

方位各向异性黏弹性介质波场有限元模拟 *

杜启振^{1,2)} 杨慧珠¹⁾

¹⁾ 清华大学工程力学系, 北京 100084

²⁾ 石油大学(华东)地球资源与信息学院, 东营 257061

(2002 年 12 月 5 日收到 2002 年 12 月 26 日收到修改稿)

随着裂缝性储集层的地位越来越重要, 黏弹性各向异性介质中地震波传播理论的研究也越来越受到重视。在弱黏滞性条件下, 针对标准线性黏弹性体模型, 采用时间增量法, 在每一个时间步长确定黏弹性变形及载荷, 并在计算下一个时间步长的黏弹性变形时把它加载进去, 建立类似于解弹性问题的黏弹性方位各向异性介质波动方程的有限元递推公式。数值模拟给出了黏弹性波在地球介质中的波场传播特征。

关键词: 黏弹性, 方位各向异性, 有限元, 时间增量法

PACC: 6240, 9165, 9130R

1. 引言

随着实际地震勘探的逐步深入以及工作地区地层的日趋复杂, 复杂地层以及各向异性介质中地震波传播的研究更加受到重视。波动方程反映了波在介质中的传播特性, 能够较全面地反映波场特征, 可以通过数值求解方法来解波动方程。近年来, 有限元数值模拟方法越来越受到国内外研究者的重视。有限元方法将连续问题转变为离散问题, 有限区域内的介质无论在几何和力学性质上多么复杂, 其中的波动问题可以用时空离散技术加以模拟, 廖振鹏^[1]将此研究方法称之为波动计算机仿真。牟永光^[2]、朱建林等^[3]采用 Kelvin-Voigt 模型导出黏滞弹性波有限元波动方程, 并进行了有限元数值模拟。另外, 水嘉鹏等^[4]研究了标准滞弹性体的内耗特征。在描述黏弹性体的模型中, Kelvin-Voigt 模型不考虑黏弹性体随时间的变化关系, Maxwell 模型在外力卸载以后不能恢复原状, 只有标准线性黏弹性体模型能较全面地反映岩石地层的黏弹性特征。因此, 针对标准线性体模型, 采用时间增量法, 即在每一时间步长确定黏弹性变形及载荷, 并在计算下一个时间步长的黏弹性变形时把它加载进去, 从而最终确定位移场, 采用上述思想建立了黏弹性方位各向异性介质波动方

程的有限元格式。并以二维波动问题为例, 给出了黏弹性波在地球介质中的波场传播特征。

2. 有限元解法递推格式

2.1. 有限元运动方程

考虑黏弹性各向异性介质的本构关系^[5], 坐标旋转^[6]以后得到以裂缝方位角为参数的应力应变关系方程

$$T(t) = R_{IL}R_{JK} [A_{LK} + A_{LK}^{(v)}x_v(0)]S_J(t) + A_{LK}^{(v)} \sum_{l=1}^{L_v} E_{jl}^{(v)}(t) \quad (1)$$

式中 R 为旋转矩阵^[6]。记忆变量为 $E_l^{(v)}(t)$ 为^[5]

$$E_{jl}^{(v)}(t) = \phi_{vl}(t) * S_j(t) = \int_0^t \phi_{vl}(0) e^{-(t-\tau)\tau_{gl}^{(v)}} S_j(\tau) d\tau. \quad (2)$$

(1)(2)式中 t 表示时间变量, $x_v(0)$ ($v = 1, 2$) 表示在时间 $t = 0$ 时的松弛函数, 即非松弛模量, $v = 1$ 对应于纵波, $v = 2$ 对应于横波; $T_l(t)$ ($l = 1, \dots, 6$) 表示应力分量; $S_j(t)$ ($J = 1, \dots, 6$) 表示应变分量; A_{LK} 和 $A_{LK}^{(v)}$ ($L, K = 1, \dots, 6; v = 1, 2$) 表示空间函数; $\phi_{vl}(t)$ ($l = 1, \dots, L_v; v = 1, 2$) 表示第 l 个松弛机制的响应函数; L_v ($v = 1, 2$) 表示纵波和横波的松弛机制

