

# 行波管放大器中场极限环和混沌行为的阈值分析

郝建红<sup>1)(2)</sup> 丁 武<sup>3)</sup> 张治畴<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>( 中国工程物理研究院研究生部 , 北京 100088 )

<sup>2)</sup>( 石家庄师范专科学校物理系 , 石家庄 050801 )

<sup>3)</sup>( 北京应用物理与计算数学研究所 , 北京 100088 )

( 2002 年 9 月 16 日收到 2002 年 10 月 28 日收到修改稿 )

以场方程和电子运动方程为基础 , 分析了行波管放大器中辐射场演化过程中出现极限环振荡和混沌态的电流阈值 . 结果表明 在某些参数范围内 辐射场会出现这些非线性不稳定态 . 相互作用区域越长 失谐量对阈值的影响越明显 . 当器件工作在非线性区域时 输出功率与电流、失谐量和相互作用区长度三个参数的关系变得紊乱无序 , 控制这三个参数在输出功率曲线的峰值点上 , 可在非线性区域获得较高的输出功率 .

关键词 : 行波管 , 辐射场 , 阈值 , 混沌

PACC : 5275 , 5250 , 2921 , 5235

## 1. 引 言

相对论行波管( TWT )放大器是一种开发较早、理论和制作技术较为成熟的传统微波器件 . 有不少工作对 TWT 进行了理论研究 , 但这些工作大都是在饱和以下的小信号线性区域和饱和阶段展开的 , 主要针对的是辐射场的线性行为<sup>[1-6]</sup> , 而很少涉及辐射场饱和后的混沌行为 . 所以 我们的工作是从非线性角度分析和计算 TWT 放大器辐射场演化过程中出现的极限环振荡和混沌行为 . 本文依据辐射场的非线性演化方程 , 分析和讨论了 TWT 放大器系统出现极限环和混沌振荡的阈值条件及控制参数对电流阈值的影响 .

## 2. 基本方程

我们考虑一个无反射的 TWT 系统 , 在周期性结构是轴对称的情况下 , 其场的表达式可写为

$$\begin{aligned} E &= [E_p(r)(z,t) + E^*(r,z,t)] \exp[i(kz - \omega t)], \\ E &= [B_p(r)(z,t) + B^*(r,z,t)] \exp[i(kz - \omega t)], \end{aligned} \quad (1)$$

式中等号右端第一项为辐射场 , 第二项为空间电荷波场 ,  $\epsilon$  为场的慢变复振幅 , 它的演化方程为<sup>[7]</sup>

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + v_g \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = - \frac{Id}{u} E_p^*(r_b) \langle \exp(-i\phi_j) \rangle \quad (2)$$

式中  $u$  是包含在一个慢波结构周期里每  $| \epsilon |^2$  电磁能 ,  $v_g$  是真空中电磁波的群速度 ,  $r_b$  为束流半径 ,  $d$  为空间结构周期 ,  $I$  为通过轴向某点的电流 , 由电荷守恒知它等于注入的束电流 ,  $\phi_j$  为第  $j$  个电子的相角 , 其满足

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_j}{dt} &= \frac{\partial \phi_j}{\partial t} + v_{jz} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \\ &= kv_{jz} - \omega. \end{aligned} \quad (3)$$

当电子穿过相互作用区域时 , 它的能量方程 ( $\gamma_j$  是相对论因子) 为

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_j}{dt} &= \frac{\partial \gamma_j}{\partial t} + v_{jz} \frac{\partial \gamma_j}{\partial z} = \frac{q}{mc^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \\ &= \frac{q}{mc^2} v_{jz} E_z. \end{aligned} \quad (4)$$

$E_z$  包括辐射场和空间电荷波场 . 根据文献[8] , 空间电荷波场可表示为

$$E^{(s)}(r, z, t) = - \frac{4\pi\mu}{\xi} E_p(r) \epsilon(z, t), \quad (5)$$

式中  $\mu$  和  $\xi$  分别为空间电荷波的磁导率和介电常数 . 将(5)式代入(4)式 , 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_j}{\partial t} + v_{jz} \frac{\partial \gamma_j}{\partial z} &= \frac{q}{mc^2} v_{jz} E_p \left( 1 - \frac{4\pi\mu}{\xi} \right) \epsilon \exp(i\phi_j) + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (6)$$

