| \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} E(r, \xi, \omega) \right| \ll \left| k(\omega) \frac{\partial}{\partial \xi} E(r, \xi, \omega) \right|$, 可以得到脉冲光束在频率域中的传输方程,

$$\left(\nabla_{\perp}^2 - 2ik(\omega) \frac{\partial}{\partial \xi} \right) E(r, z, \omega) = 0. \quad (2)$$

* 国家自然科学基金(批准号 60278013)、广东省自然科学基金团队项目(批准号 20003061)、教育部霍英东教育基金(批准号 81058)和国家高技术研究发展计划专项经费(批准号 804-5)部分资助的课题。

(2)式即为对不同频率的傍轴方程,所以由熟知的傍轴方程的高斯光束解,可以得到光场在频率域中的一个脉冲高斯光束的解,

$$E(r, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{iz_R}{\zeta(\omega)} P(\omega) \right. \\ \times \exp\left[-i\omega\left(\tau - \frac{r^2}{2cq(\omega)}\right)\right] \} d\omega, \quad (3)$$

式中 $\zeta(\omega) = z - iz_R(\omega)$, $z_R(\omega) = k(\omega)w_0^2/2$ 为高斯光束 Rayleigh 距离, w_0 为光束束宽, $P(\omega)$ 为频率域空间初始时($z = 0$)的轴上光强。由(3)式可以看出这个积分无一般解。实验中得到的锁模激光光束满足 z_R 与频率无关的条件,从而可得到解析解,

$$E(r, z, t) = -\frac{iz_R}{q} P(\tau'), \quad (4)$$

式中

$$P(\tau') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) \exp(-i\omega\tau') d\omega, \\ \tau' = \tau - \frac{r^2}{2cq} = t - \frac{z}{c} - \frac{r^2}{2cq}. \quad (5)$$

这就是 Porras 给出的超短脉冲高斯光束(ultrashort pulsed Gaussian beam, UPGB)。在这里,如果我们仍然使用 CAE 或 SVEA 理论的复数表达式,则(3)式会出现空间奇异性。而解决空间奇异性出现的方法是使用 CAS 理论的复数表达式,即构造光场实函数 $p(t)$ 所对应的 CAS 复数表示形式 $P(t)$ 。

$P(t)$ 所对应的 Fourier 变换 $P(\omega)$ 与 $p(t)$ 所对应的 Fourier 变换 $p(\omega)$ 满足如下关系:

$$P(\omega) = 2p(\omega)\mathcal{H}(\omega), \quad (6)$$

式中

$$p(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \exp(i\omega t) dt,$$

$$\mathcal{H}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega > 0, \\ 0 & \omega \leq 0 \end{cases}$$

为 Heaviside 阶梯函数。由此通过 $P(\omega)$ 的 Fourier 逆变换求得 $P(t)$,

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} P(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} p(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (7)$$

CAS 理论是准单色光场复数表示的自然推广,可以有效地避免准单色光场的 SVEA 所引起的空间奇异性。对于无啁啾脉冲光束,其长度比一个光学周期长时,CAS 解可以近似等于 CAE 解,即

$A(t)e^{i\omega_0 t}$ 的形式,且 $p(t) = \Re\{A(t)e^{i\omega_0 t}\}$,即我们常用的 CAE 表述,其实部代表实际的实数场强。

3. 咨啾脉冲光束奇异性的出现与避免

我们假定啁啾脉冲光束初始时的轴上光强实函数为一余弦函数,表示为

$$p(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + Ct^2 + \varphi), \quad (8)$$

式中 C 为啁啾系数,则对应的复数包络表示式为

$$E(t) = A(t) \exp[i\omega_0 t + Ct^2 + \varphi]. \quad (9)$$

不失一般性,我们利用含啁啾高斯脉冲来构造啁啾脉冲光束的 CAE 解析解。令

$$p(\tau) = \exp\left[-(1+iC)\frac{\tau^2}{T_p^2}\right] e^{-i\omega_0 \tau}, \quad (10)$$

这里我们已经令 $\varphi = 0$, T_p 为初始时刻的脉冲长度,则啁啾脉冲高斯光束的 CAE 解为

$$E(r, z, \tau) = -\frac{iz_R}{q} \exp\left[-\frac{1+iC}{T_p^2} \left(\tau - \frac{r^2}{2cq}\right)^2\right] \\ \times \exp\left(i k_0 \frac{r^2}{2q}\right) e^{-i\omega_0 \tau}. \quad (11)$$

