

静态球对称黑洞 Dirac 场的 Stefan-Boltzmann 定律

孟庆苗

(山东省菏泽师范专科学校物理系, 菏泽 274015)

(2002 年 12 月 12 日收到; 2003 年 1 月 14 日收到修改稿)

利用静态球对称黑洞 Dirac 场的统计熵, 导出静态球对称黑洞的 Stefan-Boltzmann 定律, 得到黑洞的辐出度与视界温度的四次方成正比的结论. 发现 Stefan-Boltzmann 常数不同于平直时空的值, 并且在不同时空度规中该常数有不同的值.

关键词: 黑洞, 统计熵, 薄层模型, 辐出度

PACC: 9760L, 0420

1. 引言

大量文献^[1-9]对黑洞热辐射的研究, 得出了黑洞的热辐射满足黑体辐射谱. 人们把系统平衡时辐射具有普朗克黑体谱, 作为一条基本的物理规律^[10]. 已经证明, 黑洞视界的存在普遍导致 Hawking 效应^[2]. 大量文献^[11-17]对所有黑洞熵的讨论都给出了与黑洞视界面积成正比的结论. 黑洞熵的有无直接与视界的存在与否有关^[1]. 黑洞熵是视界作为三维空间里的一个二维膜所具有的性质^[12]. 可见, 黑洞的熵与其热辐射之间存在着必然的内在联系. 本文利用静态球对称黑洞 Dirac 场的统计熵, 研究黑洞的热辐射规律, 得出了在一定温度下黑洞的辐出度与其视界温度的四次方成正比的结论.

2. 黑洞视界面附近 Dirac 场的熵密度

一般非极端静态球对称黑洞时空线元可表示为

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{rr} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1)$$

式中 $g_{tt} = -g^{rr} = -g_{rr}^{-1} = (g^{rr})^{-1} = f(r)/(r-r_+)$, r_+ 为黑洞的外视界半径. 由于黑洞熵的主要部分来自黑洞视界附近量子场的贡献^[18]. 文献[13]利用薄层模型^[15-17]给出了静态球对称黑洞 Dirac 场一个分量的统计熵为

$$S_1 = \frac{7\pi^3 r_+^2}{45\epsilon_H^2} f^{-2}(r) \Big|_{r=r_+}, \quad (2)$$

式中 $\beta_H = \frac{1}{k_B T}$, k_B 为 Boltzmann 常数, T 为视界温度, $\epsilon' = \epsilon(\epsilon + h)/h$, ϵ 为紫外截断因子, h 为膜的厚度. 根据熵的可加性可得静态球对称黑洞 Dirac 场的统计熵为

$$S_F = 4S_1 = \frac{7\pi^2 k_B^3 A_H}{45\epsilon_H^2} T^3, \quad (3)$$

式中 $A_H = 4\pi r_+^2$ 为黑洞视界面积, $f_H = f(r)|_{r=r_+}$. 根据薄层模型及(3)式可得黑洞视界面附近 Dirac 场的熵密度为

$$s = \frac{S_F}{V} = \frac{7\pi^2 k_B^3 A_H}{45\epsilon_H^2 V} T^3, \quad (4)$$

式中 $V = \frac{4}{3}\pi[(r + \epsilon + h)^3 - (r + \epsilon)^3]$ 为黑洞视界面附近所取的薄层膜的体积.

3. Stefan-Boltzmann 定律的推导

按照黑体辐射的标准公式, 静止参考系中能量密度 ρ , 熵密度 s 与局域测得的温度 T 之间的关系为^[19]

$$\rho = bT^4, \quad (5)$$

$$s = \frac{4}{3}bT^3, \quad (6)$$

式中 b 是一个与辐射种数有关的常数. 按照 Einstein 局域等效原理, 对照(4)式和(6)式得

$$b = \frac{21\pi^2 k_B^3 A_H}{180\epsilon_H^2 V}. \quad (7)$$

将(7)式代入(5)式得

$$\rho = \frac{21\pi^2 k_B^3 A_H}{180 \epsilon_H^2 V} T^4. \quad (8)$$

可见, 黑洞视界附近 Dirac 场的能量密度与其视界温度的四次方成正比. 根据薄层模型及(8)式可求得黑洞的辐出度为

$$M(T) = \frac{QV}{At} = \frac{21\pi^2 k_B^3 \sigma_+^2}{90 \epsilon(\epsilon_+ h) f_H^2 (r_+ + \epsilon_+ h)^2} T^4, \quad (9)$$

