

高斯光束通过多光阑 $B = 0$ 成像系统 传输的解析公式研究*

季小玲^{1,2)} 吕百达²⁾

¹⁾ 四川师范大学电子工程学院, 成都 610066)

²⁾ 四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

(2002 年 11 月 22 日收到; 2003 年 1 月 2 日收到修改稿)

采用将硬边光阑窗口函数展开为有限个复高斯函数之和的方法和 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ 矩阵分解的技巧, 推导出了高斯光束通过多光阑 $B = 0$ 光学成像系统解析的传输公式, 并用典型数值计算例加以说明. 最后, 指出了所用方法的优点.

关键词: 硬边光阑, 复高斯函数, 传输方程, 矩阵分解

PACC: 4200

1. 引 言

变换矩阵元 $B = 0$ 的成像光学系统已获得了广泛的实际应用. 例如, 信息光学中的相干滤波系统. 特别是, 在激光核聚变驱动器中按 $B = 0$ 逐级排布光路, 可以实现有效的像传递, 改善光束质量. 这类光学系统实际上可等效为含有多个光阑 $B = 0$ 的成像系统. 使用 Collins 公式^[1], 对光束在无光阑 $B = 0$ 的近轴 $ABCD$ 光学系统中实现像传递的原理在物理上是容易理解的^[2]. 当受到硬边光阑限制时, 解析地研究硬边衍射光束的传输行为一般遇到困难. Vicori 和 Blois^[3] 对多光阑 $ABCD$ 光学系统中的光束传输作了研究, 在特殊情况下, 得到了解析结果, 但需将硬边光阑表示为 200×200 阶矩阵的复杂形式, 不便应用. 实际工作中, 对多光阑 $B = 0$ 光学系统中光传输的计算模拟需要用 Collins 公式作数值积分, 耗时很多, 也难于进行直观的物理分析. 本文采用将硬边光阑窗口函数展开为有限个复高斯函数之和的方法^[4]和 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ 矩阵分解的技巧, 推导出了高斯光束通过多光阑 $B = 0$ 复杂光学系统解析的传输公式, 所得结果具有一般性, 并以高斯光束在含多级硬边光阑空间滤波器的传输为说明公式的应用. 给出

了典型的数值计算结果. 最后, 还对本文所得结果的进一步推广作了讨论.

2. 传输方程

2.1. 一个光阑的光学成像系统

设束腰宽度为 w_0 的高斯光束入射到 $z = 0$ 处的硬边光阑的 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ 成像光学系统, 在入射参考面 RP_m 处, 高斯光束的场分布为

$$E_0(x, 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{w_0}\right). \quad (1)$$

半宽为 a 的硬边光阑的窗口函数为

$$\text{rec}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a, \\ 0 & |x| > a. \end{cases} \quad (2)$$

将 (2) 式表示的矩孔函数可展为复高斯函数之和^[4]

$$\text{rec}(x) = \sum_{j=1}^M F_j \exp\left(-\frac{G_j x^2}{a^2}\right), \quad (3)$$

式中 F_j 和 G_j 分别为展开系数和复高斯函数系数, 它们可由计算机优化得到. 当 $M = 10$ 时, F_j 和 G_j 取值见文献 [4].

使用将硬边光阑窗口函数展为 (3) 式的优点是得到解析的传输公式. 但对 $B = 0$ 的光学系统,

* 国防科技预研项目(批准号: A823070)和四川省教育厅自然科学基金(批准号: 2002A089)资助的课题.

直接积分 Collins 公式会遇到积分表示式中分母为零的困难. 为此, 利用矩阵分解技巧, 将系统的变换

矩阵 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ 分解为

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

(4) 式的分解有多种方式, 但必须满足 $B_1 \neq 0$. 例如, 可等效为如图 1 所示系统. 即

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_2}{f_2} & l_2 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_1}{f_1} & l_1 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \quad (5) \end{aligned}$$

式中 f_1 和 f_2 分别为两透镜 L_1 和 L_2 的焦距, l_1 和 l_2 分别为 L_1 与 L_2 和 L_2 与像面 RP_2 的间距. 当 $B =$