我们知道,对于小于一个周期的无啁啾超短脉冲光束(11)式会出现时空奇异性^[12]。具体而言,由于(11)式中 r^4 项的存在,当 r 趋于无穷大时导致光强 E 也趋于无穷大,而不是按物理上的要求趋于 0。对于长于一个周期的无啁啾脉冲光束(11)式的解在 r 非常大时才偏离 CAS 解,所以仍然可以在傍轴(r 较小)处给出很好的近似。例如对于三个周期的无啁啾脉冲高斯光束,在 r 大于 $20w_0$ (w_0 为光束束宽)时才开始出现奇异性。而对一个周期的无啁啾脉冲高斯光束,在 r 大于 $7w_0$ 时开始出现奇异性,Porras 等^[11]认为对于长于一个周期的无啁啾脉冲高斯光束的奇异性已经可以忽略了。下面我们将以奇异性出现的位置 $r > 10w_0$ 作为可以忽略奇异性的条件。

为简化分析过程,我们取 $m = T_p/T_0$ 为脉冲周期数,对时间用 T_0 归一,对横向空间变量用光束宽度 w_0 归一,对脉冲光束的传播方向用 Rayleigh 距离 z_R 归一。

$$E(r', z', \tau') = -\frac{i}{q'} \exp\left[-\frac{1+iC}{m^2} \left(\tau' - \frac{r'^2}{2\pi q'}\right)^2\right] \\ \times \exp\left(i \frac{r'^2}{q'}\right) e^{-i\omega_0 \tau'}, \quad (12)$$

$$q' = z' - i.$$

下面我们将分析啁啾脉冲光束的空间奇异性。

我们首先考察在初始位置 $z = 0$ 处, 有

$$E(r', \theta, \tau') = \exp \left[-\frac{1+iC}{m^2} \left(\tau' - i \frac{r'^2}{2\pi} \right)^2 \right] \times \exp(-r'^2) e^{-i2\pi\tau'}. \quad (13)$$

由(13)式可以看出, 在 $\tau' = 0$ 处啁啾 C 对脉冲波形是没有影响的. 如果 $\tau' \neq 0$, 则啁啾对空间奇异性的影响很大. 由(13)式可以得到出现奇异性的条件是

$$r'^2 > 4\pi C\tau' + 4\pi^2 m^2. \quad (14)$$

可见, 在 $C\tau' < 0$ 时, 啁啾 C 导致脉冲空间奇异性 的出现位置靠近光束中心, 即奇异性被增强; 而 $C\tau' > 0$ 时, 可以削弱奇异性 的出现. 图 1 是当 $m = 3, \tau' = -1$ 时, 不同啁啾系数 C 对光束横向空间分布的影响示意图. 从图 1 可以看到, 随着啁啾系数的增加, 空间奇异性越来越强烈, 当啁啾系数超过 20 以后, 则不能再忽略. 图 2 给出了正负啁啾对脉冲的影响示意图, 可以明显地看到正负啁啾对脉冲前后沿的影响. 对于正啁啾脉冲光束, 空间奇异性主要出现在脉冲的前沿 ($\tau' < 0$). 反之, 对负啁啾脉冲, 空间奇异性主要出现在脉冲的后沿. 可见正负啁啾对脉冲空间奇异性 的影响不同, 即正负啁啾分别对脉冲的前沿和后沿有影响.

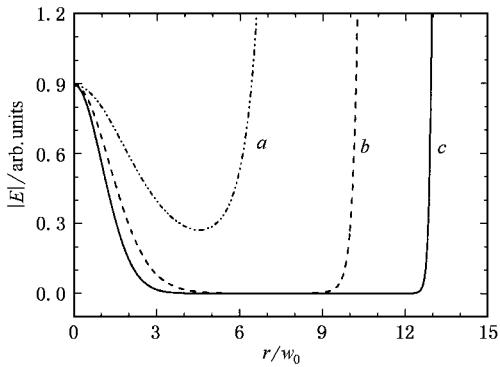


图 1 在 $z = 0$ 处不同啁啾的高斯脉冲光束的横向分布 曲线 $a : C = 25$, 曲线 $b : C = 20$, 曲线 $c : C = 15$. 其他参数: $m = 3, \tau' = -1$