* 中国石油天然气集团公司石油科技中青年创新基金(批准号 2001CX-10), 中国石油天然气集团公司物探重点实验室开发基金(批准号: GPKL0107) 和中国石油天然气集团公司“十五”科技攻关项目(批准号 2-1-1) 联合资助的课题。

的总数 $\tau_{\text{sl}}^{(v)}$ 和 $\tau_{\text{el}}^{(v)}$ ($l = 1, \dots, L_v$, $v = 1, 2$) 分别表示材料的第 l 个机制的应力和应变松弛时间. 上述变量和函数的具体表达式参见文献 [5].

在弱黏滞性条件下^[7], 采用时间增量法求解该非线性方程, 从而可以避免卷积运算. 因此, 可得其近似计算公式为^[8]

$$E_{jl}^{(v)}(t + \Delta t) = e^{-\Delta t/\tau_{\text{sl}}^{(v)}} E_{jl}^{(v)}(t) + \phi_{vl}(0) \epsilon_j(t) \tau_{\text{sl}}^{(v)} \times (1 - e^{-\Delta t/\tau_{\text{sl}}^{(v)}}). \quad (3)$$

令

$$H_{ij} = R_{il} R_{jk} [A_{ik} + A_{ik}^{(v)} M_{uv}],$$

$$H_{ij}^{(v)} = R_{il} R_{jk} A_{ik}^{(v)},$$

重新整理(1)式, 得到

$$T(t) = H_{ij} S_j(t) + H_{ij}^{(v)} \sum_{l=1}^{L_v} E_{jl}^{(v)}(t). \quad (4)$$

将应变张量用位移来表示, 并写成整体符号形式,

$$T = H B a^e(t) + H^{(v)} \sum_{l=1}^{L_v} E_l^{(v)}(t), \quad (5)$$

式中

$$E_l^{(v)}(t + \Delta t) = e^{-\Delta t/\tau_{\text{sl}}^{(v)}} E_l^{(v)}(t) + \phi_{vl}(0) B a^e(t) \tau_{\text{sl}}^{(v)} \times (1 - e^{-\Delta t/\tau_{\text{sl}}^{(v)}}). \quad (6)$$

记

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\text{visco}}^{(v)}(t) = \sum_{l=1}^{L_v} E_l^{(v)}(t) \quad (7)$$

为黏弹性应变张量 本构关系式(5)变为

$$T(t) = H e(t) + H^{(v)} \boldsymbol{\epsilon}_{\text{visco}}^{(v)}(t). \quad (8)$$

在时间区间 $[t_1, t_2]$ 内积分, 并使其变分为零,

即 $\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$, 其中广义能量泛函

$$L = E_k - E_p + E_d + E_f.$$

约束条件为

$$\delta u(t_1) = \delta u(t_2) = 0.$$

单元动能

$$E_k = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \rho \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t} \right)^T \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t} \right) d\Omega$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial a^e(t)}{\partial t} \right)^T \rho N^T N \left(\frac{\partial a^e(t)}{\partial t} \right) d\Omega. \quad (9a)$$

单元势能

$$E_p = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(t)^T \boldsymbol{\sigma}(t) d\Omega$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\boldsymbol{a}^e(t))^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{H} \boldsymbol{B} \boldsymbol{a}^e(t) d\Omega. \quad (9b)$$

单元耗散能

$$E_d = \iint_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(t)^T \boldsymbol{H}^{(v)} \boldsymbol{\epsilon}_{\text{visco}}^{(v)}(t) d\Omega$$

$$= \iint_{\Omega} (\boldsymbol{a}^e(t))^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{H}^{(v)} \boldsymbol{\epsilon}_{\text{visco}}^{(v)}(t) d\Omega. \quad (9c)$$

单元外力势能

$$E_f = \iint_{\Omega} \boldsymbol{u}(t)^T \rho \boldsymbol{F}(t) d\Omega$$

$$= \iint_{\Omega} (\boldsymbol{a}^e(t))^T N^T \rho \boldsymbol{F}(t) d\Omega. \quad (9d)$$

(9a—9d)式中上标 T 表示矩阵转置.

