

颗粒堆密度变化对堆底压力分布的影响

谢晓明¹⁾ 蒋亦民^{1,2)} 王焕友¹⁾ 曹晓平¹⁾ 刘 佑²⁾

¹⁾ 中南大学物理科学与技术学院, 长沙 410083)

²⁾ 蒂宾根大学理论物理研究所, 蒂宾根 72676 德国)

(2002 年 10 月 18 日收到, 2002 年 12 月 27 日收到修改稿)

报道当一无黏性颗粒堆的中间部分密度略小于两边, 从而使中部的弹性强度明显低于两边时, 堆底的压力分布将在中间出现低陷. 对从一固定点(或线)缓慢散落颗粒而形成的圆锥形(或楔形)堆, 这一微小的密度变化可能来自颗粒沿堆边滚落时对堆产生了一定的扰动拍紧效应. 计算表明用考虑了体弹模量随空间变化的弹性理论能很好地再现出观测到的压力分布.

关键词: 颗粒堆, 应力分布, 弹性理论

PACC: 4610, 4620, 4690

1. 引 言

由于无论从工程实际还是基础研究的角度看都具有很高的重要性, 颗粒系统在十几年来引起了许多物理研究者的注意, 并出现了一些新的观点^[1-5]. 作为一特殊的凝聚态系统, 颗粒系统表现出既像固体又像液体的双重行为, 它的一些基本性质至今仍没有得到很好的物理解释. 一典型的例子是无黏性颗粒堆中由其自身重量产生的应力分布问题. 实验发现^[6-9] 颗粒堆底部压力分布的最大值并不总是像想象的那样出现在堆底的中心, 而可能在两边, 即压力分布可能在中部呈现一低陷结构. 对这一有趣现象人们提出了许多不同的解释: 在文献 [10] 中, Edwards 和 Oakeshott 提出了颗粒堆中有拱结构形成的概念. 更具体地, 他们认为堆的负荷不是垂直的, 而是沿斜线向下传递到地面的一点, 并且该点的压力比例于通过它的斜线长度. 由于最长的斜线在两边, 因此有压力低陷(图 1). 而文献 [11-14] 的作者们认为低陷揭示了颗粒堆中力传播具有某些(与其制备过程有关的)优先方向, 因此堆中应力分布应由与普通固体有本质不同的双曲型偏微分方程描述. 他们还认为由于对拉力没有抵抗能力, 颗粒体是完全没有弹性的, 不能对其引入应变张量的概念, 同时强调描写应力传播的偏微分方程应通过假设应力张量的分量间存在一些(本构)关系来得到, 而不是像普通弹性理论那样给出应力-应变间的本构关系. 但这

些新观点受到了 Savage 的反对^[15, 16, 17]. 他认为在沙堆内部基于应力-应变概念的标准弹性理论仍然适用, 只是在表面区域弹性模型的解会变得不稳定(即不满足库仑屈服条件). 可认为系统在此表面区域里处于临界屈服状态, 应力张量满足库仑等式. 通过有限元计算分析, 他得出楔形堆的低陷现象来自微小的地面变形. 还有人用计算机模拟研究颗粒堆中的应力分布, 并发现对某些特殊情况有低陷出现^[17, 18]. 从这些工作不难看出, 尽管在理论和实验上都作了不少的努力, 低陷仍然是一个没有解决的问题.

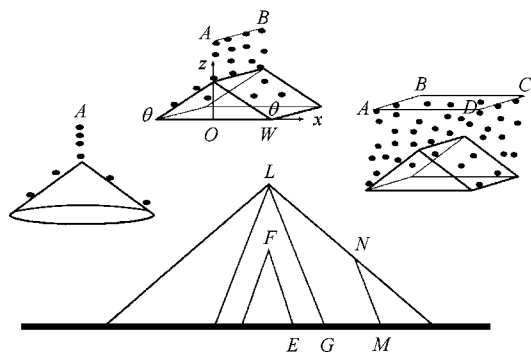


图 1 “拱”概念示意. 堆底 E, G, M 点的压力分别比例于斜线 EF, GL, MN 的长度, 因此最大压力出现在 G 点, 而不是中心. 插图分别为三种不同的制备过程: 从固定点 A(或线 AB)向下散落颗粒(即“点源式”)形成的锥形(或楔形)堆, 底部压力有低陷现象, 但对从平面 ABCD 向下散落颗粒(即“落雨式”)形成的楔形堆, 没有低陷).

