

超短强激光脉冲在等离子体隧道中 传输的理论及数值模拟研究^{*}

唐 华 郭 弘[†] 刘明伟 仇云利 邓冬梅

(华南师范大学传输光学实验室 广州 510631)

(2002 年 11 月 4 日收到 2002 年 12 月 22 日收到修改稿)

研究了超短强激光脉冲在非扰动抛物型部分电离的预等离子体隧道中的传输特性. 从 Maxwell 方程出发得到了两个包含衍射、三阶强度非线性、等离子体散焦、等离子体隧道聚焦以及相对论自聚焦等效应在内的激光场演化方程, 即折射率方程和哈密顿-雅可比方程. 在此基础上得到了激光在等离子体隧道中传输的包络方程以及光斑半径与传输距离、隧道宽度等初始参量的关系.

关键词: 等离子体隧道聚焦, 相对论自聚焦, 势阱

PACC: 4265J, 5240D, 5260

1. 引 言

超短强激光脉冲的传输在 x 射线激光、激光尾波场加速电子、高次谐波的产生及惯性约束聚变中的快点火等方面都有广泛应用, 而所有这些应用都希望激光在介质中可以传输更远的距离. 在这一领域中, 科研工作者已经做了大量解析、数值模拟和实验的工作^[1,2]. 对诸多物理现象和非稳定性也进行了深入的研究, 如自相位调制^[3-7]、自陡峭、成丝^[5-7]、群速度色散(GVD)、有限脉宽效应^[8]、有质动力自通道、等离子体波^[9,10]以及相对论效应等等. 尽管如此, 自聚焦现象在传输中依然起着非常重要的作用. 在本文的传输分析中, 将包括三阶强度非线性及与相对论因子 $\gamma = \sqrt{1 + \alpha^2}$ ($\alpha = 8.5 \times 10^{-10} I^{1/2} \lambda_0$ ($W^{1/2} \mu m/cm^2$)) 相关的相对论自聚焦. 通过一个包括衍射、三阶强度非线性、相对论自聚焦、等离子体散焦以及等离子体隧道聚焦效应在内的新势阱, 得到激光在等离子体隧道中传输的包络方程、自聚焦的总临界功率和隧道自波导的电子密度宽度. 同时得到了光斑半径与传输距离、激光入射偏角、隧道参数等物理量的关系. 这些结果可以应用于对激光脉冲在等离子体隧道中长距离传输的进一步研究.

2. 传输方程的推导

从 Maxwell 方程可以得到超短强激光脉冲在等离子体中的传输方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}\right), \quad (1)$$

其中 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 是电场强度, \mathbf{P} 是由束缚电子产生的极化强度, \mathbf{J} 是由自由电子运动产生的等离子体电流密度. 设电场为沿 x 方向极化的线偏振场, 形式为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{ik_0 z - i\omega_0 t} \mathbf{e}_x + \text{c.c.} \quad (2)$$

下面从方程 (1) 和 (2) 出发推导折射率方程和哈密顿-雅可比方程.

2.1. 折射率方程

极化强度和等离子体电流密度可以分为线性和非线性两部分来处理. 线性的极化强度和等离子体电流密度满足

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}_L}{\partial t^2} = -\frac{\omega_0^2}{4\pi} (\eta_L^2 - 1) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

和

$$\frac{\partial \mathbf{J}_L}{\partial t} = \frac{\omega_{pe}^2}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

^{*} 国家自然科学基金重点项目(批准号: 69789801)、国家高技术 863 计划惯性约束聚变委员会、霍英东基金(批准号: 71058)、广东省自然科学基金团队项目(批准号: 20003061)、国家教育部骨干教师基金资助课题.

[†] 通信作者. 电话: 020-85216522(O), E-mail: hguo@scnu.edu.cn

其中 η_L 是折射率 η 的线性部分, $\omega_{pe}^2 = 4\pi n_e e^2/m$ 是没有扰动的电子等离子体频率, n_e 是电子密度. 极化强度的非线性部分满足

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2} = -\frac{c^3 \eta_L}{8\pi p_a} |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

其中 $p_a = 2\pi c^2/\omega_0^2 \eta_L \eta_2$ 是三阶强度非线性自聚焦的临界功率, $\eta_2 = \eta_{NL}/I$ 并有 η_{NL} 是折射率 η 的非线性部分, $I = (c\eta_L/4\pi) \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ 为时间平均的激光强度. 等离子体电流密度的非线性部分满足

$$\frac{\partial \mathbf{J}_{NL}}{\partial t} = \frac{\omega_{pe}^2}{4\pi} \left(\frac{\delta n_e}{n_e} - \frac{\delta m}{m} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

上式右边的两项分别代表由电子等离子体波引起的电子密度扰动(与有质动力有关)以及由相对论效应引起的电子质量改变.