为方便计算 , 我们引入 Lagrangian 坐标 ,  $t = t_0 +$

$$\int_0^z \frac{dz'}{v_{jz}(t_0, z')}.$$

在新的坐标下,方程组(2)(3)和(6)变为

$$\alpha_j \left( 1 - \frac{v_g}{v_{z0}} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial t_0} + v_g \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = - \frac{Id}{u} E_{pz}^* < \exp(-i\phi_j) >, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial z} = \Delta k + \frac{\omega}{c} \frac{\Delta \beta_{jz}}{\beta_{z0}}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \gamma_j}{\partial z} = \frac{q}{mc^2} E_{pz} \left( 1 - \frac{4\pi\mu}{\xi} \right) \times \epsilon \exp(i\phi_j) + c.c. \quad (9)$$

式中  $\Delta k = k - \frac{\omega}{v_{z0}}$  是失谐量,且

$$\alpha_j^{-1} = 1 + \int_0^z dz' \frac{\partial}{\partial t_0} v_{jz}^{-1}(z', t_0). \quad (10)$$

计算中为满足辐射场慢变振幅  $\epsilon$  与任何一个电子相位无关的条件,取方程(7)中的  $\alpha_j \approx 1$ ,  $v_{jz} \approx v_{z0}$ , 这在场处于定态或电子运动是超相对论的情况下是合理的.引入无量纲坐标和时间

$$\zeta = \frac{z}{L},$$

$$\tau = t_0(L/v_g),$$

其中  $L$  是相互作用区长度.利用  $\Delta \gamma_j = \gamma_0^3 \beta_{z0} \Delta \beta_{jz}$ , 则方程组(7)–(9)变为

$$\left( 1 - \frac{v_g}{v_{z0}} \right) \frac{\partial a}{\partial \tau} + \frac{\partial a}{\partial \zeta} = - \tilde{I} < \exp(-i\phi_j) >, \quad 11(a)$$

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial \zeta} = L \Delta k + L \frac{\omega}{c} p_j, \quad 11(b)$$

$$\frac{\partial p_j}{\partial \zeta} = a \exp(i\phi_j) + c.c. \quad 11(c)$$

此处

$$a = L \frac{q}{mc^2} \frac{E_{pz}(r_b)}{\gamma_0^3 \beta_{z0}^3} \left( 1 - \frac{4\pi\mu}{\xi} \right) \epsilon, \quad (12)$$

$$p_j = \frac{\Delta \beta_{jz}}{\beta_{z0}^2}, \quad (13)$$

$$\tilde{I} = \frac{I}{I_A} \frac{|E_{pz}|^2 L^2 d}{u \gamma_0^3 \beta_{z0}^3 \beta_g} \left( 1 - \frac{4\pi\mu}{\xi} \right), \quad (14)$$

式中  $a$  是归一化的无量纲慢变场振幅,  $p_j$  是电子归一化的无量纲广义动量,  $\tilde{I}$  是无量纲的“universal”电流,  $I_A = mc^3/q$  是 Alfvéen 电流.

### 3. 起振电流的数值确定<sup>[9]</sup>

起振电流是辐射场由噪声到开始振荡使器件能正常工作所需要的最小束电流.我们将器件的起振电流作为注入相互作用区电流大小的尺度.为此,可通过数值计算来确定器件中的无量纲起振电流.方法如下:我们首先研究器件在一系列小电流下的行为,发现当波振幅增长到定态时,其包络的轴向剖面型是不变的,这允许我们在小电流时假设

$$a(\tau, \zeta) = f_1(\tau) f_2(\zeta). \quad (15)$$

于是,辐射场增益可以写成如下形式:

$$G = \frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} = F(\tilde{I} - \tilde{I}_{st}), \quad (16)$$

