第 52 卷 第 9 期 2003 年 9 月
1000-3290/2003/52(09)/2109-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.52, No.9, September, 2003

一类 NLS-mKdV 方程族的扩展可积系统

张玉峰[1)2)] 闫庆友[3)]

[1)] (山东科技大学信息学院数学研究所,泰安 271019)

[2)] (中国科学院数学与系统科学研究院计算数学研究所,北京 100080)

[3)] (山东财政学院经济统计系,济南 250014)

(2002 年 10 月 28 日收到;2002 年 12 月 22 日收到修改稿)

利用代数变换,构造了与文献[5]中的 loop 代数 $\tilde{A}_2$ 的子代数等价的 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的一个子代数 $\bar{A}_1$. 再将 $\bar{A}_1$ 扩展为一个高维的 loop 代数 $\tilde{G}$. 利用 $\tilde{G}$ 设计了一个等谱问题,结合子代数间的直和运算和同构关系,得到了 NLS-mKdV 方程族的一类扩展可积系统. 作为约化情形,求得了著名的 Schrödinger 方程与 mKdV 方程的可积耦合系统.

关键词:loop 代数,可积系统,等谱问题

PACC:0340K,0220,0365G

1. 引 言

寻找尽可能多的可积孤立子方程族是孤立子理论研究中的一项重要而有趣的课题,目前流行的方法是屠规彰格式,简称屠格式. 人们利用屠格式已获得了许多具有重要物理背景的可积方程族,如 AKNS 族、KN 族、TC 族等[1—4]. 为了扩大屠格式的应用范围,郭福奎教授在文献[5]构造了 loop 代数 $\tilde{A}_2$ 的一个子代数,由此建立了 NLS-mKdV 方程族,这无疑为屠格式的应用开辟了一条道路. 但随着可积系统研究的不断深入,人们利用不同手段得到了许多高维可积模型. 如郭福奎教授通过构造 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 上的多个基元($\geqslant 6$)得到了一系列的高维可积模型[6,7]. 楼森岳教授等利用不可逆形变 Miura 变换计算出了具有许多物理背景的高维 Painleve 可积模型[8—13]. 文献[14—18]通过构造几类高维 loop 代数求得了著名的 AKNS 族、TD 族、BPT 族等可积系统的扩展可积系统. 我们发现,所用的高维 loop 代数都是在 2×2loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的子代数基础上扩展而成的. 而文献[5]中的 loop 代数是 3×3 的 $\tilde{A}_2$ 上的一个子代数,显然不能利用文献[14—18]中提供的方法直接将其扩展为一类高维 loop 代数. 因此,为求得 NLS-mKdV 方程族的扩展可积系统,我们先作一个恰当的纯量代数变换,将 loop 代数 $\tilde{A}_2$ 的一个子代数等价地化为 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 上的一个子代数 $\bar{A}_1$,再将 $\bar{A}_1$ 扩展为一类高维 loop 代数,且与文献[14—18]中的任何一个都不同. 利用 loop 代数的子代数间的直和运算与同构关系以及屠格式,求得了 NLD-mKdV 方程族的一类扩展可积模型. 特别地,作为约化情形,得到了著名的 Schrödinger 方程和 mKdV 方程的可积耦合系统.

2. NLS-mKdV 方程族的扩展可积系统

考虑 loop 代数 $\tilde{A}_2$ 的如下子代数[5]:

$$h_\pm=\begin{pmatrix}1&0&\pm 1\\0&-2&0\\\pm 1&0&1\end{pmatrix},$$

$$e_\pm=\begin{pmatrix}0&1&0\\\pm 1&0&\pm 1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$[h_+,h_-]=0,[h_+,e_\pm]=4e_\mp,$$

$$[h_-,e_\pm]=2e_\mp,[e_-,e_+]=2h_+,$$

$$h_\pm(n)=\lambda^n h_\pm,e_\pm(n)=\lambda^n e_\pm,$$

$$\deg(h_\pm(n))=\deg(e_\pm(n))=n. \qquad (1)$$

利用(1)式构造等谱问题

$$\varphi_x=U\varphi,U=\begin{pmatrix}\lambda&q+r&-\lambda\\q-r&-2\lambda&q-r\\-\lambda&q+r&\lambda\end{pmatrix}. \qquad (2)$$