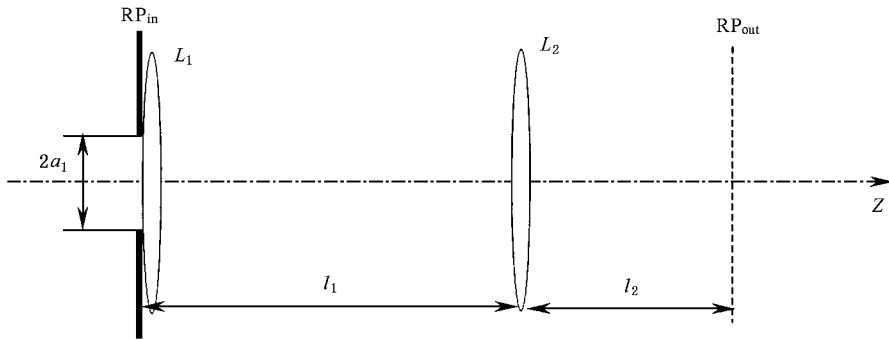


图 1 变换矩阵为 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ 带硬边光阑的成像光学系统

0 时, 应满足

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{1}{f_2}. \quad (6)$$

由 Collins 公式^[1], 波长为 λ (波数为 $k = 2\pi/\lambda$)

的高斯光束通过受光阑限制的 $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$ 光学系统

(光阑半宽为 a_1) 的光场分布为

$$\begin{aligned} E_1(x, z) &= \sqrt{\frac{ik}{2\pi B_1}} \exp\left(-\frac{ikD_1}{2B_1} x^2\right) \int_{-a}^a E_0(x_0, 0) \\ &\times \exp\left(-\frac{ik}{2B_1}(A_1 x_0^2 - 2xx_0)\right) dx_0 \quad (7) \end{aligned}$$

将 (1) (3) 两式代入 (7) 式, 并利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(P^2 x^2 + Qx)] dx = \frac{\sqrt{\pi}}{P} \exp\left(\frac{Q^2}{4P^2}\right) \quad (8)$$

得到

$$\begin{aligned} E_1(x, z) &= \sqrt{\frac{ik}{2\pi B_1}} \exp\left(-\frac{ikD_1}{2B_1} x^2\right) \\ &\times \sum_{j_1=1}^M F_{j_1} \frac{\sqrt{\pi}}{P_1} \exp\left(-\frac{k^2}{4B_1^2 P_1^2} x^2\right), \quad (9) \end{aligned}$$

式中

$$P_1^2 = \frac{1}{w_0^2} + ik \frac{A_1}{2B_1} + \frac{G_{j_1}}{a_1^2}. \quad (10)$$

若 $B_2 \neq 0$ 利用 Collins 公式, 得到高斯光束通过无光

阑限制 $\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$ 光学系统后的场分布为

$$\begin{aligned} E_2(x, z) &= \sqrt{\frac{ik}{2\pi B_1}} \sqrt{\frac{ik}{2\pi B_2}} \exp\left(-\frac{ikD_2}{2B_2} x^2\right) \\ &\times \sum_{j_1=1}^M F_{j_1} \frac{\pi}{P_1 P_2} \exp\left(-\frac{k^2}{4B_2^2 P_2^2} x^2\right) \quad (11) \end{aligned}$$

式中

$$P_2^2 = \frac{k^2}{4B_1^2 P_1^2} + ik \frac{A^2}{2B_2} + ik \frac{D_1}{2B_1}. \quad (12)$$

(11) 式即为高斯光束通过有一个硬边光阑 $B = 0$ 复杂光学系统的解析传输公式. 它给出了场分布与硬边光阑参数 F_{j_1}, G_{j_1}, M , 光束参数和传输矩阵元的依赖关系. 若 $B_2 = 0$, 则利用复杂成像光学系统的像传递公式计算高斯光束通过无光阑限制

$\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$ 光学系统后的场分布. 下面设 $B_n \neq 0$ ($n =$

1 2 3 ...) 进行公式推导.