式中  $F$  是一个描述小信号近似下波与电子相互作用的因子.由此可导出无量纲起振电流的表达式为

$$\tilde{I}_{st} = \frac{G_1 \tilde{I}_2 / G_2 - \tilde{I}_1}{G_1 / G_2 - 1}. \quad (17)$$

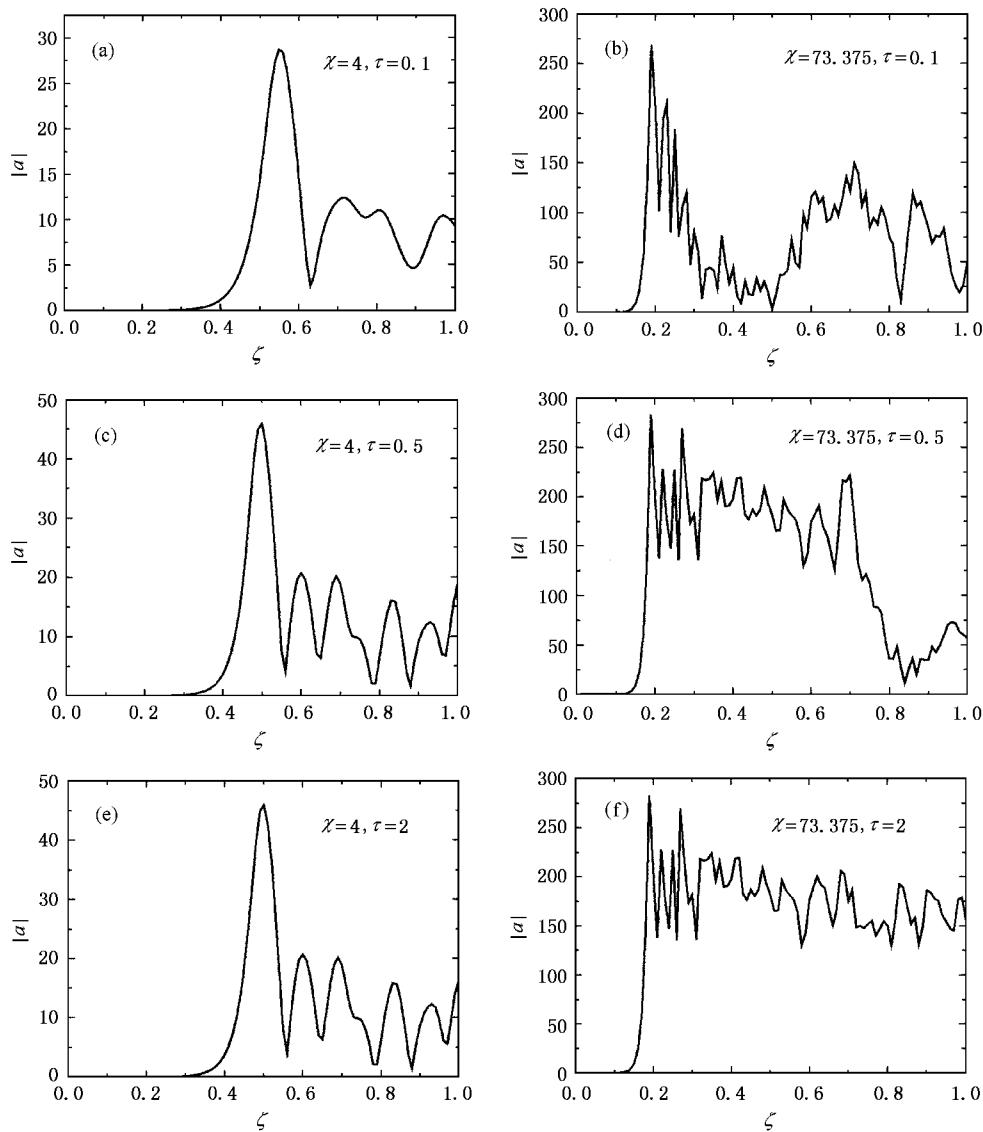
增益  $G$  可通过数值计算得到.