现在我们考察 $z \neq 0$ 时奇异性出现的情况. 由(12)式可以得到出现奇异性的条件是

$$r'^2(1 + 2Cz' - z'^2) > 4\pi^2 W^2 m^2 - 4\pi W^2 \tau'(z' - C). \quad (15)$$

这里 $W(z') = \sqrt{1 + z'^2}$ 是 z' 处的光束宽度. 当 $1 + 2Cz' - z'^2 < 0$, 啁啾脉冲光束才会产生空间奇异性, 即要求 $z/z_R < C + \sqrt{C^2 + 1}$. 图 3 给出了在一个 Rayleigh 距离处啁啾对脉冲奇异性的影响. 可以看

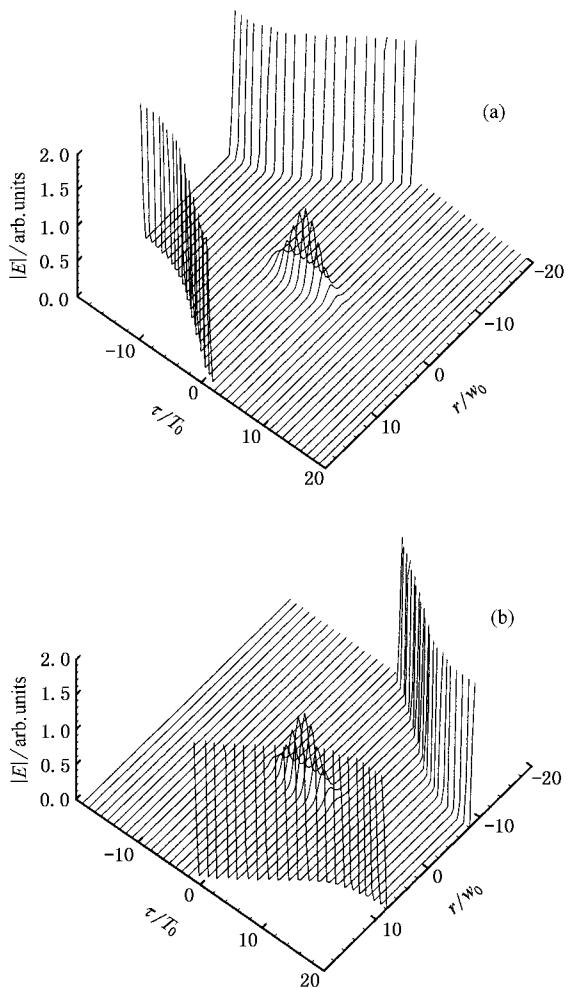


图 2 啁啾符号对高斯脉冲光束分布的影响 (a) $C = 2$ (b) $C = -2$. 其他参数同图 1

到较小的啁啾所产生的空间奇异性已不得不考虑. 与图 1 相比, 啁啾系数同为 15 时, 在一个 Rayleigh 距离处, 脉冲高斯光束奇异性已经非常的强烈. 可见在传输距离不为零时, 啁啾对空间奇异性 的影响是非常巨大的. 值得注意的是, 当 $z \neq 0$ 时, 即使 $\tau = 0$ 也会有空间奇异性的出现. 若其他参数不变, 传输距离 z 变大时, 啁啾脉冲高斯光束展宽, 奇异性出现的范围也远离中心轴.

基于上述讨论, 可以看到由于啁啾 C 的存在, 对于几个周期的超短啁啾脉冲仍然可能产生奇异性, 所以 SVEA 不再适用. 由我们观察到的空间奇异性的出现, 表明脉冲长度并不是导致脉冲光束空间奇异性的根本原因, 我们认为啁啾导致的展宽了的脉冲光谱宽度才是导致奇异性的最根本原因.