式中 $A = 4\pi(r_+ + \epsilon_+ h)^2$ 为辐射球面面积, $t = \frac{h}{2c}$ 为

在 $r_+ + \epsilon_+ h$ 薄层内的辐射粒子到达辐射球面的平均固有时间, c 为光速. 令

$$\sigma = \frac{21\pi^2 k_B^3 \sigma_+^2}{90 \epsilon(\epsilon_+ h) f_H^2 (r_+ + \epsilon_+ h)^2}. \quad (10)$$

(9) 式可变为

$$M(T) = \sigma T^4. \quad (11)$$

可见, 当紫外截断因子 ϵ 及膜的厚度 h 取定后, 对于给定的静态球对称黑洞, 黑洞的辐出度与其视界温度的四次方成正比. 这一结论与平直时空中黑体辐射的 Stefan-Boltzmann 实验定律一致. (11) 式可称为静态球对称黑洞 Dirac 场的 Stefan-Boltzmann 定律, (10) 式为对应的 Stefan-Boltzmann 常数. 与平直时空黑体辐射的 Stefan-Boltzmann 定律相比, σ 不再是一个恒量 ($\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$), 而是一个与黑洞视界面附近的时空度规有关的常数, 由于在黑洞视界面附近引力场极强, 所以得到的弯曲时空的 σ 值不同于平直时空的 σ 值. 这进一步揭示了引力场与热之间存在着必然的内在联系. 当 $r_+ \gg \epsilon$, $r_+ \gg h$ 时, (9) 式可变为

$$M(T) = \frac{21\pi^2 k_B^3 c}{90 \epsilon(\epsilon_+ h) f_H^2} T^4. \quad (12)$$

对应的 Stefan-Boltzmann 常数为

$$\sigma = \frac{21\pi^2 k_B^3 c}{90 \epsilon(\epsilon_+ h) f_H^2}. \quad (13)$$

4. 两种典型的静态球对称黑洞 Dirac 场的辐出度

4.1. Schwarzschild 黑洞

Schwarzschild 时空中的四维不变线元为

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2m}{r}\right] dt^2 - \left[1 - \frac{2m}{r}\right]^{-1} dr^2$$

$$- r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (14)$$

由上式可得 $f_H = \frac{1}{r_+}$, 代入(9)式得

$$M(T) = \frac{21\pi^2 k_B^3 \sigma_+^4}{90 \epsilon(\epsilon_+ h) (r_+ + \epsilon_+ h)^2} T^4. \quad (15)$$

相应的 Stefan-Boltzmann 常数为

$$\sigma = \frac{21\pi^2 k_B^3 \sigma_+^4}{90 \epsilon(\epsilon_+ h) (r_+ + \epsilon_+ h)^2}. \quad (16)$$

4.2. 含荷球对称黑洞

含荷球对称黑洞周围的时空性质由著名的 Reissner-Nordström 度规确定,

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right] dt^2 - \left[1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right]^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (17)$$

由上式可得 $f_H = \frac{r_+ - r_-}{r_+^2}$, 代入(9)式得

$$M(T) = \frac{21\pi^2 k_B^3 \sigma_+^6}{90 \epsilon(\epsilon_+ h) (r_+ - r_-)^2 (r_+ + \epsilon_+ h)^2} T^4, \quad (18)$$

式中 r_- 为黑洞的内视界半径, 相应的 Stefan-Boltzmann 常数为

$$\sigma = \frac{21\pi^2 k_B^3 \sigma_+^6}{90 \epsilon(\epsilon_+ h) (r_+ - r_-)^2 (r_+ + \epsilon_+ h)^2}. \quad (19)$$

计算结果表明, 对于不同静态球对称黑洞, 相应的 Stefan-Boltzmann 常数也不同. 但仍满足黑洞的辐出度与其视界温度的四次方成正比.