起振电流除受电压控制外,它还是失谐量和相互作用区长度的函数.

### 4. 非线性不稳定性与阈值电流

为考察场的混沌行为,计算中取电磁波群速度  $\beta_g = 0.24$ , 电子的注入速度  $\beta_{z0} = 0.86$ .另外,我们假定电子束是长脉冲,相互作用区的长度是固定的.这样对方程组(11a)–(11c)的研究局限在三个参数上:束电流与起振电流的比值  $\chi = I/I_{st}$ 、失谐量  $\Delta k$ 、归一化的无量纲相互作用长度  $L\omega/c$ .

在三个参数中,归一化“universal”电流作为场振幅方程的“源”项,是影响辐射场演化行为的主要因素,其大小决定了辐射场的工作状态.当  $\chi$  较大时,器件工作在非线性区,辐射场在空间开始上下起伏振荡; $\chi$  继续增大,辐射场的起伏变化频率迅速增大,并变得杂乱无章.图 1(a)–(f)分别给出了谐振 ( $\Delta k = 0.0$ ) 时不同电流和不同时刻器件内辐射场的空间分布,其中无量纲起振电流  $\tilde{I}_{st} = 4.0 \times 10^2$ .不难看出,场的空间分布最初是随着时间变化的(如图 1(a)–(d)所示).经过一段时间后,场的空间分布达到稳定,而且  $\chi$  越大,器件内场空间分布达到稳定所需要的时间越长.图 1(e) 和 (f) 为稳定波形曲线.

图1 不同电流不同时刻无量纲电场在器件内的空间分布( $\Delta k = 0.0, L\omega/c = 32$ )

随着电流的增加,TWT系统出现非线性不稳定 性,其发展结果是辐射场可能出现非线性不稳定态:一种是在定态饱和基础上的周期振荡,其阈值为 $\chi_{cr1}$ ;另一种是完全紊乱的无周期振荡,其阈值为 $\chi_{cr2}$ .即当 $\chi \geq \chi_{cr1}$ 时,辐射场出现极限环振荡,如图2(a)所示.当 $\chi \geq \chi_{cr2}$ 时,辐射场表现为混沌振荡,如图2(b)所示.失谐量不同,阈值也不同.在 $\Delta k = 0$ —

$0.1 \text{ cm}^{-1}$ 范围内, $\chi_{cr2}$ 随着失谐量增大而变小.表1给出了阈值与失谐量的关系,由此看出失谐量对辐射场混沌态的影响非常明显.从方程(11)中不难看出,虽然电子相位的变化与 $L\Delta k$ 成正比,但经过耦合,场振幅的发展也受到失谐量的影响,并且相互作用区域越长,这种影响越显著.

表1 阈值 $\chi_{cr}$ 与失谐量 $\Delta k$ 的关系( $I_{st} = 4.0 \times 10^2$ )

$L\omega/c$	$\Delta k/\text{cm}^{-1}$	0.0	0.001	0.005	0.01	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
32	$\chi_{cr1}$	43.375	58.625	58.625	59.625	53.625	58.975	50.375	53.875	59.375
	$\chi_{cr2}$	276.25	281.3	266.25	264.5	262.4	258.25	252.25	250.0	249.5

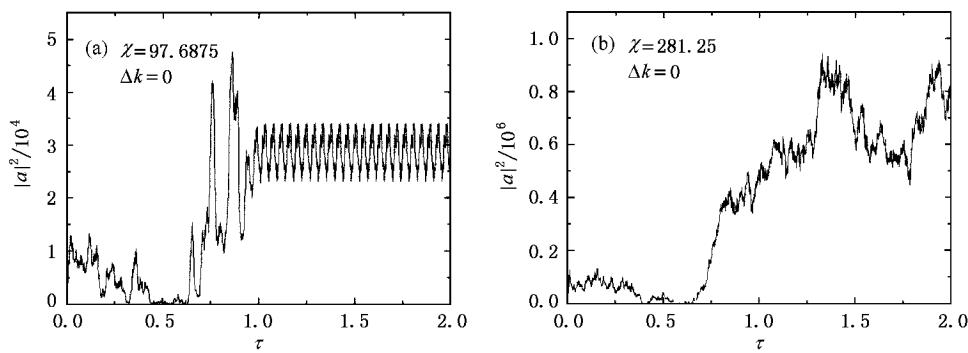


图 2 归一化输出功率随时间的起伏 ( $\Delta k = 0.0$ ,  $L\omega/c = 32$ ) (a) 围绕一定态水平的极限环振荡 (b) 没有任何定态的混沌振荡