在下面的讨论中,我们只考虑电子的相对论质量变化 $\delta m/m = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}/2$, 其中 $\mathbf{a} = e\mathbf{A}/mc^2$ 是归一化的矢势, 且有 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (1/2) (\epsilon/mc\omega_0)^2 |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2$. 根据等离子体相对论自聚焦的临界功率 $p_p = 2c\eta_L (\omega_0^2/\omega_{pe}^2) (\epsilon/r_e)^2$, 其中 $r_e = e^2/mc^2$ 是电子经典轨道半径, 可得

$$\frac{\partial \mathbf{J}_{NL}}{\partial t} = -\frac{c^3 \eta_L}{8\pi p_p} |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

根据以上关于极化强度和等离子体电流密度的线性部分和非线性部分的表达式可以得到光场的演化方程, 又称为折射率方程:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = \frac{\omega_0^2}{c^2} \left\{ 1 - \left[\eta_L - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0^2} + \frac{c^2}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{p_a} + \frac{1}{p_p} \right) \frac{c\eta_L}{2} |\mathbf{E}|^2 \right] \right\} \mathbf{E}. \quad (3)$$

方程(3)右边的各项分别表示衍射现象、等离子体散焦现象、三阶强度非线性自聚焦现象和相对论自聚焦现象. 因为方程(3)右边中括号项表示总折射率, 所以也称之为折射率方程.

2.2. 哈密顿-雅可比方程

在部分电离的等离子体中, 极化强度可表示为

$$\mathbf{P} = (\eta^2 - 1)\mathbf{E}/4\pi,$$

电流密度满足

$$\partial \mathbf{J}/\partial t = (\omega_p^2/4\pi)\mathbf{E},$$

其中 ω_p^2 是电子等离子体频率. 在傍轴近似 $|\partial \mathbf{E}/\partial z| \ll |k_0 \mathbf{E}|$, 慢变包络近似 $|\partial \mathbf{E}/\partial t| \ll |\omega_0 \mathbf{E}|$ 和延迟坐标 $\zeta = z, \tau = t - z/v_p$ 下, 方程(1)可化为

$$\left(\nabla_{\perp}^2 + 2ik_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \mathbf{E} = -2 \frac{\eta_{NL}}{\eta_L} k_0^2 \mathbf{E} + \frac{\omega_p^2}{c^2} \mathbf{E}, \quad (4)$$

其中 $k_0 = \eta_L \omega_0/c$ 和 $v_p = c/\eta_L$ 分别是激光场的波矢和激光脉冲的相速度. 假设光场的时间和空间均满足高斯分布, 即

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \zeta, \tau) = \epsilon(\mathbf{r}, \zeta, \tau) \exp[i\phi(\mathbf{r}, \zeta, \tau)] \quad (5)$$

和

$$\epsilon = \frac{E_0 r_{s0}}{r(\zeta)} \exp\left[-\frac{r^2}{2r_s^2(\zeta)}\right] \exp\left[-2\ln 2 \frac{\tau^2}{T_p^2(\zeta)}\right], \quad (6)$$

其中光场和光斑半径在 $\zeta = 0$ 的值分别是 E_0 和 r_{s0} , T_p 是脉冲强度的半高全宽(FWHM). 将方程(5)和(6)代入方程(4), 可得到光场振幅和相位的演化方程

$$\nabla_{\perp} \cdot (\epsilon^2 \nabla_{\perp} \phi) + k_0 \frac{\partial \epsilon^2}{\partial \zeta} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \frac{(\nabla_{\perp} \phi)^2}{2k_0} - \frac{\nabla_{\perp}^2 \epsilon}{2k_0 \epsilon} - k_0 \frac{\eta_{NL}}{\eta_L} + \frac{\omega_p^2}{2k_0 c^2} = 0. \quad (8)$$

方程(7)和方程(8)是耦合在一起的, 并且方程(8)是哈密顿-雅可比方程^[1].

3. 传输特性

以下将研究激光在等离子体隧道中传输的特性. 从已经推出的传输方程出发, 可以得到一个包含衍射、三阶强度非线性、等离子体散焦、相对论自聚焦和隧道聚焦作用的新势阱. 利用新势阱和哈密顿-雅可比方程的性质, 可得激光场的包络方程并可进一步分析传输过程中的自聚焦现象.