设

$$V=\sum_{m=0}^{\infty}(a_m h_+(-m)+b_m e_+(-m)$$
$$+c_m e_-(-m)),$$

$$V_{+}^{(n)}=\sum_{m=0}^{n}(a_m h_+(n-m)+b_m e_+(n-m)+c_m e_-(n-m)),$$

$$V_{-}^{(n)}=\lambda^n V-V_{+}^{(n)},$$

解零曲率方程 $U_t-V_x^{(n)}+[U,V^{(n)}]=0$,得到 NLS-mKdV 方程族

$$u_{t_n}=JL^n\begin{pmatrix}2\beta q\\-2\beta r\end{pmatrix},\tag{3}$$

其中 $J=\begin{pmatrix}\partial+8r\partial^{-1}r & 8r\partial^{-1}q\\ 8q\partial^{-1}r & -\partial+8q\partial^{-1}q\end{pmatrix}$ 是辛算子,

$$L=\begin{pmatrix}4q\partial^{-1}r & -\frac{1}{2}\partial+4q\partial^{-1}q\\ -\frac{1}{2}\partial-4r\partial^{-1}r & -4r\partial^{-1}q\end{pmatrix}$$

是递推算子,β 是一非零常数.

作为(3)式的约化情形,当 $n=2$ 时,有

$$\begin{cases}q_t=\beta r_{xx}+4\beta r(r^2-q^2),\\ r_t=\beta q_{xx}+4\beta q(r^2-q^2).\end{cases}\tag{4}$$

取 $\beta=\mathrm{i}$,$Q=q+r=r+\mathrm{i}q_1$,这里假设 r 与 q_1 为实数,将(4)式中的两式相加即得非线性的 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}Q_t+q_{xx}+4|Q|^2Q=0.\tag{5}$$

当 $n=3$ 时,有

$$q_t=\frac{\beta}{2}q_{xxx}+6\beta q_x(r^2-q^2),$$

$$r_t=\frac{\beta}{2}r_{xxx}+6\beta r_x(r^2-q^2).\tag{6}$$

取 $q=\mathrm{i}r$,则(6)式约化为著名的 mKdV 方程

$$r_t=\frac{\beta}{2}r_{xxx}+12\beta r_x r^2.\tag{7}$$

记 $h_+=e_1$,$h_-=e_2$,$e_+=e_3$,$e_-=e_4$,设有代数变换 $e_i\to\alpha_i\bar{e}_i$,$\alpha_i(i=1,2,3,4)$ 是待定常数,这里

$$\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\bar{e}_2=2\bar{e}_1,$$

$$\bar{e}_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\bar{e}_4=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},$$

并且有

$$[e_1,e_2]=[\bar{e}_1,\bar{e}_2]=0,$$

$$[e_1,e_3]=\frac{4\alpha_4}{\alpha_1\alpha_3}[\bar{e}_1,\bar{e}_3],$$

$$[e_1,e_4]=\frac{4\alpha_3}{\alpha_1\alpha_4}[\bar{e}_1,\bar{e}_4],$$

$$[e_2,e_3]=\frac{2\alpha_4}{\alpha_2\alpha_3}[\bar{e}_2,\bar{e}_3],$$

$$[e_2,e_4]=\frac{2\alpha_3}{\alpha_2\alpha_4}[\bar{e}_2,\bar{e}_4],$$

$$[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1}{\alpha_3\alpha_4}[\bar{e}_3,\bar{e}_4].$$

解方程

$$\frac{4\alpha_4}{\alpha_1\alpha_3}=2,\ \frac{4\alpha_3}{\alpha_1\alpha_4}=2,\ \frac{2\alpha_4}{\alpha_2\alpha_3}=4,$$

$$\frac{2\alpha_3}{\alpha_2\alpha_4}=4,\ \frac{2\alpha_1}{\alpha_3\alpha_4}=2,$$

得

$$\alpha_1=2,\ \alpha_2=\frac{1}{2},\ \alpha_3=\sqrt{2},\ \alpha_4=\sqrt{2}.$$

于是得到 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的一个子代数 $\bar{A}_1$

$$\tilde{e}_1=2\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\tilde{e}_2=\frac{1}{2}\tilde{e}_1,$$

