

介观并联 RLC 电路的量子涨落^{*}

龙超云

(贵州大学物理系, 贵阳 550025)

(2002 年 9 月 30 日收到 2003 年 1 月 2 日收到修改稿)

将介观并联 RLC 电路量子化, 并利用么正变换给出其波函数及能谱的精确解. 在此基础上获得各支路中电流和电压的量子涨落.

关键词: 并联 RLC 电路, 么正变换, 量子涨落

PACC: 7335, 0365

1. 引言

随着纳米技术和纳米电子学的发展, 电路和器件日益小型化, 从而必须考虑电路及器件的量子力学效应^[1-7]. 早在 20 世纪 70 年代, Louisell^[8]就讨论了 LC 电路的量子噪声. 近年来, 由于介观物理的兴起, 又使电路及器件的量子力学效应的研究再次成为热点. 人们已分别对 LC 电路、串联 RLC 电路、电容耦合电路及电感耦合电路中电荷及电流在各种量子态下的量子涨落进行了广泛的研究^[9-28]. 同上述电路一样, 并联 RLC 电路也是构成大规模集成电路的一个最基本的电路. 但迄今为止, 作者未见有有关该电路量子效应的研究. 本文利用么正变换给出其波函数及能谱的精确解, 并在此基础上获得各支路中电流和电压的量子涨落.

2. 介观并联 RLC 电路的量子化

对于图 1 所示的并联 RLC 电路, 根据 Kirchhoff 定律^[29], 其经典运动方程为

$$\frac{d^2 I_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dI_L}{dt} + \frac{I_L}{LC} = \frac{I_S}{LC}, \quad (1)$$

$$I_R = \frac{L}{R} \frac{dI_L}{dt},$$

$$I_C = LC \frac{d^2 I_L}{dt^2}, \quad (2)$$

$$U_C = U_R = U_L = L \frac{dI_L}{dt}, \quad (3)$$

式中 R , L 和 C 分别为电阻、电感和电容; U_R , U_L 和 U_C 分别为电阻、电感和电容两端的电压; I_R , I_L 和 I_C 分别为流经电阻、电感和电容的电流; I_S 为电流源.

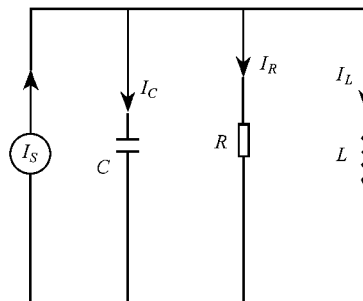


图 1 并联 RLC 电路

若电流源 $I_S = 0$, 则系统的哈密顿量为

$$H = \frac{U_L^2}{2L} + \frac{1}{2RC} (U_L I_L + I_L U_L) + \frac{I_L^2}{2C}, \quad (4)$$

式中

$$U_L = L \frac{dI_L}{dt}$$

为 I_L 的共轭变量. 显然, 从哈密顿方程

$$\frac{dU_L}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial I_L}$$

易得经典运动方程(1)当 $I_S = 0$ 时所对应的方程.

按照正则量子化方案, U_L 和 I_L 算符化后, 应满足量子力学的基本对易关系 $[\hat{I}_L, \hat{U}_L] = i\hbar$. 量子化后, 系统的哈密顿算符为

$$\hat{H} = \frac{\hat{U}_L^2}{2L} + \frac{1}{2RC} (\hat{U}_L \hat{I}_L + \hat{I}_L \hat{U}_L) + \frac{\hat{I}_L^2}{2C}. \quad (5)$$

^{*} 贵州省自然科学基金(批准号 20005025)资助的课题.