3.1 传输的包络方程

根据哈密顿-雅可比方程即方程(8)的性质可以得到

$$\frac{d^2 r}{d\zeta^2} = -\frac{1}{k_0} \frac{\partial V}{\partial r}, \quad (9)$$

其中势阱 V 的表达式为

$$V = -\frac{\nabla_{\perp}^2 \epsilon}{2k_0 \epsilon} - k_0 \frac{\eta_{NL}}{\eta_L} + \frac{\omega_p^2}{2k_0 c^2}, \quad (10)$$

右边各项分别对应衍射、三阶强度非线性自聚焦和等离子体. 通过将方程(3)与一般的折射率方程对比可以得到

$$2\eta_L \eta_{NL} = \frac{c^2}{\omega_0^2} \frac{1}{p_a} \frac{c\eta_L}{2} |\epsilon|^2, \quad (11)$$

$$\omega_p^2 = \omega_{pe0}^2 \left(1 + \frac{\Delta n}{n_0} \cdot \frac{r^2}{r_{ch}^2} \right) - \frac{c^2}{p_p} \frac{c\eta_L}{2} |\epsilon|^2, \quad (12)$$

其中 $\omega_{pe0}^2 = 4\pi n_0 e^2 / m$, n_0 分别是轴上的电子等离子体频率和电子密度, $n_e = n_0 + \Delta n r^2 / r_{ch}^2$ 是由有质动力作用而预先形成的等离子体隧道电子密度的一种唯象分布, r_{ch} 是隧道的宽度. 将方程 (11) 和 (12) 代入方程 (9), 得到激光在等离子体隧道中传输的包络方程

$$\frac{d^2 R}{d\zeta^2} = \frac{1}{4Z_R^2 R^3} \left[1 - \frac{p}{p_{crit}} - \frac{\Delta n}{\Delta n_c} \cdot R^4 \right], \quad (13)$$

其中 $R = r_s / r_{s0}$ 是用初始光斑半径归一化的无量纲量, $Z_R = k_0 r_{s0}^2 / 2$ 是光束传输的瑞利距离, $p = (c\eta_L / 8) E_0^2 r_{s0}^2 \exp[-4 \ln 2] \tau^2 / T_p^2$ 是激光的功率. 方程 (13) 右边各项分别代表衍射效应、非线性自聚焦效应和隧道聚焦效应. 非线性自聚焦(包括三阶强度非线性自聚焦和相对论自聚焦)的总临界功率为

$$\frac{1}{p_{crit}} = \left(\frac{1}{p_a} + \frac{1}{p_p} \right) \cdot \frac{4}{e}, \quad (14)$$

其中 e 是自然对数. 等离子体隧道自波导的电子密度宽度为

$$\Delta n_c = \frac{r_{ch}^2}{4\pi r_e r_{s0}^4}. \quad (15)$$

总临界功率和隧道自波导的电子密度宽度, 即 (14) 式和 (15) 式, 与文献 [1] 中的结果是一致的. 此时势阱可以表示为

$$V(r_s) = \left(1 - \frac{p}{p_{crit}} \right) \frac{1}{2k_0 r_s^2} + \frac{\omega_{pe0}^2}{2k_0 c^2} + \frac{\omega_{pe0}^2}{2k_0 c^2} \frac{\Delta n}{n_0} \frac{r_s^2}{r_{ch}^2}. \quad (16)$$

方程 (16) 右边各项分别表示衍射效应、非线性自聚焦效应、等离子体散焦效应和等离子体隧道聚焦效应. 数值模拟的初始条件设为激光波长 $\lambda_0 = 800\text{nm}$, 初始光斑半径 $r_{s0} = 1\text{mm}$, 等离子体隧道宽度 $r_{ch} = 10\text{mm}$, 轴上电子密度 $n_0 = 10^{17}/\text{cm}^3$ 和隧道的电子密度宽度 $\Delta n = \Delta n_c = 0.1 \times 10^{17}/\text{cm}^3$. 通过哈密顿-雅可比方程来研究光束的传输就是将光在介质中的传输类比为粒子在一个给定的势阱中的运动. 图 1 的横、纵坐标分别是归一化的光斑半径 R 和势阱 V . 当激光功率小于临界功率(如图 1(a))时, 可以明显地看出, 虚线在势阱最小值附近区域的宽度小于实线, 即包含隧道项的势阱更能束缚粒子, 即光束可以更稳定地在等离子体隧道中传输, 从而说明了等离子体隧道在传输中的波导作用. 当激光功率等于(如图 1(b))或大于(如图 1(c))临界功率时, 不包括隧道项的势阱有两种情况: 当激光初始时衍射项大于聚焦项, 激光会一直发散, 反之激光就会聚焦传输. 而对