在时间区间 $[t_1, t_2]$ 上, 应用哈密顿原理, 由结点位移 $\boldsymbol{a}^e(t)$ 的任意性, 可得单元上的有限元方程

$$- \iint_{\Omega} \rho N^T N d\Omega \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}^e(t)}{\partial t^2} \right) - \iint_{\Omega} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{H} \boldsymbol{B} d\Omega (\boldsymbol{a}^e(t))$$

$$+ \iint_{\Omega} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{H}^{(v)} \boldsymbol{\epsilon}_{\text{visco}}^{(v)}(t) d\Omega + \iint_{\Omega} \boldsymbol{N}^T \rho \boldsymbol{F}(t) d\Omega = 0. \quad (10)$$

令

$$\iint_{\Omega} \rho N^T N d\Omega = \boldsymbol{M}^e \quad (11a)$$

表示单元质量矩阵,

$$\iint_{\Omega} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{H} \boldsymbol{B} d\Omega = \boldsymbol{K}^e \quad (11b)$$

表示单元刚度矩阵,

$$\iint_{\Omega} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{H}^{(v)} \boldsymbol{\epsilon}_{\text{visco}}^{(v)}(t) d\Omega = \boldsymbol{P}_{\text{visco}}^e(t) \quad (11c)$$

表示单元黏弹性等效载荷矩阵,

$$\iint_{\Omega} \boldsymbol{N}^T \rho \boldsymbol{F}(t) d\Omega = \boldsymbol{P}^e(t) \quad (11d)$$

表示单元载荷矩阵, 则单元有限元方程化简为

$$\boldsymbol{M}^e \frac{\partial^2 \boldsymbol{a}^e(t)}{\partial t^2} + \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{a}^e(t) = \boldsymbol{P}_{\text{visco}}^e(t) + \boldsymbol{P}^e(t). \quad (12)$$

单元集成以后得到整体有限元运动方程

$$\boldsymbol{M} \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}(t)}{\partial t^2} + \boldsymbol{K} \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{P}_{\text{visco}}(t) + \boldsymbol{P}(t). \quad (13)$$

因此, 黏弹性问题可以采用解弹性问题的方法来计算. 即在每一个时间步长上, 确定黏弹性变形和相应的黏弹性等效载荷 $\boldsymbol{P}_{\text{visco}}(t)$, 并在下一个时间步长计算位移场时把它加载进去, 从而最终确定黏弹性变形的位移场问题.

2.2. 递推公式

假定时间 $t = 0$ 的位移 \boldsymbol{u}_0 和速度 $\dot{\boldsymbol{u}}_0$ 为已知, 设时间求解域 $[0, T]$ 被等分为 n 个时间间隔 $\Delta t = T/n$, 并假设已知 $0, \Delta t, \dots, t$ 时刻的解, 求解 $t + \Delta t$

时刻的位移场^[9].