为了给出波函数及能谱的精确解,类似文献 [11],引入下列么正算符:

$$\hat{S} = \exp\left\{\frac{iL}{2\hbar RC}I_L^2\right\}. \quad (6)$$

(5) 式经过么正变换后的哈密顿算符 \tilde{H} 为

$$\tilde{H} = \hat{S}\hat{H}\hat{S}^{-1} = \frac{\hat{U}_L^2}{2L} + \frac{1}{2}L\omega^2 I_L^2, \quad (7)$$

其中

$$\omega = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{R^2 C - L}{L}}.$$

由(7)式可见,么正变换后的哈密顿算符 \tilde{H} 与线性谐振子的哈密顿算符具有相同的形式.根据量子力学中线性谐振子的结果及么正变换的性质,立即可得并联 RLC 电路的波函数及能谱分别为

$$|\Psi_n(I_L)\rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}} \exp\left\{i\frac{L}{2\hbar RC}I_L^2\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\alpha^2 I_L^2\right\} H_n(\alpha I_L), \quad (8)$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad (9)$$

式中 $\alpha = \sqrt{\frac{L\omega}{\hbar}}$, $H_n(\alpha I_L)$ 为厄米多项式, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

3. 并联 RLC 电路的电流和电压的量子涨落

利用平均值公式及么正变换不改变力学量平均值的性质,由(8)式可分别得到并联 RLC 电路中各支路的电流和电压在量子态 $|\Psi_n(I_L)\rangle$ 下的量子涨落.

3.1. 电感支路中的电流和电压的量子涨落

由(8)式和么正变换不改变力学量的平均值的性质,易得该支路的电流和电压的平均值及方均值

$$\langle \Psi_n(I_L) | I_L | \Psi_n(I_L) \rangle = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_n(I_L) | I_L^2 | \Psi_n(I_L) \rangle \\ &= \frac{\hbar RC}{2\sqrt{R^2 LC - L^2}}(2n+1), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\langle \Psi_n(I_L) | U_L | \Psi_n(I_L) \rangle = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_n(I_L) | U_L^2 | \Psi_n(I_L) \rangle \\ &= \frac{\hbar RL}{2\sqrt{R^2 LC - L^2}}(2n+1). \end{aligned} \quad (13)$$

从(10)–(13)式可得流经电感的电流及其两端电压的量子涨落,

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_n(I_L) | (\Delta I_L)^2 | \Psi_n(I_L) \rangle \\ &= \langle \Psi_n(I_L) | I_L^2 | \Psi_n(I_L) \rangle \\ &\quad - \langle \Psi_n(I_L) | I_L | \Psi_n(I_L) \rangle^2 \\ &= \frac{\hbar RC}{2\sqrt{R^2 LC - L^2}}(2n+1), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_n(I_L) | (\Delta U_L)^2 | \Psi_n(I_L) \rangle \\ &= \langle \Psi_n(I_L) | U_L^2 | \Psi_n(I_L) \rangle \\ &\quad - \langle \Psi_n(I_L) | U_L | \Psi_n(I_L) \rangle^2 \\ &= \frac{\hbar RL}{2\sqrt{R^2 LC - L^2}}(2n+1). \end{aligned} \quad (15)$$

3.2. 电阻支路中的电流和电压的量子涨落

从(2)(3)式可知

$$I_R = \frac{L}{R} \frac{dI_L}{dt} = \frac{U_L}{R},$$

$$U_R = U_L = L \frac{dI_L}{dt}.$$

并利用(12)(13)和(15)式,立即可得流经电阻的电流及其两端电压的量子涨落

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_n(I_L) | (\Delta I_R)^2 | \Psi_n(I_L) \rangle \\ &= \frac{1}{R^2} \langle \Psi_n(I_L) | (\Delta U_L)^2 | \Psi_n(I_L) \rangle \\ &= \frac{\hbar L}{2R\sqrt{R^2 LC - L^2}}(2n+1), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_n(I_L) | (\Delta U_R)^2 | \Psi_n(I_L) \rangle \\ &= \langle \Psi_n(I_L) | (\Delta U_L)^2 | \Psi_n(I_L) \rangle \\ &= \frac{\hbar LR}{2\sqrt{R^2 LC - L^2}}(2n+1). \end{aligned} \quad (17)$$