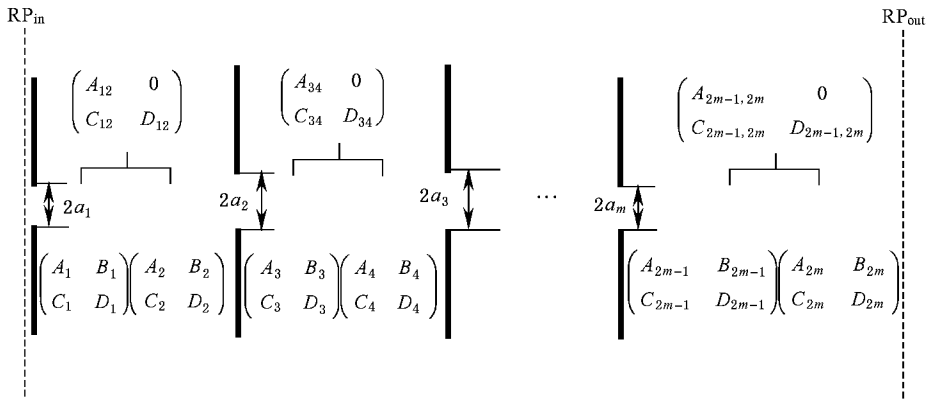


图 2 多光阑成像光学系统

2.2. 多个光阑的成像光学系统

如图 2 所示, m 个光阑的成像光学系统 ($m=2, 3, 4, \dots$). 设多个光阑的成像光学系统各光阑半宽依次为 a_1, a_2, \dots, a_m , 相邻两光阑间的成像系统矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{2n-1, 2n} & 0 \\ C_{2n-1, 2n} & D_{2n-1, 2n} \end{pmatrix} \quad (n=1, 2, \dots, m)$$

均分解为两个光学系统矩阵 $\begin{pmatrix} A_{2n-1} & B_{2n-1} \\ C_{2n-1} & D_{2n-1} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} A_{2n} & B_{2n} \\ C_{2n} & D_{2n} \end{pmatrix}$. 同理,

利用 Collins 公式和积分公式(8), 得到高斯光束通过第 m 个硬边成像光学系统传输的递推公式为

$$\begin{aligned} E_{2m-1} &= \sqrt{\frac{ik}{2\pi B_1}} \cdots \sqrt{\frac{ik}{2\pi B_{2m-1}}} \exp\left(-\frac{ikD_{2m-1}}{2B_{2m-1}}x^2\right) \\ &\times \sum_{j_1=1}^M F_{j_1} \frac{\pi}{P_1 P_2} \cdots \sum_{j_{m-1}=1}^M F_{j_{m-1}} \frac{\sqrt{\pi}}{P_{2m-1}} \\ &\times \exp\left(-\frac{k^2}{4B_{2m-1}^2 P_{2m-1}^2}x^2\right), \\ E_{2m} &= \sqrt{\frac{ik}{2\pi B_1}} \cdots \sqrt{\frac{ik}{2\pi B_{2m}}} \exp\left(-\frac{ikD_{2m}}{2B_{2m}}x^2\right) \\ &\times \sum_{j_1=1}^M F_{j_1} \frac{\pi}{P_1 P_2} \cdots \sum_{j_m=1}^M F_{j_m} \frac{\pi}{P_{2m-1} P_{2m}} \\ &\times \exp\left(-\frac{k^2}{4B_{2m}^2 P_{2m}^2}x^2\right), \end{aligned} \quad (13)$$

式中

$$\begin{aligned} P_{2m-1}^2 &= \frac{k^2}{4B_{2m-2}^2 P_{2m-2}^2} + ik \frac{A_{2m-1}}{2B_{2m-1}} \\ &+ ik \frac{D_{2m-2}}{2B_{2m-2}} + \frac{G_{j_m}}{a_m^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{2m}^2 &= \frac{k^2}{4B_{2m-1}^2 P_{2m-1}^2} + ik \frac{A_{2m}}{2B_{2m}} \\ &+ ik \frac{D_{2m-1}}{2B_{2m-1}}. \end{aligned} \quad (14)$$