加速度和速度可以用位移表示为

$$\ddot{\mathbf{u}}_t = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{u}_{t-\Delta t} - 2\mathbf{u}_t + \mathbf{u}_{t+\Delta t}), \quad (14a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \frac{1}{2\Delta t} (-\mathbf{u}_{t-\Delta t} + \mathbf{u}_{t+\Delta t}). \quad (14b)$$

时间 $t + \Delta t$ 的位移解 $\mathbf{u}(t + \Delta t)$ 需满足的有限元方程是

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} + \mathbf{K} \mathbf{u}_t = (\mathbf{P}_{\text{visco}} + \mathbf{P})_t. \quad (15)$$

将加速度代入(15)式, 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= (\mathbf{P}_{\text{visco}} + \mathbf{P})_t - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{u}_t \\ &\quad - \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{u}_{t-\Delta t}. \end{aligned} \quad (16)$$

(16)式是求解各个离散时间点运动方程解的递推公式. 而当 $t = 0$ 时, 为了计算 $\mathbf{u}_{\Delta t}$, 除了从初始条件已知的 \mathbf{u}_0 以外, 还需要知道 $\mathbf{u}_{-\Delta t}$. 可以利用加速度和速度公式得到

$$\mathbf{u}_{-\Delta t} = \mathbf{u}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_0. \quad (17)$$

(17)式中 $\dot{\mathbf{u}}_0$ 可以从初始条件中获得, 而加速度 $\ddot{\mathbf{u}}_0$ 可以利用 $t = 0$ 时的运动方程获得.

3. 数值模拟

考虑具有任意方位的竖向平行垂直裂缝组成的黏弹性介质模型. 震源函数采用雷克(Ricker)子波, 主频为 60 Hz, 震源位于模型的中央位置, 震源只是在该点处有作用, 子波长度为 33 ms. 雷克子波函数如下:

$$f_x(t) = 0, \quad (18a)$$

$$f_z(t) = 0, \quad (18b)$$

$$f_x(t) = [1 - 2(\pi f_0 t)^2] \exp[-(\pi f_0 t)^2], \quad (18c)$$

式中 f_0 为主频. 设有一个均匀的黏弹性各向异性介质模型, 其黏弹性参数如表 1 所示. 取 $\Delta x = \Delta z = 10$ m, $\Delta t = 1$ ms, x 和 z 方向的计算点数 N_x 和 N_z 均为 50. 观测系统采用中点激发, 两边接收的方式, 得到了地震波在不同裂缝方位角($0^\circ, 30^\circ, 150^\circ$)时的波场传播快照(x 分量和 z 分量).

图 1 给出了双程旅行时为 250 ms 时的地震波波场传播快照. 波场特征如下:

(1) 观测到三种波. 以裂缝方位 30° 为例, 三种波的波前曲面如图 1(c) 所示. 由外及里依次是纵波、

快横波和慢横波.

表 1 各向异性黏弹性页岩介质的材料性质

参 量	数 值
弹性模量 c/GPa	
c_{11}	5.0
c_{12}	1.0
c_{13}	2.0
c_{33}	6.75
c_{55}	2.25
c_{66}	2.0
密度 $\rho/\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	2500
松弛时间 τ/s	
$\tau_{\epsilon}^{(1)}$	0.0332577 0.0033257
$\tau_{\sigma}^{(1)}$	0.0304655 0.0030465
$\tau_{\epsilon}^{(2)}$	0.0352443 0.0029370
$\tau_{\sigma}^{(2)}$	0.0287482 0.0029357

(2) 横波分裂现象. 在各向异性介质中, 由于两类横波速度大小之间的差异, 可以观测到横波分裂现象. 仍以裂缝方位 30° 为例(图 1(c)), 可以看到两种横波——快、慢横波.

(3) 方位特征差异显著. 在传播快照图上, 可以看出, 0° 方位的黏弹性波的波前形状近似于一个长轴在 x 轴方向的椭圆; 而 30° 方位的黏弹性波的波前形状为水平方向略鼓的椭圆; 在 150° 方位波前形状也近似为椭圆, 但该椭圆比 0° 方位的短轴(垂直方向)要长一些, 说明它具有各向异性.

(4) 横波波前出现尖角. 从图 1(a) 中 0° 方位 x 方向 250 ms 传播快照可以清晰地看到, SV 波出现四个尖角.