3.3. 电容支路中的电流和电压的量子涨落

由(2)(3)式可知

$$I_C = C \frac{dU_L}{dt}. \quad (18)$$

同时,根据量子力学理论,在 U_L 不显含时间的情况下有

$$\begin{aligned} & \langle \Psi_n(I_L) | \frac{dU_L}{dt} | \Psi_n(I_L) \rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar} \langle \Psi_n(I_L) | [\hat{U}_L, \hat{H}] | \Psi_n(I_L) \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

从(5)(8)(18)和(19)式可得 I_C 的平均值为

$$\begin{aligned} & \Psi_n(I_L)|I_C|\Psi_n(I_L) \\ &= \frac{C}{i\hbar} \Psi_n(I_L)|[\hat{U}_L, \hat{H}]|\Psi_n(I_L) = 0. \quad (20) \end{aligned}$$

为了计算 I_C 的方均值, 设 $|\Psi_m(I_L)\rangle$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) 也为哈密顿算符 \hat{H} 的本征态, 则其完备性条件为

$$\sum_m |\Psi_m(I_L)\rangle \langle \Psi_m(I_L)| = 1. \quad (21)$$

此外, 当 U_L 不显含时间时, 根据量子力学理论可以证明下列关系:

$$\begin{aligned} & \Psi_n(I_L)|\frac{dU_L}{dt}|\Psi_m(I_L) \\ &= \frac{1}{i\hbar} \Psi_n(I_L)|[\hat{U}_L, \hat{H}]|\Psi_m(I_L). \quad (22) \end{aligned}$$

从而, 利用 (5)(8)(18)(21) 和 (22) 式可得 I_C^2 的平均值为

$$\begin{aligned} & \Psi_n(I_L)|I_C^2|\Psi_n(I_L) \\ &= C^2 \Psi_n(I_L)|\left(\frac{dU_L}{dt}\right)^2|\Psi_n(I_L) \\ &= C^2 \sum_m \Psi_n(I_L)|\frac{dU_L}{dt}|\Psi_m(I_L) \\ &\quad \times \Psi_m(I_L)|\frac{dU_L}{dt}|\Psi_n(I_L) \\ &= -\frac{C^2}{\hbar^2} \sum_m \Psi_n(I_L)|[\hat{U}_L, \hat{H}]|\Psi_m(I_L) \\ &\quad \times \Psi_m(I_L)|[\hat{U}_L, \hat{H}]|\Psi_n(I_L) \end{aligned}$$

$$= \frac{\hbar L}{2R^3 C} \left[\frac{R^2 C - L}{L} \right]^{3/2} (2n+1). \quad (23)$$

从 (20)(23) 式可得 I_C 的量子涨落

$$\begin{aligned} & \Psi_n(I_L)|(\Delta I_C)^2|\Psi_n(I_L) \\ &= \frac{\hbar L}{2R^3 C} \left[\frac{R^2 C - L}{L} \right]^{3/2} (2n+1). \end{aligned}$$

至于电容两端电压的量子涨落, 由 (3)(15) 式立即可得

$$\begin{aligned} & \Psi_n(I_L)|(\Delta U_C)^2|\Psi_n(I_L) \\ &= \Psi_n(I_L)|(\Delta U_L)^2|\Psi_n(I_L) \\ &= \frac{\hbar LR}{2\sqrt{R^2 LC - L^2}} (2n+1). \quad (24) \end{aligned}$$

4. 结 论

本文从并联 RLC 电路的经典运动方程出发, 将介观并联 RLC 电路量子化, 并利用么正变换给出其波函数及能谱的精确解. 在此基础上获得各支路中电流和电压的量子涨落. 结果表明, 各支路两端电压的量子涨落均相等, 但各支路中电流的量子涨落却不相同. 同时各支路中电流和电压的量子涨落均与器件参数有关. 因此, 可以通过调节器件参数来控制电路的量子噪声, 这对介观电路的设计具有一定的理论指导意义.