2.3. 多级空间滤波器

如图 3 所示 m 级空间滤波器, 入射光阑半宽为 a , 各级空间滤波器小孔半宽为 b_j ($j=1, 2, \dots, m$), 第 j 级空间滤波器两透镜 L_{j1} 和 L_{j2} 的焦距分别为 f_{j1} 和 f_{j2} , L_{j1} 与其物面、 L_{j2} 与其像面的间距分别为 d_{j1} 和 d_{j2} . 若要满足空间滤波器逐次成像, 则第 j 级空间滤波器应满足

$$M_j d_{j1} + \frac{d_{j2}}{M_j} + f_{j1} + f_{j2} = 0, \quad (15)$$

其中

$$M_j = -\frac{f_{j2}}{f_{j1}}. \quad (16)$$

类似地, 利用 Collins 公式和积分公式(8), 可得到高斯光束通过受光阑限制的 $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$ 光学系统的场分布为

$$\begin{aligned} E_1(x, z) &= \sqrt{\frac{ik}{2\pi B_1}} \exp\left(-\frac{ikD_1}{2B_1}x^2\right) \sum_{j_0=1}^M F_{j_0} \\ &\times \frac{\sqrt{\pi}}{P_1} \exp\left(-\frac{k^2}{4B_1^2 P_1^2}x^2\right), \end{aligned} \quad (17)$$

式中

$$P_1^2 = \frac{1}{w_0^2} + ik \frac{A_1}{2B_1} + \frac{G_{j_0}}{a^2}. \quad (18)$$

高斯光束通过受光阑限制的 $\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}$ 后的衍射光场分布为

$$E_2(x, z) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi B_1}} \sqrt{\frac{ik}{2\pi B_2}} \exp\left(-\frac{ikD_2}{2B_2} x^2\right) \sum_{j_0=1}^M F_{j_0} \times \frac{\sqrt{\pi}}{P_1} \sum_{j_1=1}^M F_{j_1} \frac{\sqrt{\pi}}{P_2} \exp\left(-\frac{k^2}{4B_2^2 P_2^2} x^2\right), \quad (19)$$

式中

$$P_2^2 = \frac{k^2}{4B_1^2 P_1^2} + ik \frac{A_2}{2B_2} + ik \frac{D_1}{2B_1} + \frac{G_{j_1}}{b_1^2}. \quad (20)$$

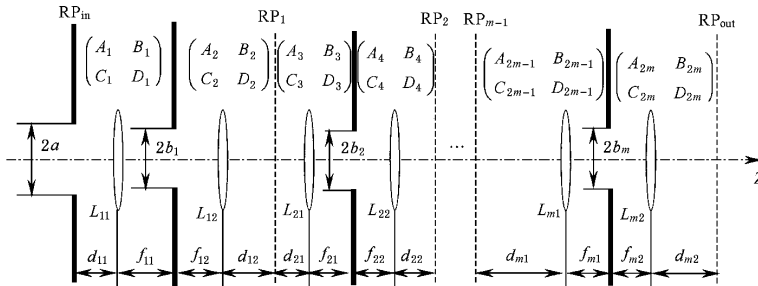


图 3 多级空间滤波器系统

同理,得到高斯光束通过第 m 级空间滤波器传输的递推公式为

$$E_{2m-1} = \sqrt{\frac{ik}{2\pi B_1}} \cdots \sqrt{\frac{ik}{2\pi B_{2m-1}}} \exp\left(-\frac{ikD_{2m-1}}{2B_{2m-1}} x^2\right) \times \sum_{j_0=1}^M F_{j_0} \frac{\sqrt{\pi}}{P_1} \sum_{j_1=1}^M F_{j_1} \frac{\pi}{P_2 P_3} \cdots \times \sum_{j_{m-1}=1}^M F_{j_{m-1}} \frac{\pi}{P_{2m-2} P_{2m-1}} \exp\left(-\frac{k^2}{4B_{2m-1}^2 P_{2m-1}^2} x^2\right),$$

$$E_{2m} = \sqrt{\frac{ik}{2\pi B_1}} \cdots \sqrt{\frac{ik}{2\pi B_{2m}}} \exp\left(-\frac{ikD_{2m}}{2B_{2m}} x^2\right) \times \sum_{j_0=1}^M F_{j_0} \frac{\sqrt{\pi}}{P_1} \sum_{j_1=1}^M F_{j_1} \frac{\pi}{P_2 P_3} \cdots \times \sum_{j_{m-1}=1}^M F_{j_{m-1}} \frac{\pi}{P_{2m-2} P_{2m-1}} \sum_{j_m=1}^M F_{j_m} \frac{\sqrt{\pi}}{P_{2m}} \times \exp\left(-\frac{k^2}{4B_{2m}^2 P_{2m}^2} x^2\right), \quad (21)$$