与线性区一样,在非线性区输出功率也由电流、失谐量和相互作用长度决定。图 3 给出了输出功率  $|a(\tau, \zeta=1)|^2$  与  $\chi$  的关系,图 4 分别给出了输出功率  $|a(\tau, \zeta=1)|^2$  与  $\Delta k$  和  $|a(\tau, \zeta=1)|^2$  与  $L\omega/c$  的关系。从图 3、图 4 可以看出,当电流较大后,器件

工作在混沌区域,输出功率与  $\chi$   $\Delta k$  和  $L\omega/c$  三个参数的关系已变得紊乱无序。参数取某些值时,输出功率很小,甚至趋于零。所以,可通过优化结构和设计参数获得较高的输出功率。

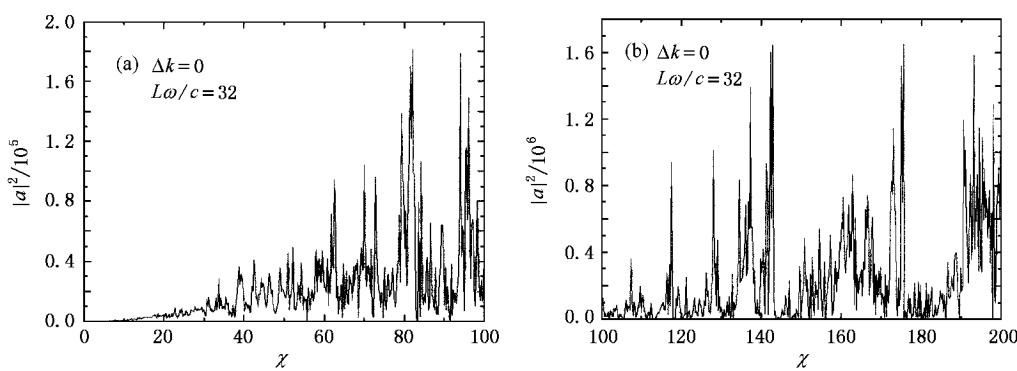


图 3  $\tau = 2$  时归一化输出功率与电流比值  $\chi$  的关系 ( $\Delta k = 0.0$ ,  $L\omega/c = 32$ ) (a)  $\chi = 0$ —100; (b)  $\chi = 100$ —200

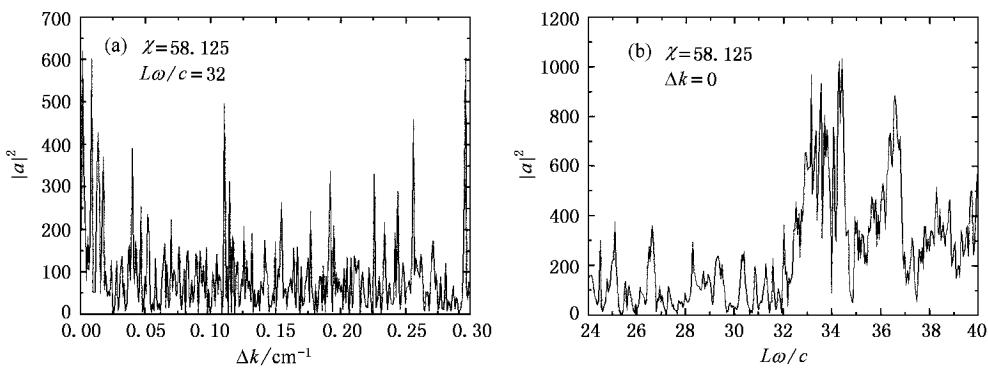


图 4 输出功率  $|a|^2$  与失谐量( a )和  $|a|^2$  与归一化相互作用长度( b )的关系 ( $\tau = 2$ ,  $\chi = 58.125$ )

