第 52 卷 第 9 期 2003 年 9 月
1000-3290/2003/52(09)/2105-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52, No.9, September, 2003

二阶可降阶微分约束系统的形式不变性*

葛伟宽[1)]　张　毅[2)]

[1)](湖州师范学院物理系, 湖州　313000)

[2)](苏州科技学院土木工程系, 苏州　215011)

(2002 年 12 月 5 日收到; 2003 年 1 月 10 日收到修改稿)

研究具有二阶可降阶微分约束的力学系统的形式不变性. 采用两种方法: 一是用不可降阶微分约束系统的方法; 另一是用降阶后系统的方法. 研究两种方法之间的关系. 结果表明, 用后一种方法可能会失掉一些对称性.

关键词: 约束力学系统, 微分约束, 降阶, 形式不变性, 守恒量

PACC: 0320

1. 引　言

寻求力学系统的守恒律, 无论在数学、力学、物理学以及其他学科中都是非常重要的. 对称性(或称不变性)理论是研究守恒律的一个近代方法, 主要有 Noether 对称性[1—4], Lie 对称性[2,3,5—12], 形式不变性[13—17]等. 本文研究具有二阶可降阶微分约束的力学系统的形式不变性. 二阶可降阶微分约束系统, 可以当作二阶非完整系统, 也可当作一阶非完整系统来研究, 本文首先给出系统的两类运动微分方程. 其次, 研究两类方程的形式不变性. 第三, 研究两类形式不变性的关系. 最后, 举例说明结果的应用.

2. 系统的运动微分方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定, 系统的运动受有 g 个二阶可降阶微分约束

$$f_\beta^{(2)}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}) \equiv a_{\beta s}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\ddot{q}_s + b_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,g), \tag{1}$$

设存在函数 $F_\beta^{(1)}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_\beta^{(1)} = f_\beta^{(2)}, \tag{2}$$

则约束方程(1)可积分为

$$F_\beta^{(1)}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) - C_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,\cdots,g). \tag{3}$$

将系统当作二阶非完整约束系统来研究, 则运动微分方程可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + \lambda_\beta a_{\beta s} \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{4}$$

其中 λ_β 为约束乘子, L 为系统的 Lagrange 函数, Q_s 为非势广义力. 设由方程(1), (4)可解出 λ_β, 记作

$$\lambda_\beta = \lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}). \tag{5}$$

将(5)式代入方程(4), 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + \Lambda_s^{(2)} \qquad (s = 1,\cdots,n), \tag{6}$$

其中

$$\Lambda_s^{(2)} = \Lambda_s^{(2)}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda_\beta a_{\beta s} \tag{7}$$

已表为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数.

将系统当作一阶非完整约束系统来研究, 则运动方程可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + \mu_\beta\frac{\partial F_\beta^{(1)}}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s = 1,\cdots,n). \tag{8}$$

类似地可解出

$$\mu_\beta = \mu_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}). \tag{9}$$

将(9)式代入方程(8), 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + \Lambda_s^{(1)} \qquad (s = 1,\cdots,n), \tag{10}$$

* 国家自然科学基金(批准号: 19972010)及江苏省青蓝工程基金资助的课题.

其中

$$\Lambda_s^{(1)} = \Lambda_s^{(1)}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \mu_\beta \frac{\partial F_\beta^{(1)}}{\partial \dot{q}_s}. \qquad (11)$$

称系统(1),(6)为原系统,称系统(3),(10)为降阶系统.

因

$$\frac{\partial F_\beta^{(1)}}{\partial \dot{q}_s} = a_{\beta s}, \qquad (12)$$

故原系统的方程(6)与降阶系统的方程(10)一致.两系统方程展开有同样形式,记作

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, \cdots, n). \qquad (13)$$

3.系统形式不变性的判据

原系统的方程(6)的形式不变性归为如下方程:

$$E_s\{X^{(1)}(L)\} = X^{(1)}(Q_s) + X^{(1)}(\Lambda_s^{(2)}). \qquad (14)$$

约束方程(1)的形式不变性为

$$X^{(2)}\{f_\beta^{(2)}\} = 0. \qquad (15)$$

降阶系统的方程(10)的形式不变性归为如下方程:

$$E_s\{X^{(1)}(L)\} = X^{(1)}(Q_s) + X^{(1)}(\Lambda_s^{(1)}). \qquad (16)$$

约束方程(3)的形式不变性为

$$X^{(1)}\{F_\beta^{(1)}\} = 0. \qquad (17)$$

这里 E_s 为 Euler 算子

$$E_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s}, \qquad (18)$$

而

$$X^{(1)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \qquad (19)$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \{(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0\}\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \qquad (20)$$

称方程(14),(15)为原系统的形式不变性判据方程,称方程(16),(17)为降阶系统的形式不变性判据方程.

4.两系统形式不变性的关系

比较两系统形式不变性的判据方程(14),(15)和(16),(17),可知方程(16)与方程(14)一致,方程(17)与方程(15)不一致.

容易证明下述关系:

$$X^{(2)}\{f_\beta^{(2)}\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X^{(1)}\{F_\beta^{(1)}\}, \qquad (21)$$

于是得如下命题.

命题 降阶系统(3),(10)的形式不变性必是原系统(1),(6)的形式不变性;反之,则不一定.