式中

$$P_{2m-1}^2 = \frac{k^2}{4B_{2m-2}^2 P_{2m-2}^2} + ik \frac{A_{2m-1}}{2B_{2m-1}} + ik \frac{D_{2m-2}}{2B_{2m-2}},$$

$$P_{2m}^2 = \frac{k^2}{4B_{2m-1}^2 P_{2m-1}^2} + ik \frac{A_{2m}}{2B_{2m}} + ik \frac{D_{2m-1}}{2B_{2m-1}} + \frac{G_{j_m}}{b_m^2}. \quad (22)$$

3. 数值计算及分析

数值计算中取 $\lambda = 1.06\mu\text{m}$, $w_0 = 1\text{mm}$. 典型计算结果如图 4、图 5 实线所示. 图 4 为不同截断比 a/w_0 情况下像面处光强分布. 光学系统矩阵元 $A = -5$,

$B = 0$, $C = -0.8\text{m}^{-1}$, $D = -0.2$, 它可等效为图 1 所示的光学系统, 其各参数为 $f_1 = f_2 = 1.0\text{m}$, $l_1 = 1.2\text{m}$, $l_2 = 6.0\text{m}$. 从图 4 可以看出, 随着截断比的减小, 光场的空间高频分量增加. 数值计算表明, 当 $a_1/w_0 \geq 2.1$ 时, 光阑效应可以忽略. 图 5 是高斯光束通过一级空间滤波器前后的光强分布. 空间滤波器系统各参数为 $f_{11} = f_{12} = 1.0\text{m}$, $d_{11} = 0.2\text{m}$, $d_{12} = 1.8\text{m}$, $a = 1.0\text{mm}$, 其对应系统矩阵元 $A = -1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -1$. 图 5(a) 为第一个光阑之后 $d_{11} = 0.2\text{m}$ 处的光强分布. 图 5(b)(c) 为不同的空间滤波小孔尺寸下滤波后像面处光强分布. 图 5(b) 中, 小孔半宽 $b_1 = 4.0\text{mm}$, 对应的截止频率^[5] $\nu = \frac{2\pi b_1}{\lambda f_{11}} = 23.7\text{mm}^{-1}$, 小孔能滤去空间波长小于 $s = \frac{\lambda f_{11}}{b_1} = 0.265\text{mm}$ 的空间调制尺寸. 图 5(c) 中, $b_1 = 0.4\text{mm}$, 截止频率 $\nu = 2.37\text{mm}^{-1}$, 小孔能滤去空间波长小于 $s = 2.65\text{mm}$ 的空间调制尺寸. 可以看出, 随着空间滤波器小孔半宽的减小, 光场中的空间高频分量逐渐被滤去, 但却要以损失能量为代价.

图中也给出了先将矩阵分解(按 4 式), 再直接用 Collins 公式计算的结果, 如圆圈所示. 可以看出, 实线和圆圈符合得很好. 说明用硬边光阑窗口函数展开为有限个复高斯函数的方法得到的解析公式可以足够好地描述高斯光束通过多光阑 $B = 0$ 成像系统的光强分布. 使用这一方法产生的计算误差是由有限个复高斯函数之和作的拟合曲线与光阑窗口函数间的差异造成的, 在近场计算误差较大, 对于远场 ($B = 0$), 计算误差是很小的^[4].