在频率域(4)式所表示的高斯脉冲光束表示为

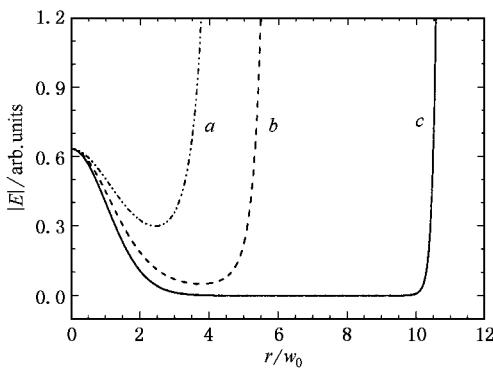


图 3 在 $z = z_R$ 处不同啁啾的高斯脉冲光束的横向分布
曲线 $a : C = 15$, 曲线 $b : C = 9$, 曲线 $c : C = 3$. 其他参数同
图 1

$$\begin{aligned} E(r, z, \omega) &= -\frac{iz_R}{q} P(\omega) \exp\left[i \frac{\omega}{c} \frac{r^2}{2q}\right] \\ &= -\frac{iz_R}{q} P(\omega) \exp\left[-\frac{\omega}{c} \frac{z_R}{2} \frac{r^2}{z^2 + z_R^2}\right. \\ &\quad \left.+ i \frac{\omega}{c} \frac{z}{2} \frac{r^2}{z^2 + z_R^2}\right], \quad (16) \end{aligned}$$

即每个频率分量都是一个高斯光束的解,其中指数项中的实部和虚部分别代表光束横向强度分布和球面波因子。我们注意到在光频率 $\omega < 0$ 时,指数项中实部前的符号变为正号,导致横向光强在 r 变大时迅速趋于无穷大。这就是空间奇异性的来源。实际脉冲中当然不会出现负频率,但在 SEVA 的包络表示 $A(t)e^{-i\omega_0 t}$ 形式下,脉冲的光谱是分布在以载波频率 ω_0 为中心的几个光谱宽度 $\Delta\omega$ 的范围内。当 $\Delta\omega \ll \omega_0$ 时,负频率的光谱强度 $P(\omega)$ 非常小,所以对整个脉冲光束的影响不大,空间奇异性可以忽略。当 $\Delta\omega$ 与 ω_0 可以比较时,SVEA 表示中的负频率成分不再可以忽略,于是出现空间奇异性,SVEA 不再适用。此时就需要引入 CAS 解,在数学上去掉负频率成分。我们知道,无啁啾高斯脉冲的频谱宽度约为 $\Delta\omega \approx \omega_0 / (m\pi)$, 咨啾高斯脉冲光束的频谱宽度约为 $\Delta\omega \approx \omega_0 \sqrt{1 + C^2} / (m\pi)$ 。Porras 等指出^[11,12],对于无啁啾高斯脉冲, $m < 1$ 的时候,必须使用 CAS 解,而在 $m > 1$ 的时候,可以使用 CAE 近似解。通过对比,我们可以定性地认为,当 $\sqrt{1 + C^2}/m > 1$ 的时候,必须使用 CAS 解,而在 $\sqrt{1 + C^2}/m < 1$ 的时候,可以使用 CAE 近似解。通过前面的数值模拟,我们确实看到了随着啁啾系数 C 的变大,对于较长(相对于一个光学周期)的脉冲也会出现空间奇异性。

最后,我们来求啁啾高斯脉冲的 CAS 解以消除空间奇异性。由(8)式可以得到啁啾高斯光束的实函数的表示形式,

$$p(t) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{T_p^2}\right) \cos\left(\omega_0 \tau + C \frac{\tau^2}{T_p^2}\right). \quad (17)$$

由(6)(7)式得到(17)式的 CAS 解,

$$\begin{aligned} P(\tau) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{2\tau^2}{T_p^2}\right) \\ &\times \left\{ \exp\left[\frac{\tau}{T_p^2}(\tau + i(C\tau + T_p^2\omega_0))\right]\right. \\ &\times \left[1 - i \operatorname{erfi}\left(\frac{2\tau - i(2C\tau + T_p^2\omega_0)}{2T_p \sqrt{1-iC}}\right) \right] \} \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{2\tau^2}{T_p^2}\right) \\ &\times \left\{ \exp\left[\frac{\tau}{T_p^2}(\tau - i(C\tau + T_p^2\omega_0))\right]\right. \\ &\times \left[1 - i \operatorname{erfi}\left(\frac{2\tau + i(2C\tau + T_p^2\omega_0)}{2T_p \sqrt{1+iC}}\right) \right] \} \quad (18) \end{aligned}$$