于包括隧道项的势阱, 不论初始情况如何最终激光都会聚焦, 即使初始时衍射项大于聚焦项, 激光只不过是先发散再聚焦, 这说明了等离子体隧道的聚焦作用. 图 1(c) 的势阱存在奇点, 势阱值为负无穷即激光聚焦到一个几何点, 是因为本文采用了傍轴近似, 即忽略电场对 z 的二次偏导项. 当激光聚焦到一定程度时, 该散焦项相对于聚焦项就不能被忽略了, 这样就可以消除奇点.

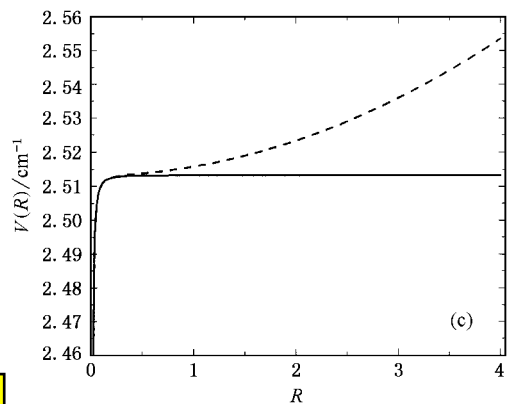
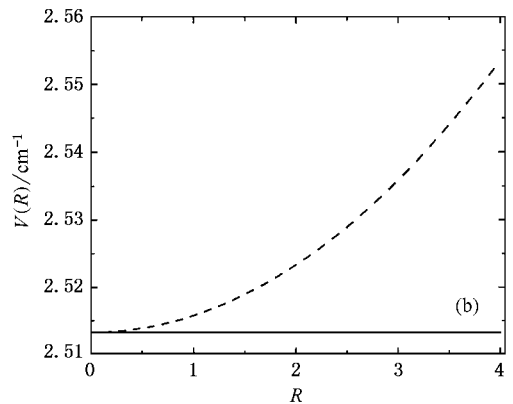
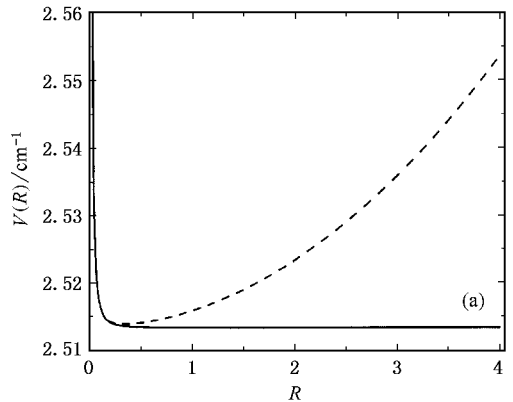


图 1 (a)(b)(c) 分别是 p/p_{crit} 等于 0.95, 1.00, 1.05 时的势阱曲线 (实线和虚线分别代表不包括和包括隧道项的势阱曲线)

3.2. 传输中的自聚焦

从方程(9)可以推导得到

$$\frac{k_0 \left(\frac{dr}{d\zeta} \right)^2}{2} + V = \text{constant}. \quad (17)$$

若初始条件($\zeta = 0$)设为

$$r_s = r_{s0}, \quad dr_s/d\zeta = (dr_s/d\zeta)_0,$$

则从方程(17)可得光斑半径与传输距离之间的积分公式

$$\zeta = - \int_{r_{s0}}^{r_s} \left\{ \left(\frac{dr_s}{d\zeta} \right)_0^2 + \frac{2}{k_0} [V(r_{s0}) - V(r'_s)] \right\}^{-\frac{1}{2}} dr'_s. \quad (18)$$

因为对于自聚焦情况 $dr/d\zeta$ 应该小于零, 所以方程(18)中会出现负号. 如果积分上限是自聚焦的末态, 则积分结果为自聚焦的焦距. 在均匀的等离子体中, 即不考虑隧道效应, 可以计算得到

$$\frac{r_s^2}{r_{s0}^2} = \left[1 + \left(\frac{dr_s}{d\zeta} \right)_0 \frac{\zeta}{r_{s0}} \right]^2 + \frac{\zeta^2}{k_0^2 r_{s0}^4} \left(1 - \frac{p}{p_{\text{crit}}} \right). \quad (19)$$