4. 结 语

在弱黏滞性条件下, 针对标准线性黏弹性体, 采用时间增量法解决了黏弹性变形的计算问题, 应用动态问题的哈密顿原理建立了黏弹性方位各向异性介质波动方程的有限元递推公式. 利用本文给出的方法可以方便地采用弹性波场的有限元分析方法和程序来求解黏弹性波场的变形问题. 与弹性波场有限元法求解的差别是在波场计算中仅增加了一步, 即需要在每一时间步长计算黏弹性变形和等效黏弹

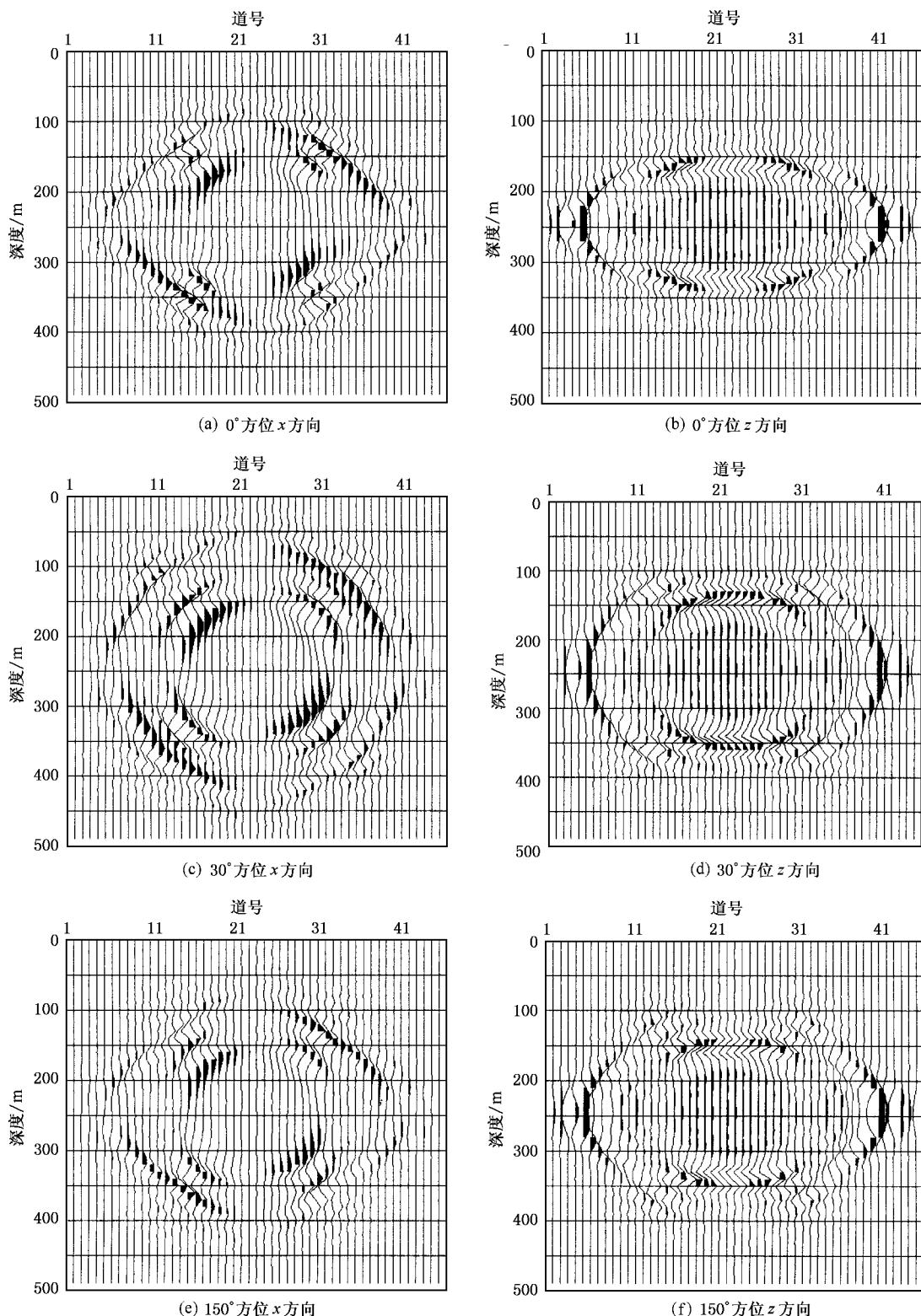


图1 地震波双程旅行时为 250 ms 时的波场传播快照

性载荷,并在计算下一个时间步长的位移场时,把它作为一种载荷加载进去.该方法的优点是采用现有的有限元分析方法就可以计算黏弹性波场的传播特

征问题.

从波场快照中可以看到如下波场特征:波前曲面由外及里依次是纵波、快横波和慢横波.观测到横

波分裂现象,黏弹性波的波前面随方位的不同发生明显的改变,在0°方位上可以看到横波的波前出现

尖角现象.

- [1] Liao Z P 1997 *Advances in Mechanics* **27** 193 (in Chinese)[廖振鹏 1997 力学进展 **27** 193]
- [2] Mu Y G 1996 *Reservoir Geophysics* (Beijing : Petroleum Industry Press) p15 (in Chinese)[牟永光 1996 储层地球物理学 (北京 : 石油工业出版社) 第 15 页]
- [3] Zhu J L , Mu Y G 1994 *Oil Geophysical Prospecting* **29** 724 (in Chinese)[朱建林、牟永光 1994 石油地球物理勘探 **29** 724]
- [4] Shui J P , Liu Y S 1999 *Acta . Phys . Sin .* **48** 692 (in Chinese)[水嘉鹏、刘咏松 1999 物理学报 **48** 692]
- [5] Carcione J M 1990 *Geophys . J . Int .* **101** 739
- [6] Du Q Z , Yang H Z 2002 *Acta . Phys . Sin .* **51** 2101 (in Chinese)
- [7] Futterman W I 1962 *J . Geophys . Res .* **67** 5279
- [8] Du Q Z 2002 *Ph . D . Thesis* (Beijing : Tsinghua University) p31 (in Chinese)[杜启振 2002 博士学位论文 (北京 : 清华大学) 第 31 页]
- [9] Wang X C , Shao M 1997 *Fundamental Principles and Numerical Methods in Finite Element Analysis* (2nd ed) (Beijing : Tsinghua University Press) p64 (in Chinese)[王勣成、邵 敏 1997 有限单元法基本原理和数值方法 (第 2 版) (北京 : 清华大学出版社) 第 64 页]

Finite-element methods for viscoelastic and azimuthally anisotropic media *

Du Qi-Zhen^{1,2)} Yang Hui-Zhu¹⁾

¹⁾ Department of Engineering Mechanics , Tsinghua University , Beijing 100084 , China)

²⁾ School of Oil Resources and Information , University of Petroleum (East China) , Dongying 257061 , China)

(Received 5 December 2002 ; revised manuscript received 26 December 2002)

Abstract

With the importance of the fractured strata in the oil exploration , researchers have paid more attention to the wave propagation in viscoelastic and anisotropic media. Provided the rocks are weakly viscoelastic , the viscoelastic problems can be solved as a series of elastic problems by using the time increment method. At each step we determine the viscoelastic deformations and the corresponding viscoelastic loads , which are added to the load vectors for the next step. On this basis , the finite-element recursive formulae of viscoelastic and azimuthally anisotropic media are established. The numerical simulations show the characteristics of wavefields in the viscoelastic and azimuthally anisotropic media .

Keywords : viscoelasticity , azimuthal anisotropy , finite-element , time increment method

PACC : 6240 , 9165 , 9130R

* Project supported by the China National Petroleum Corporation (Grant Nos. 2001CX-10 , GPKL0107 and 2-1-1).