$$\tilde{e}_3=\sqrt{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \tilde{e}_4=\sqrt{2}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},$$

$$[\tilde{e}_1,\tilde{e}_2]=0,[\tilde{e}_1,\tilde{e}_3]=4\tilde{e}_4,$$

$$[\tilde{e}_1,\tilde{e}_4]=4\tilde{e}_3,[\tilde{e}_2,\tilde{e}_3]=2\tilde{e}_4,$$

$$[\tilde{e}_2,\tilde{e}_4]=2\tilde{e}_3,[\tilde{e}_3,\tilde{e}_4]=-2\tilde{e}_1,$$

$$\tilde{e}_i(n)=\tilde{e}_i\lambda^n,i=1,2,3,4,\deg\tilde{e}_i(n)=n.\tag{8}$$

可见,该子代数与(1)式等价.将(8)式扩展为如下一个新的 loop 代数 $\tilde{G}$:

$$e_1(n)=2\begin{pmatrix}\lambda^n&0&0\\0&-\lambda^n&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ e_2(n)=\frac{1}{2}e_1(n),$$

$$e_3(n)=\sqrt{2}\begin{pmatrix}0&\lambda^n&0\\\lambda^n&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$e_4(n)=\sqrt{2}\begin{pmatrix}0&\lambda^n&0\\-\lambda^n&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$e_5(n)=\begin{pmatrix}0&0&\lambda^n\\0&0&\lambda^n\\0&0&0\end{pmatrix},\ e_6(n)=\begin{pmatrix}0&0&\lambda^n\\0&0&-\lambda^n\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$[e_1(m),e_2(n)]=0,$$

$$[e_1(m),e_3(n)]=4e_4(m+n),$$

$$[e_1(m),e_4(n)]=4e_3(m+n),$$

$$[e_2(m),e_3(n)]=2e_4(m+n),$$

$$[e_2(m),e_4(n)]=2e_3(m+n),$$

$$[e_3(m),e_4(n)]=-2e_1(m+n),$$

$$
\begin{aligned}
&[e_1(m),e_5(n)] = 2e_6(m+n),\\
&[e_2(m),e_5(n)] = e_6(m+n),\\
&[e_3(m),e_5(n)] = \sqrt{2}e_5(m+n),\\
&[e_4(m),e_5(n)] = \sqrt{2}e_6(m+n),\\
&[e_1(m),e_6(n)] = 2e_5(m+n),\\
&[e_2(m),e_6(n)] = e_5(m+n),\\
&[e_3(m),e_6(n)] = -\sqrt{2}e_6(m+n),\\
&[e_4(m),e_6(n)] = \sqrt{2}e_5(m+n),\\
&[e_5(m),e_6(n)] = 0,\\
&\deg e_i(n) = n, i = 1,2,3,4,5,6.
\end{aligned} \tag{9}
$$

注 在(9)式中,之所以取 $e_2(n)=\frac{1}{2}e_1(n)$ 是为了与(1)式中的 h_-, h_+ 的关系相对应.

如果我们记 $\tilde{G}_1=\text{span}\{e_1(n),e_3(n),e_4(n)\}$, $\tilde{G}_2=\text{span}\{e_5(n),e_6(n)\}$,则 $\tilde{G}=\tilde{G}_1 \dotplus \tilde{G}_2$, $[\tilde{G}_1,\tilde{G}_2]\subset\tilde{G}_2$,并且 $\tilde{G}_1$ 同构于 $\overline{A}_1$. 符号 $\dotplus$ 表示直和, span 表示张成的线性空间.