计算中还发现,当  $\chi \geq \chi_{cr1}$  时,并非每一个控制参数对应的都是极限环态,但电流越大,极限环态出

现的越稠密。极限环的出现都对应着输出功率的极值点,而当  $\chi \geq \chi_{cr2}$  时,场的混沌振荡态是连续的。

## 5. 结 论

归一化电流  $\chi$ 、失谐量  $\Delta k$  和归一化相互作用长度  $L\omega/c$  是控制辐射场非线性演化的三个参数, 其中电流是决定性的因素。随着电流的增大, 辐射场由定态逐渐演化为非线性不稳定态。辐射场第一个非线性不稳定态的出现对应着一个电流阈值, 这个阈值是失谐量和相互作用长度的函数。当  $\chi \geq \chi_{\text{cr}}$  时, 辐射场呈极限环振荡。这种振荡态是不连续的, 它们

的出现都对应着输出功率的极值点, 这或许能为利用和消除这种非线性现象提供一种可能。当  $\chi \geq \chi_{\text{cr2}}$  时, 辐射场表现为混沌态。这种混沌态是连续的, 且受失谐量的影响非常大。相互作用区越长, 失谐量对混沌场的影响越明显。当电流较大时, 归一化输出功率对  $\chi$ 、 $\Delta k$  和  $L\omega/c$  三个参数的变化非常敏感, 呈现混沌紊乱状态。对一些参数值, 输出功率很小, 甚至趋于零。控制参数  $\chi$ 、 $\Delta k$  和  $L\omega/c$  在某些值上, 可获得较高的输出功率。

- [1] Shiffler D, Nation J A, Kerslick G S 1990 *IEEE Trans. Plas. Sci.* **18** 546
- [2] Schächter L, Nation J A, Shiffler D A 1991 *J. Appl. Phys.* **70** 114
- [3] Schächter L, Nation J A 1991 *J. Appl. Phys.* **70** 5186
- [4] Schächter L, Nation J A 1992 *Phys. Rev. A* **45** 8820
- [5] Yang Y Y, Ding W 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2275 (in Chinese)

- [杨蕴渊、丁 武 1999 物理学报 **48** 2275 ]

- [6] Gao H, Liu S G 2000 *Chin. Phys.* **9** 274
- [7] Baruch L, Thomas M A, Bromborsky A et al 1992 *IEEE Trans. Plas. Sci.* **20** 363
- [8] Petelin M I 1985 *Radiofizika* **28** 354
- [9] Vlasov A N, Nusinovich G S, Levush B 1997 *Phys. Plas.* **4** 1402

## Threshold analysis for the limit cycle and chaotic oscillation of the radiation field in a traveling wave tube amplifier

Hao Jian-Hong<sup>1,2)</sup> Ding Wu<sup>3)</sup> Zhang Zhi-Chou<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> Graduate School, China Academy of Engineering Physics, Beijing 100088, China

<sup>2)</sup> Department of Physics, Shijiazhuang Teacher's College, Shijiazhuang 050801, China

<sup>3)</sup> Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China

(Received 16 September 2002; revised manuscript received 28 October 2002)

### Abstract

In terms of the coupled equations of the radiation field and motion of the electron in a traveling wave tube amplifier, the threshold current at which the limit cycle or chaotic oscillation of the radiation field starts occurring is obtained. The result of numerical calculation shows that the nonlinear unsteady states may appear in a certain range of the parameters for the radiation field. The effect of the detuning on the threshold is relatively strong when the interaction region is longer. The relations of the output power with the three parameters (detuning, current and interaction length) become chaotic when the device operates in the highly nonlinear regime, and the higher output power can be obtained if the parameters are controlled suitably.

**Keywords:** traveling wave tube, radiation field, threshold, chaotic

**PACC:** 5275, 5250, 2921, 5235