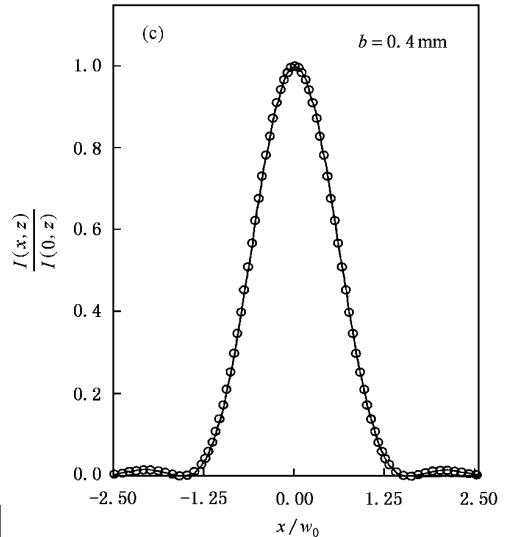
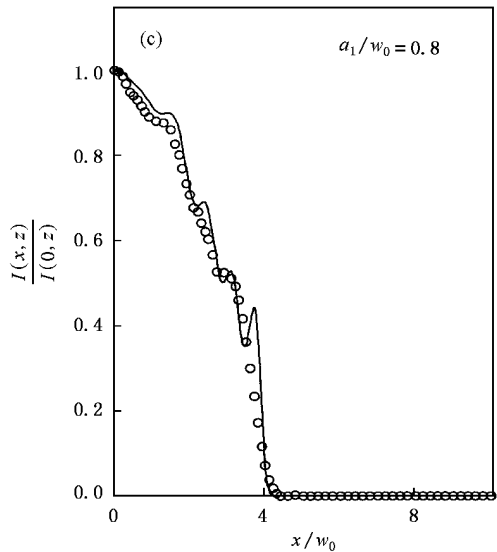
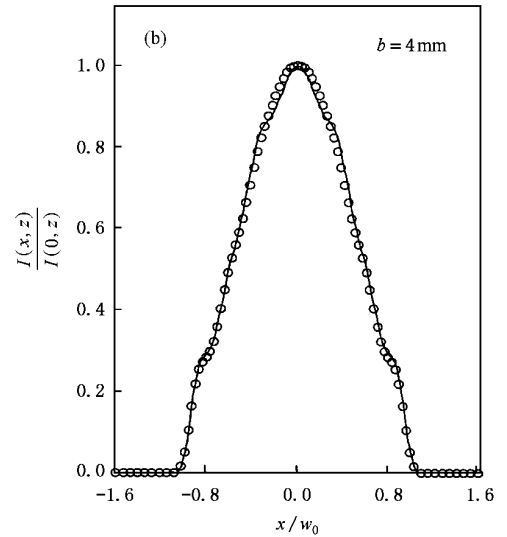
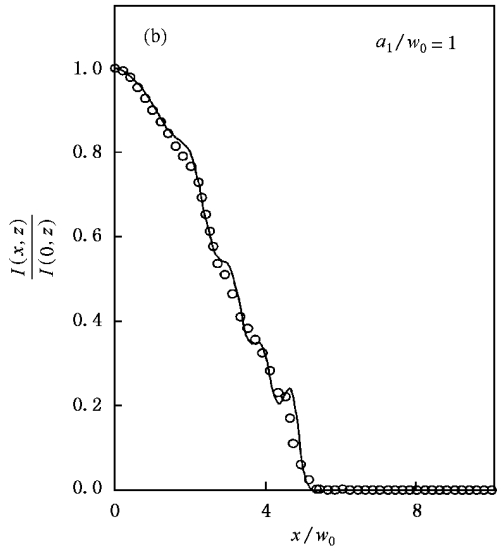
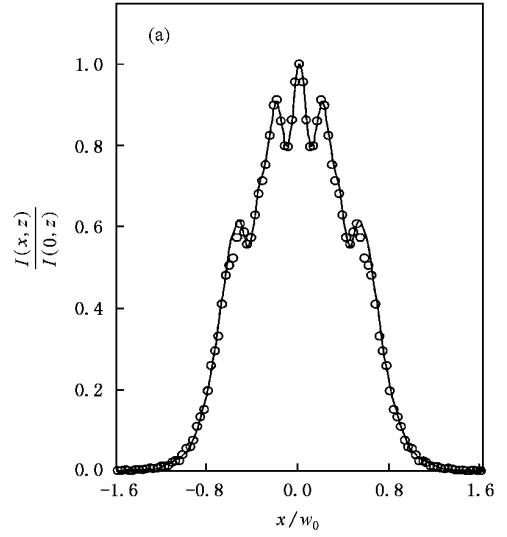
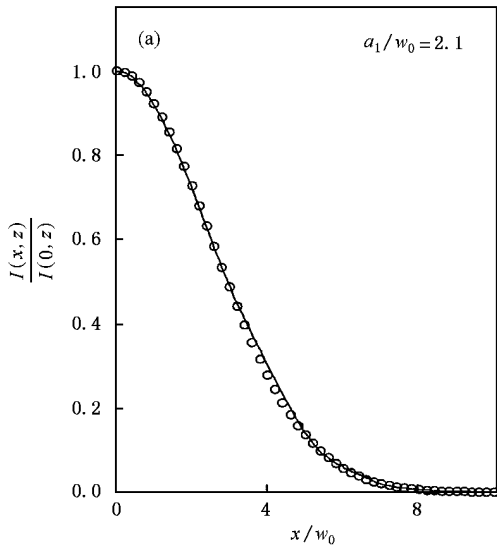