根据(9)式,设计等谱问题

$$
\begin{aligned}
&\psi_x = U\psi,\\
&U = e_2(1)+u_1e_3(0)+u_2e_4(0)\\
&\quad + u_3e_5(0)+u_4e_6(0).
\end{aligned} \tag{10}
$$

设

$$
\begin{aligned}
V = &\sum_{m\geqslant 0}(a_me_1(-m)+b_me_3(-m)+c_me_4(-m)\\
&+d_me_5(-m)+f_me_6(-m)),
\end{aligned}
$$

解静态零曲率方程

$$V_x = [U,V], \tag{11}$$

得递推关系

$$
\begin{aligned}
&a_{mx} = -2u_1c_m+2u_2b_m,\\
&b_{mx} = 2c_{m+1}-4u_2a_m,\\
&c_{mx} = 2b_{m+1}-4u_1a_m,\\
&d_{mx} = f_{m+1}+\sqrt{2}u_1d_m+\sqrt{2}u_2f_m-2u_4a_m\\
&\qquad -\sqrt{2}u_4c_m-\sqrt{2}u_3b_m,\\
&f_{mx} = d_{m+1}-\sqrt{2}u_1f_m+\sqrt{2}u_2d_m-2u_3a_m\\
&\qquad -\sqrt{2}u_3c_m+\sqrt{2}u_4b_m,\\
&b_0 = c_0 = d_0 = f_0 = 0,\\
&a_0 = \beta,\ a_1 = 0, b_1 = 2\beta u_1,\\
&c_1 = 2\beta u_2, d_1 = 2\beta u_3,\\
&f_1 = 2\beta u_4,
\end{aligned} \tag{12}
$$

记

$$
\begin{aligned}
V_+^{(n)} = &\sum_{m=0}^{n}(a_me_1(n-m)+b_me_3(n-m)\\
&+c_me_4(n-m)+d_me_5(n-m)\\
&+f_me_6(n-m)),\\
V_-^{(n)} = &\lambda^nV-V_+^{(n)},
\end{aligned}
$$

则(11)式可写为

$$-V_{+x}^{(n)}+[U,V_+^{(n)}] = V_{-x}^{(n)}-[U,V_-^{(n)}]. \tag{13}$$

可验证(13)式的左端所含基元的阶数(deg)$\geqslant 0$,右端的阶数$\leqslant 0$. 因此,两端的阶数为 0. 于是

$$
\begin{aligned}
-V_{+x}^{(n)}+[U,V_+^{(n)}] = &-(c_{nx}+4qa_n)e_4(0)\\
&-(b_{nx}+4ra_n)e_3(0)\\
&-d_{n+1}e_6(0)-f_{n+1}e_5(0).
\end{aligned}
$$

取 $V^{(n)}=V_+^{(n)}$,则零曲率方程

$$U_t-V_x^{(n)}+[U,V^{(n)}] = 0$$

确定可积系

$$
\begin{aligned}
u_{t_n} &= \begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{pmatrix}_{t_n} = \begin{pmatrix} b_{nx}+4ra_n\\ c_{nx}+4qa_n\\ f_{n+1}\\ d_{n+1}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \partial+8u_2\partial^{-1}u_2 & 8u_2\partial^{-1}u_1 & 0 & 0\\ 8u_1\partial^{-1}u_2 & -\partial+8u_1\partial^{-1}u_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&\quad \begin{pmatrix} b_n\\ -c_n\\ d_{n+1}\\ f_{n+1}\end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} b_n\\ -c_n\\ d_{n+1}\\ f_{n+1}\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

根据(12)式得递推算子

$$
L = \begin{pmatrix} 4u_1\partial^{-1}u_2 & -\frac{1}{2}\partial+4u_1\partial^{-1}u_1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2}\partial-4u_2\partial^{-1}u_2 & -4u_2\partial^{-1}u_1 & 0 & 0\\ A & -B & -\sqrt{2}u_2 & \partial+\sqrt{2}u_1\\ C & -D & \partial-\sqrt{2}u_1 & -\sqrt{2}u_2\end{pmatrix},
$$

其中

$$A=(\sqrt{2}u_3-4u_3\partial^{-1}u_1)\left(\frac{1}{2}\partial+4u_2\partial^{-1}u_2\right)+4(-\sqrt{2}u_4+4u_3\partial^{-1}u_2)u_1\partial^{-1}u_2,$$

$$B=-4(\sqrt{2}u_3-4u_3\partial^{-1}u_1)u_2\partial^{-1}u_1+(-\sqrt{2}u_4+4u_3\partial^{-1}u_2)\left(\frac{1}{2}\partial+4u_1\partial^{-1}u_1\right),$$

$$C=(\sqrt{2}u_4-4u_4\partial^{-1}u_1)\left(\frac{1}{2}\partial+4u_2\partial^{-1}u_2\right)+4(\sqrt{2}u_3+4u_4\partial^{-1}u_2)u_1\partial^{-1}u_2,$$

$$D=4(-\sqrt{2}u_4+4u_4\partial^{-1}u_1)u_2\partial^{-1}u_1+(\sqrt{2}u_3+4u_4\partial^{-1}u_2)\left(\frac{1}{2}\partial-4u_1\partial^{-1}u_1\right).$$