式中 $\operatorname{erfi}(x)$ 表示虚误差函数,

$$\operatorname{erfi}(x) = \frac{\operatorname{erf}(ix)}{i},$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-z^2) dz.$$

CAS 理论是可以很好地解决由 CAE 表示方式和 SVEA 理论导致的空间奇异性。

4. 讨论和结论

本文讨论了超短啁啾脉冲光束在真空中的传播。由于 SEVA 理论成立的条件是 $\Delta\omega \ll \omega_0$ ^[13], 即 $T_p \gg T_0$, 其中 T_p 为脉冲的半高全宽(FWHM), T_0 是脉冲中心频率所对应的振动周期, 对于超短脉冲传输($m \leq 1$), 此条件不再满足^[12], 所以超短脉冲在传输时的 SVEA 的失效也是必然的。而对于啁啾脉冲光束而言, 由于啁啾对空间奇异性的贡献很大, 所以使用 SVEA 时, 要考虑到啁啾系数的大小, 对于啁啾系数大的脉冲, 几个甚至几十个周期的超短脉冲也可以产生空间奇异性。解决的方法是使用 CAS 理论, 它是准单色光场复数表示的自然推广, 可以有效地避免准单色光场的缓变包络近似所引起的空间奇异性。通常研究的脉冲周期数都很大, 使用 SVEA 理论就足够准确了, 但对于超短啁啾脉冲却不再适用。

- [1] Kaplan A E 1998 *J. Opt. Soc. Am. B* **15** 951
- [2] Ranka J K , Gaeta A L 1998 *Opt. Lett.* **23** 534
- [3] Brabec T , Ferenc K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3282
- [4] Caron C F R , Potvliege R M 1999 *J. O. Mod. Opt.* **46** 1881
- [5] Feng S , Winful H G 1998 *Opt. Lett.* **23** 385
- [6] Feng S , Winful H G 2000 *Phys. Rev. E* **61** 862
- [7] Wang Z Y , Zhang Z Q , Xu Z Z et al 1997 *IEEE J. Quant. Electron.* **33** 566
- [8] Wang Z Y , Xu Z Z , Zhang Z Q 1997 *Opt. Lett.* **22** 354
- [9] Porras M A 1999 *J. Opt. Soc. Am. B* **16** 1468
- [10] Yang H , Zhang T Q , Wang S F et al 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1292 (in Chinese) [杨 宏、张铁桥、王树峰等 2000 物理学报 **49** 1292]
- [11] Porras M A 1998 *Phys. Rev. E* **58** 1086
- [12] Fu X Q , Guo H , Hu W et al 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1693 (in Chinese) [傅喜泉、郭 弘、胡 巍等 2001 物理学报 **50** 1693]
- [13] Born M , Wolf E 1998 *Principles of Optics* (6th ed) (Cambridge : Cambridge University Press)

The production and elimination of the spatial singularity for ultrashort chirped pulse-beam propagation in free space^{*}

Yang Zhen-Jun Hu Wei Fu Xi-Quan Lu Da-Quan Zheng Yi-Zhou

(*Laboratory of Light Transmission Optics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China*)

(Received 16 May 2002 ; revised manuscript received 18 November 2002)

Abstract

We study the propagation of ultrashort chirped pulsed beams in free space. We find that the slowly-varying envelope approximation and complex amplitude envelope are not suitable for ultrashort chirped pulsed beams anymore, because they lead to the spatial singularity that is inconsistent with the physical significance of the beam propagation. And the chirp influences the spatial singularity more seriously than the width of the pulsed beam does. The spatial singularity can be eliminated by using the complex analytical signal theory. In this paper, we give the simulations of spatial singularity about ultrashort chirped pulsed Gaussian beams with a series of parameters, and the conditions that lead to the spatial singularity etc. We think that the broad spectrum of the ultrashort pulsed beam is the original reason for the spatial singularity.

Keywords : singly cycle, slowly-varying envelope approximation, spatial singularity, chirped pulse

PACC : 4255B , 4280W

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60278013), the Team Project of Natural Science Foundation of Guangdong Province (Grant No. 20003061), the Fok Ying Tung Educational Foundation of the Ministry of Education of China (Grant No. 81058), and the National High Technology Development Program of China (Grant No. 804-5).