图4 不同遮阑比 a_1/w_0 情况下,高斯光束通过成像系统后的光强分布(—为用(11)式, $\circ\circ\circ$ 为用 Collins 公式数值积分)



图5 滤波小孔半径不同情况下,高斯光束通过空间滤波器后的光强分布($a = 1.0 \text{ mm}$) (a)第一个光阑之后 $d_{11} = 0.2 \text{ m}$ 处 (b)(c)滤波后像面处(—为用(19)式, $\circ\circ\circ$ 为用 Collins 公式数值积分)

4. 结 论

本文对高斯光束通过多光阑光学成像系统的传输作了详细研究. 采用将硬边光阑窗口函数展开为有限个复高斯函数之和的方法和将 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ 矩阵分解的技巧, 推导出了高斯光束通过多光阑 $B=0$ 光学成像系统解析的传输公式, 并用数值计算例加以说明. 研究表明, 硬边光阑要影响 $B=0$ 像面上的光强分布, 这与不考虑硬边光阑效应的 $B=0$ 像传递情况是不同的. 对本文所关心 $B=0$, 即远场情况, 利用(3)式推出的解析公式与直接积分 Collins 公式得到的数值计算结果一致. 所得解析公式优点是: 1) 便于利用解析式研究光学系统和光束参数对传输的影响; 2) 大为节约机时, 这一优点对复杂大型光学系统

(例如, 激光核聚变驱动器) 中光传输计算最为显著. 例如, 图 4(b) 机时比为 1660:1, 图 5(b) 机时比为 2412:1. 在计算例中仅包含一个和两个光阑, 当随着光阑数的增加机时比会急剧增加. 与文献[3]相比较, 本文得出的解析公式比 200×200 阶矩阵方程简单得多, 计算量也大为减少. 为说明主要物理问题, 本文所作计算是以二维高斯光束情况进行的, 但不难推广到三维高斯光束. 这一方法的意义还在于可以推广用于其他类型光束, 例如, 平顶高斯光束通过多光阑成像光学系统的传输特性研究(将另文发表)对 $B=0$ 复杂光学系统光传输的计算模拟有实际应用意义.

本文作者对与上海光机所林尊祺、庄大奎教授就有硬边光阑复杂光学系统中光传输问题进行的有益讨论表示衷心的感谢.

[1] Collins S A 1970 *J. Opt. Soc. Am.* A **60** 1168

[2] Lü B 1999 *Propagation and Control of High-power Lasers* (Beijing: National Defense Industrial Press) p23

[3] Vicori L and Bloisi F 1989 *Appl. Opt.* **28** 4682

[4] Wen J J and Breazeale M A 1998 *J. Acoust. Soc. Am.* **83** 1752

[5] Zhang B and Lü B D 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1 (in Chinese) [张彬、吕百达 1998 物理学报 **47** 1]

Studies on the analytical propagation equations of Gaussian beams through a multi-apertured imaging system of $B=0$ *

Ji Xiao-Ling^{1,2)} Lü Bai-Da²⁾

¹⁾ College of Electronic Engineering, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

²⁾ Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

(Received 22 November 2002; revised manuscript received 2 January 2003)

Abstract

By using the method of matrix decomposition and expanding the aperture function into a finite sum of complex Gaussian functions, the closed-form propagation equations of Gaussian beams through a multi-apertured imaging system of $B=0$ are derived and are illustrated with a few typical numerical examples. The advantages of our treatment are pointed out.

Keywords: hard-edged aperture, complex Gaussian function, propagation equation, matrix decomposition

PACC: 4200

* Project supported by the Chinese Defence Advance Research Program (Grant No. A823070) and the Natural Science Foundation of Education Bureau of Sichuan Province, China (Grant No. 2002A089).