5. 结 论

本文得到了黑洞的辐出度满足 Stefan-Boltzmann 定律的结论. 由于黑洞视界附近时空的奇异性, 导出的 Stefan-Boltzmann 常数不同于平直时空的值. 对于不同的黑洞, 因黑洞附近时空度规不同, 导出的 Stefan-Boltzmann 常数也不同. 实际上由于黑洞吸收所有种类的辐射而不反射, 其热辐射具有典型的黑体辐射谱, 因而黑洞的热辐射就是黑体的热辐射. 黑洞的热辐射当然应满足黑体辐射的 Stefan-Boltzmann 定律.

作者曾与张建华教授、李传安教授进行过有益的讨论, 在此表示感谢.

- [1] Gibbons G W, Hawking S W 1977 *Phys. Rev. D* **15** 2752
- [2] Zhao Z 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 1508 (in Chinese) [赵 峥 1981 物理学报 **30** 1508]
- [3] Zhang J H, Meng Q M, Li C A 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 177 (in Chinese) [张建华、孟庆苗、李传安 1996 物理学报 **45** 177]
- [4] Zhao Z, Luo Z Q, Dai X X 1994 *IL Nuovo Cimento B* **109** 483
- [5] Balbinot R 1986 *Phys. Rev. D* **33** 1611
- [6] Dai X X, Zhao Z 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 869 (in Chinese) [戴宪新、赵 峥 1992 物理学报 **41** 869]
- [7] Meng Q M, Zhang J H, Li C A 1995 *Journal of Xinjiang University (Natural Science)* **12** 56 (in Chinese) [孟庆苗、张建华、李传安 1995 新疆大学学报(自然科学版) **12** 56]
- [8] Song T P, Yao G Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1144 (in Chinese) [宋太平、姚国政 2002 物理学报 **51** 1144]
- [9] Sun M C, Zhao R, Zhao Z 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 1018 (in Chinese) [孙鸣超、赵 仁、赵 峥 1995 物理学报 **44** 1018]
- [10] Zhao Z 1999 *Thermal Property of Black Hole and Singularity of Spacetime* (Beijing: Beijing Normal University Press) pp352—353 (in Chinese) [赵 峥 1999 黑洞的热性质与时空奇异性(北京:北京师范大学出版社) 第 352—353 页]
- [11] Jing J L, Yan M L 2000 *Chin. Phys.* **9** 389
- [12] Zhao R, Zhang L C 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 21 (in Chinese) [赵 仁、张丽春 2002 物理学报 **51** 21]
- [13] Li C A, Meng Q M, Su J Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1897 (in Chinese) [李传安、孟庆苗、苏九清 2002 物理学报 **51** 1897]
- [14] Zhang J Y, Zhao Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2399 (in Chinese) [张靖仪、赵 峥 2002 物理学报 **51** 2399]
- [15] Liu W B, Zhao Z 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 310
- [16] Li X, Zhao Z 2000 *Int. J. Theor. Phys.* **39** 2079
- [17] Gao C J, Liu W B 2000 *Int. J. Theor. Phys.* **39** 2221
- [18] Li X, Zhao Z 2000 *Journal of Beijing Normal University (Natural Science)* **36** 69 (in Chinese) [李 翔、赵 峥 2000 北京师范大学学报(自然科学版) **36** 69]
- [19] Zhang Z J 1986 *Modern Theorey of General Relativity and Black Hole Physics* (Wuhan: Huazhong Nomal University Press) p362 (in Chinese) [张镇九 1986 现代相对论及黑洞物理学(武汉:华中师范大学出版社) 第 362 页]

Stefan-Boltzmann's law of the Dirac field of static spherically symmetric black holes

Meng Qing-Miao

(Department of Physics, Heze Teachers College, Heze 274015, China)

(Received 12 December 2002; revised manuscript received 14 January 2003)

Abstract

Using the statistical entropy of the Dirac field of static spherically symmetric black hole, the Stefan-Boltzmann's law of static spherically symmetric black holes is calculated, and we obtain a conclusion that the radiant emittance of a black hole is proportionate to quartic power of temperature of the event horizon of the black hole. It is found that the value of Stefan-Boltzmann constant in curved space-time is different from that in Euclidean space-time, and the constant has different value in different space-time.

Keywords: black hole, statistical entropy, thin film model, radiant emittance

PACC: 9760L, 0420