于是(14)式可写为

$$u_{t_n}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}_{t_n}=JL^n\begin{pmatrix}2\beta u_1\\-2\beta u_2\\2\beta u_3\\2\beta u_4\end{pmatrix}. \tag{15}$$

当取 $u_1=q$，$u_2=r$，$u_3=u_4=0$ 时，(15)式就约化为 NLS-mKdV 方程族(3).因此，可积系统(15)是(3)式的一类扩展可积系统.根据可积耦合的定义[19—22]知，(15)式也是(3)式的可积耦合系统.作为约化情形，考虑两种情形.

情形 1 在(15)式中，取 $n=2$ 得

$$u_{1t}=\beta u_{2xx}+4\beta u_2(u_2^2-u_1^2),$$

$$u_{2t}=\beta u_{1xx}+4\beta u_1(u_2^2-u_1^2),$$

$$u_{3t}=2\beta u_{3xx}+\sqrt{2}\beta u_1u_{3x}+\sqrt{2}\beta(u_1u_3)_x-\sqrt{2}\beta(u_2u_4)_x-\sqrt{2}\beta u_2u_{4x}+2\beta u_3(u_2^2-u_1^2),$$

$$u_{4t}=2\beta_{4xx}+\sqrt{2}\beta(u_4u_{1x}-2u_1u_{4x})+\sqrt{2}\beta(u_3u_{2x}-2u_2u_{3x})+2\beta u_4(u_2^2-u_1^2). \tag{16}$$

在(16)式中，取 $\beta=\mathrm{i}$，$Q=u_2+u_1=u_2+\mathrm{i}\tilde{u}_1$，其中 $\tilde{u}_1$，u_2 为实函数.将(16)式的前二项相加得到 Schrödinger 方程的可积耦合系统

$$\mathrm{i}Q_t+Q_{xx}+4Q|Q|^2=0,$$

$$u_{3t}=2\beta u_{3xx}+\sqrt{2}\beta u_1u_{3x}+\sqrt{2}\beta(u_1u_3)_x-\sqrt{2}\beta(u_2u_4)_x-\sqrt{2}\beta u_2u_{4x}+2\beta u_3|Q|^2,$$

$$u_{4t}=2\beta u_{4xx}+\sqrt{2}\beta(u_4u_{1x}-2u_1u_{4x})+\sqrt{2}\beta(u_3u_{2x}-2u_2u_{3x})+2\beta u_4|Q|^2.$$

情形 2 在(15)式中，取 $n=3$ 并且令 $u_1=\mathrm{i}u_2$，$u_2=u$，得到 mKdV 方程的扩展可积耦合系统

$$u_t=\frac{\beta}{2}u_{xxx}+12\beta u^2u_x,$$

$$\begin{aligned}u_{3t}=\;&2\beta u_{3xxx}+\sqrt{2}\beta\mathrm{i}(2uu_{3x}+u_3u_x)_x-\sqrt{2}\beta(2uu_{4x}+u_xu_4)_x\\&+4\beta(u^2u_3)_x-2\sqrt{2}\beta\mathrm{i}uu_{3xx}+2\beta u^2u_{3x}\\&+2\beta\mathrm{i}u(uu_4-\mathrm{i}uu_3)_x+6\beta\mathrm{i}u^2u_{4x}-2\sqrt{2}\beta uu_{4xx}\\&-2\beta uu_xu_3+4\beta u^2u_{3x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\beta(u_4u_{xx}+\mathrm{i}u_3u_{xx}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{4t}=\;&2\beta u_{4xxx}+\sqrt{2}\beta(\mathrm{i}u_xu_4+u_xu_3-2iuu_{4x}-2uu_{3x})_x\\&+4\beta(u^2u_4)_x+2\sqrt{2}\beta\mathrm{i}uu_{4xx}-2\beta uu_xu_4\\&+6\beta u^2u_{4x}-6\beta u^2u_{3x}+4\sqrt{2}\beta\mathrm{i}u_3-2\sqrt{2}\beta uu_{3xx}\\&-2\beta\mathrm{i}u(uu_3)_x+2\beta u(uu_4)_x+2\beta\mathrm{i}uu_xu_3\\&+\frac{\sqrt{2}}{2}\beta(u_3u_{xx}-\mathrm{i}u_{xx}u_4-2iu^3u_4).\end{aligned}$$