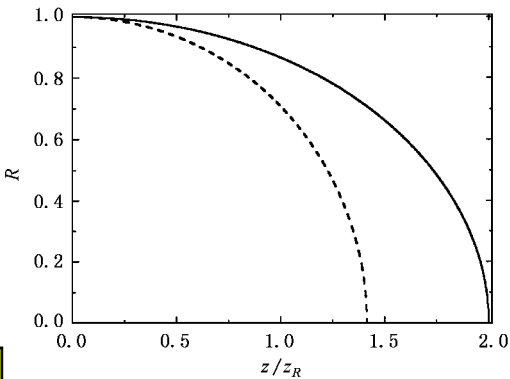


图2 激光在等离子体中传输包络方程的对比(实线和虚线分别对应 $p/p_{\text{crit}} = 2$ 时本文和参考文献[11]的包络曲线)

在图2中横纵坐标分别是用瑞利距离归一化的传输距离和归一化的光斑半径. 可以看出, 本文计算的传输距离比文献[11]的计算结果明显大一些. 这是因为, 本文对包络方程的研究中, 没有用到 $r \ll r_s$ 这一假设, 这就使得势阱中的衍射效应项增强, 从而使得在相同入射功率条件下传输距离会增加. 对应与理想的自聚焦条件(激光聚焦到一个几何点), 可计算得到自聚焦焦距为

$$\zeta_f = \frac{k_0 r_{s0}^2}{\sqrt{p/p_{\text{crit}} - 1 - k_0 r_{s0} (dr_s/d\zeta)_0}}. \quad (20)$$

如果考虑隧道效应从方程(18)可得一个一般的光斑半径与传输距离、激光的初始条件、隧道的初始条件等物理量的关系方程

$$\zeta = - \frac{r_{s0}}{2\sqrt{\alpha_1}} (\sin^{-1} A - \sin^{-1} B), \quad (21)$$

式中

$$A = \frac{-\alpha_1 + (dr/d\zeta)_0^2 + \alpha_2}{\sqrt{[(dr/d\zeta)_0^2 + \alpha_1 + \alpha_2]^2 - 4\alpha_1\alpha_2}},$$

$$B = \frac{\alpha_1(1 - 2R^2) + (dr/d\zeta)_0^2 + \alpha_2}{\sqrt{[(dr/d\zeta)_0^2 + \alpha_1 + \alpha_2]^2 - 4\alpha_1\alpha_2}},$$

其中

$$\alpha_1 = \omega_{pe0}^2 \Delta n r_{s0}^2 / k_0^2 c^2 n_0 r_{ch}^2 > 0,$$

$$\alpha_2 = (1/k_0^2 r_{s0}^2) (\chi - p/p_{\text{crit}}) < 0$$

均为无量纲量, 且只与初始物理量有关. 从方程(18)到(21)可以得到在传输过程中光斑半径和传输距离、光场的频率、初始的光斑半径、隧道的轴上电子密度和密度宽度等初始条件的关系方程. 根据方程(21)可以计算出光场和隧道的不同初始条件在传输过程中对光斑半径演化的影响. 当激光以光腰入射(即激光自然聚焦)到等离子体介质上时, 即 $(dr_s/d\zeta)_0 = 0$, 方程(21)可以简化为

$$\zeta = \frac{r_{s0}}{2\sqrt{\alpha_1}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \sin^{-1} \frac{\alpha_1(1 - 2R^2) + \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \right\} \quad (22)$$

图3是激光在聚焦入射等离子体隧道时三种不同入射功率下的光斑半径随传输距离的演化曲线. 该图表明, 随着激光入射功率的增加, 光斑半径随传输距离减小得越快, 等离子体隧道的聚焦作用就越显著.