-
- [1] Buot F A 1993 *Phys. Rep.* **234** 73
- [2] Chen B, Li Y Q *et al* 1995 *Phys. Lett. A* **205** 121
- [3] Li Y Q, Chen B 1996 *Phys. Rev. B* **53** 4027
- [4] Ji Y H *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1163 (in Chinese) [嵇英华等 2001 物理学报 **50** 1163]
- [5] Ji Y H, Rao J P, Lei M S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 395 (in Chinese) [嵇英华、饶建平、雷敏生 2002 物理学报 **51** 395]
- [6] Wang J S, Feng J, Zhan M S 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 299 (in Chinese) [王继锁、冯健、詹明生 2001 物理学报 **50** 299]
- [7] Long C Y, Liu B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1011 (in Chinese) [龙超云、刘波 2001 物理学报 **50** 1011]
- [8] Louisell W H *Quantum Statistical Properties of Radiation* 1973 (New York: John Wiley)
- [9] Yu Z X, Zhang D X, Liu Y H 1997 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **6** 522
- [10] Wang X G, Pan S H 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 171
- [11] Wang J S, Liu T K, Zhan M S 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 528
- [12] Fan H Y, Pan X Y 1998 *Chin. Phys. Lett.* **15** 625
- [13] Fan H Y, Liang X T 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 174
- [14] Wang J S, Sun C Y 1998 *Int. J. Theor. Phys.* **37** 1213
- [15] Yu G A 1998 *Commun. Theor. Phys.* **30** 297
- [16] Lei M S, Ji Y H, Xie F S 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 163
- [17] Chen B, Li Y Q, Sha J *et al* 1996 *Chin. Sci. Bull.* **41** 1275 (in Chinese) [陈斌、李有泉、沙健等 1996 科学通报 **41** 1275]
- [18] Wang J S, Liu T K, Zhan M S 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2271 (in Chinese) [王继锁、刘堂昆、詹明生 2000 物理学报 **49** 2271]
- [19] Wang J S, Han B C, Sun C Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1187 (in Chinese) [王继锁、韩保存、孙长勇 1998 物理学报 **47** 1187]
- [20] Lin R L 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2343 (in Chinese) [凌瑞良 1999 物理学报 **48** 2343]
- [21] Wang J S, Sun C Y 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2007 (in Chinese) [王继锁、孙长勇 1997 物理学报 **46** 2007]
- [22] Gu Y J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 965 (in Chinese) [顾永建 2000 物理学报 **49** 965]

[23]

Wang Z Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1808 (in Chinese)[汪仲清 2002 物理学报 **51** 1808]

[24]

Chen B *et al* 1996 *Chin. Sci. Bull.* **41** 1170(in Chinese)[陈 斌等 1996 科学通报 **41** 1170]

[25]

Long C Y ,Liu B , Wang X F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 159 (in Chinese)[龙超云、刘 波、王心福 2002 物理学报 **51** 159]

[26]

Ji Y H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 692 (in Chinese) 嵇英华 2003 物理学报 **52** 692]

[27]

Liang M L ,Yuan B 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 978(in Chinese) 梁 麦林、袁 兵 2003 物理学报 **52** 978]

[28]

Liang X T , Fan H Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 486

[29]

Atkin R H *Theoretical Electromagnetism* 1962(London , Melbourne , Toronto :Heinemann) p119

The quantum fluctuation of parallel mesoscopic *RLC* circuit^{*}

Long Chao-Yun

(*Department of Physics , Guizhou University , Guiyang 550025 , China*)

(Received 30 September 2002 ; revised manuscript received 2 January 2003)

Abstract

In this paper ,the quantization of parallel mesoscopic *RLC* circuit is given and the quantum wavefunction and the corresponding energy levels are obtained by using unitary transformation. The quantum fluctuation of the voltage and current are calculated.

Keywords : parallel *RLC* circuit , unitary transformation , quantum fluctuation

PACC : 7335 , 0365

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Guizhou Province ,China(Grant No.20005025).