作者对胡星标教授、郭福奎教授和范恩贵博士的热情指导和帮助深表感谢！

[1] Tu G Z 1989 *J. Math. Phys.* **30** 330
[2] Fan E G 2000 *J. Math. Phys.* **41** 7769
[3] Hu X B 1997 *J. Phys. A*:*Math. Gen.* **30** 619
[4] Fan E G 2001 *Phys.* A **301** 105
[5] Guo F K 1997 *Acta Math. Sin.* **40** 801(in Chinese)[郭福奎 1997 数学学报 **40** 801]
[6] Guo F K 1999 *Acta Math. Phys.* **19** 507(in Chinese)[郭福奎 1999 数学物理学报 **23** 507]
[7] Guo F K 2000 *Acta Math. Appl. Sin.* **23** 181(in Chinese)[郭福奎 2000 应用数学学报 **23** 181]
[8] Lou S Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1657(in Chinese)[楼森岳 2000 物理学报 **49** 1657]
[9] Lin J，Wang K L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 13(in Chinese)[林机、汪克林 2001 物理学报 **50** 13]
[10] Lou S Y，Xu J J 1999 *Chin. Phys.* **8** 280
[11] Ruan H Y，Chen Y X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 577(in Chinese)[阮航宇、陈一新 2001 物理学报 **50** 577]
[12] Chen L L and Lou S Y 1999 *Chin. Phys.* **8** 285
[13] Ruan H Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 87
[14] Zhang Y F and Zhang H Q 2002 *J. Math. Phys.* **43** 1

[15] Zhang Y F, Zhang H Q and Yan Q Y 2002 *Phys. Lett.* A **299** 543

[16] Zhang Y F and Yan Q Y 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **16** 263

[17] Guo F K and Zhang Y F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 951 (in Chinese) [郭福奎、张玉峰 2002 物理学报 **51** 951]

[18] Zhang Y F, Yan Q Y and Zhang H Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 5 (in Chinese) [张玉峰、闫庆友、张鸿庆 2003 物理学报 **52** 5]

[19] Ma W X and Fuchssteiner B 1996 *Phys. Lett.* A **213** 49

[20] Ma W X *et al* 1996 *Nuovo Cimeto* B **111** 1135

[21] Ma W X 2000 *Methods Appl. Anal.* **1** 21

[22] Ma W X and Fuchssteiner B 1996 *Chao, Solitons and Fractals* **8** 1227

A type of expanding integrable system for NLS-mKdV hierarchy

Zhang Yu-Feng[1)2)] Yan Qing-You[3)]

[1)] (*Institute of Mathematics, Information School, Shandong University of Science and Technology, Taian* 271019, *China*)

[2)] (*Institute of Computational Mathematics, Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*)

[3)] (*Department of Economical and Statistics, Shandong Finance College, Tinan* 250014, *China*)

(Received 28 October 2002; revised manuscript received 22 December 2002)

Abstract

A subalgerbra $\bar{A}_1$, which is equivalent to the subalgebra of the loop algebra $\tilde{A}_2$ in "1997 *Acta Math. Sin.* **40** 801", is constructed by making use of algebraic transformation. Then a high-dimensional loop algebra $\tilde{G}$ is presented in terms of $\bar{A}_1$. An isospectral problem is established following $\tilde{G}$ by the use of direct sum operators and isomorphic relations among subalgebras. It follows that a type of expanding integrable system for the NLS-mKdV hierarchy of evolution equations is obtained. As in reduction cases, the integrable couplings of the famous Schrödinger equation and mKdV equation are presented.

Keywords: loop algebra, integrable system, isospectral problem

PACC: 0340K, 0220, 0365G