因此,在研究具有二阶可降阶微分约束的力学系统的形式不变性时,应该采用原系统,不应采用降阶系统.否则,会失掉一些不变性.

5.算 例

下面举例说明上述结果的应用.

假设系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_2, \qquad (22)$$

所受二阶可降阶微分约束为

$$f^{(2)} = \ddot{q}_2 - t\ddot{q}_1 = 0, \qquad (23)$$

试研究原系统与降阶系统的形式不变性.

微分约束(23)可降阶为

$$F^{(1)} = \dot{q}_2 - t\dot{q}_1 + q_1,$$
$$F^{(1)} - C = 0. \qquad (24)$$

方程(4)给出为

$$\ddot{q}_1 = -\lambda t, \quad \ddot{q}_2 + 1 = \lambda, \qquad (25)$$

方程(8)给出为

$$\ddot{q}_1 = -\mu t, \quad \ddot{q}_2 + 1 = \mu, \qquad (26)$$

方程(25)与(26)一致.可解出

$$\lambda = \mu = \frac{1}{1 + t^2}. \qquad (27)$$

方程(13)给出为

$$\ddot{q}_1 = -\frac{t}{1 + t^2},$$
$$\ddot{q}_2 = -1 + \frac{1}{1 + t^2}. \qquad (28)$$

判据方程(14)或(16)给出

$$E_1\{X^{(1)}(L)\} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{t}{1 + t^2}\right), \qquad (29)$$

$$E_2\{X^{(1)}(L)\} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{1 + t^2}\right), \qquad (30)$$

判据方程(15)给出

$$(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_2\dot{\xi}_0 - t\{(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_1\dot{\xi}_0\} - \xi_0\ddot{q}_1 = 0, \qquad (31)$$

而判据方程(17)给出

$$\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0 - t(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) - \xi_0\dot{q}_1 + \xi_1 = 0. \qquad (32)$$

取生成元

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = t, \tag{33}$$

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = t, \quad \xi_2 = 1. \tag{34}$$

它们都满足方程(31),因此都对应原系统的形式不变性.生成元(34)还满足方程(32),因此也对应降阶系统的形式不变性.但生成元(33)不满足(32)式,因此不是降阶系统的形式不变性.

6. 结　　论

研究力学系统的形式不变性的目的之一是寻求系统的守恒量.对具有二阶可降阶微分约束系统,如果用降阶系统代替原系统,就会失掉一些形式不变性,因而也会失掉一些守恒量.

[1] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing：Beijing Polytechnic University Press) p1 (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质 (北京：北京工业大学出版社) 第 1 页]

[2] Zhao Y Y and Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing：Science Press) 164 (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量(北京：科学出版社) 第 164 页]

[3] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing：Science Press) p1 (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京：科学出版社)第 1 页]

[4] Ge W K and Mei F X 2001 *Acta Armamentarii* **22** 241 (in Chinese) [葛伟宽、梅凤翔 2001 兵工学报 **22** 241]

[5] Mei F X 2000 *Acta Mechanica* **141** 135

[6] Mei F X 2000 *Acta Mech. Sin.* **32** 466(in Chinese) [梅凤翔 2000 力学学报 **32** 466]

[7] Mei F X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1207(in Chinese) [梅凤翔 2000 物理学报 **49** 1207]

[8] Mei F X and Shang M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1901(in Chinese) [梅凤翔、尚　玫 2000 物理学报 **49** 1901]

[9] Fu J L and Wang X M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1023(in Chinese) [傅景礼、王新民 2000 物理学报 **49** 1023]

[10] Zhang Y and Mei F X 2000 *Chin. Sci. Bull.* **45** 1354

[11] Zhang Y and Xue Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 816(in Chinese) [张毅、薛　纭 2001 物理学报 **50** 816]

[12] Zhang Y, Shang M and Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 401

[13] Mei F X 2000 *Journal of Beijing Institute of Technology* **9** 120

[14] Mei F X 2001 *Journal of Beijing Institute of Technology* **21** 535 (in Chinese) [梅凤翔 2001 北京理工大学学报 **21** 535]

[15] Wang S Y and Mei F X 2001 *Chinese Physics* **10** 373

[16] Luo S K 2002 *Chinese Physics Letters* **19** 449

[17] Ge W K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 939 (in Chinese) [葛伟宽 2002 物理学报 **51** 939]

Form invariance for a constrained system with second-order reducible differential constraints*

Ge Wei-Kuan[1)] Zhang Yi[2)]

[1)] (*Department of Physics, Huzhou Teachers College, Huzhou* 313000, *China*)

[2)] (*Department of Civil Engineering, University of Science and Technology of Suzhou, Suzhou* 215011, *China*)

(Received 5 December 2002; revised manuscript received 10 January 2003)

Abstract

A form invariance for mechanical systems with second-order reducible differential constraints is studied. Two methods to study the form invariance of the systems are used. In the first method, the system is considered as a nonholonomic system with second-order and in the second method it is considered as a system after reduction. The relation between the two methods is obtained. The result proves that it is possible that some symmetries are lost in the second method.

Keywords: constrained mechanical system, differential constraint, reduction, form invariance, conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19972010) and the 'Qing Lan' Project Foundation of Jiangsu Province of China.