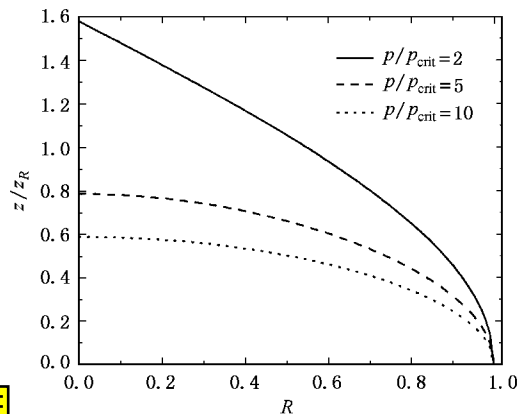


图3 激光在隧道中传输的光斑半径与传输距离的关系曲线(实线、虚线和点线分别对应 p/p_{crit} 等于 2、5 和 10 的曲线)

4. 总 结

本文研究了超短强激光脉冲在等离子体隧道中的传输.从激光在介质中传输的基本方程得到了光场演化方程即折射率方程,及关于光场的振幅和相位的一对耦合方程,其中之一就是哈密顿-雅可比方程.从哈密顿-雅可比方程得到了一个既包含衍射效应、三阶强度非线性又包含等离子体散焦、隧道聚焦、相对论自聚焦的新势阱.对势阱的数值模拟(图

1)表明,势阱中隧道顶对激光传输的波导或聚焦作用.以折射率方程和新势阱为基础,推导得到的激光在等离子体隧道中传输的包络方程以及光斑半径和传输距离、各个初始条件的关系,对进一步研究激光在等离子体以及隧道中的传输特性有一定的意义.数值模拟表明隧道的聚焦作用随入射功率的增加而增强,实验已经表明当入射功率大于某值会发生湍流、成丝或其他非线性物理现象,对这些现象都有待进一步的深入研究.

- [1] Esarey E , Sprangle P , Krall J and Ting A 1997 *IEEE J. Quantum Electron.* **33** 1879
- [2] Wang W , Zhang J and Rose S J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1517 (in Chinese) 王 薇、张 杰、Rose S J 2001 *物理学报* **50** 1517]
- [3] Esarey E , Krall J and Sprangle P 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 2887
- [4] Sprangle P , Hafizi B and Peñano J R 2000 *Phys. Rev. E* **61** 4381
- [5] Sheng Z M , Nishihara K , Honda T , Sentoku Y and Mimak K 2001 *Phys. Rev. E* **64** 066409
- [6] Li Y T , Zhang J , Li L M , Zhao L Z , Xia J F , Teng H , Li Y J , Zhu C Y and Jiang W M 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 204 (in Chinese) 李玉同、张 杰、李黎明、赵理增、夏江帆、滕 浩、李英骏、朱成银、江文勉 2001 *物理学报* **50** 204]
- [7] Sprangle P , Esarey E and Hafizi B 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 1046
- [8] Sprangle P , Hafizi B and Serafim P 1999 *Phys. Rev. E* **59** 3614
- [9] Chen L M , Zhang J , Lin H , Li Y T , Zhao L Z , Wang L and Jiang W M 2001 *Chin. Phys.* **10** 40
- [10] Decker C D , Mon W B , Tzeng K C and Katsouleas T 1996 *Phys. Plasma* **3** 2047
- [11] Shen Y R 1984 *The Principles of Nonlinear Optics* (Wiley , New York) p303

Theoretical and numerical investigation for propagation of ultrashort intense laser pulse in plasma channel^{*}

Tang Hua Guo Hong Liu Ming-Wei Qiu Yun-Li Deng Dong-Mei

(*Laboratory of Light Transmission Optics , South China Normal University , Guangzhou 510631 , China*)

(Received 4 November 2002 ; revised manuscript received 22 December 2002)

Abstract

Characteristics of propagation of ultrashort intense laser pulses in a partially stripped pre-formed plasma channel , assumed to be parabolic and unperturbed , are discussed. From Maxwell equations the refractive index equation and Hamilton-Jacobi equation , which describe the evolution of the electric field , are derived including the effects of the diffraction , the third-order intensity-dependent nonlinearity , plasma defocusing , the self-focusing of the plasma channel , and the relativistic self-focusing. The envelope equation of laser propagating in the plasma channel , and the general expression relating the laser spot size with the propagation distance and the width of the plasma channel etc . , are derived based on the Hamilton-Jacobi equation and the refractive index equation.

Keywords : plasma channel focusing , relativistic self-focusing , potential well

PACC : 4265J , 5240D , 5260

^{*} Project supported by the Key Project of National Natural Science Foundation of China (Grant No. 69789801) , the Foundation of National Hi-Tech Inertial Confinement Fusion Committee , the Fok Yin Tung High Education Foundation (Grant No. 71058) , the Team Project of Natural Science Foundation of Guangdong Province (Grant No. 20003061) and the Foundation for the Key Young Teachers of the Ministry of Education of China.