值得指出的是, 一个在外力作用下呈稳定静止

状态的颗粒系统必须对任何足够小和慢的扰动都做出弹性响应.也就是说,扰动引起的微小变形主要应是弹性的,而相比之下塑性成分可忽略不计.显然,如存在这样一条路径,当沿其非常缓慢地卸载外力时系统中不出现任何宏观的塑性形变(如滑动等),我们就可以用通常的弹性理论分析卸载前的应力分布.具体地(参见文献[19]),我们可以选系统在卸载后无外力作用的状态为零应变的初始态,记外力产生的应变为 u_{ik} ,它在上述弹性过程中作的功 F (=弹性能密度)将是 u_{ik} 的函数,这时系统中有应力 $\sigma_{ik} = \partial F / \partial u_{ij}$.对在重力作用下的颗粒堆,我们相信非常缓慢地去除重力这一(假想)过程是可逆弹性过程.因此堆中的应力和低陷问题应该能在上述弹性理论的框架内解决.

颗粒体具有弹性行为在工程界有着广泛的认可.如在土力学的弹-塑理论中^[20],人们把应变分成弹性和塑性应变两部分,并认为前者与应力之间存在弹性本构关系.在地球物理中,裂缝性地层的动力学模型也以应力-应变形式的本构关系为基本出发点^[21].尽管弹性理论对颗粒体的适用性在文献[11—14]中受到了质疑,仍有一些物理学者相信它的有效性.如 Evesque 和 de Gennes 认为筒仓中颗粒体的应力问题仍可用考虑了体弹模量随压力变化的弹性理论(他们称为准弹性模型)来分析^[22,21].另外,最近的关于颗粒体对局域型外力扰动的响应实验结果明显不支持应力传播满足双曲型方程的观点^[23—25].为调和所出现的冲突,有人认为文献[11—14]提出的颗粒体完全没有弹性的观点只可能在微观尺度范围内适用,但在远大于颗粒尺寸的宏观近似下,弹性理论仍然有效^[26].我们相信,尽管在实际过程中容易被注意到的往往是远比弹性形变大许多的塑性形变,颗粒系统的弹性形变是不能忽略的,因为它仍决定着系统的力学(特别是静力学)行为.塑性形变主要决定系统的几何形状.颗粒系统必须具有弹性的一面,否则它不可能在重力下形成稳定的堆状,而会像液体那样流开.

最新的实验证实^[8,9],低陷的出现与颗粒堆的制备过程密切相关:如从一固定点(或线)向下轻轻地撒落颗粒形成一锥形(或楔形)堆(见图1中的插图),堆底有压力低陷.但如果堆是从一平面(像下雨似地)向下均匀撒落颗粒而成,则没有低陷.这种低陷显然不能用地面变形来解释.因此一个有趣的问题是:弹性理论是否在底部刚性边界条件下也能给

出低陷.本文将提出这样一种可能性.首先让我们注意到,与普通固体不同的是,在重力下的静止颗粒系统的质量密度能有一较大的变化范围,其下限称为最松无规堆积密度 ρ_{dp} (对由同样大小的球形颗粒组成的系统,计算机模拟给出 $\rho_{dp} = 0.56 \times$ 颗粒密度^[27]).显然,颗粒系统的弹性强度应随密度的不同而不同,并且较致密状态的弹性强度应大于较松状态时的强度.特别是,当密度趋向于 ρ_{dp} 时弹性强度应降到零,这时微小的密度变化会使弹性强度发生较大幅度的改变.因此对松散颗粒堆,制备过程中的微小密度变化可对应力产生较大的影响.我们的具体计算表明,如果堆的中间部分的弹性强度明显地比两边小,堆底压力分布将出现与实验观测一致的低陷结构.根据这一结果,我们猜测对从固定点(或线)向下轻轻撒落颗粒形成的圆锥形(或楔形)堆,由于形成过程时颗粒沿斜边滚落会产生一定的扰动拍紧效应,旁边密度可能略为大于中间,从而造成堆体弹性强度的不均匀.当然除密度外,弹性强度还可能与堆的结构细节,如“纹理”(Texture)有关.最近有实验报道近邻颗粒间夹角的分布与堆的制备过程有关^[9].但是,按照 de Gennes 的看法^[11],这些细节对应力的影响应该不大.由于颗粒体具有各向同性,我们认为首先需要考虑的应是密度效应.

2. 变系数弹性模型

在远比单个颗粒大的宏观尺度上,颗粒系统能看作连续媒质,其应力可用一般的连续力学处理^[19].考虑一静止颗粒堆,我们假设慢慢除去重力这一(假想)过程是可逆和弹性的,没有任何塑性和耗散.这时系统的自由能密度 F 将是应变

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_k} + \frac{\partial u_k}{\partial r_i} \right) \quad (1)$$

的函数,其中 $u_i(r)$ 是堆中坐标为 r 的点在上面过程中发生的位移.由于弹性应变 $u_{ik} \ll 1$,我们可以将 F 对 u_{ik} 作展开,准确到关于 u_{ik} 的平方项,得到形式上与普通固体的自由能和应力相同的表达式(本文将忽略与温度有关的热效应,因此只写出自由能中的弹性势能部分)

$$F = \frac{3}{2} \frac{K}{1+\nu} [\nu u_{ii}^2 + (1-2\nu)u_{ii}u_{jj}], \quad (2)$$

$$\sigma_{ik} = \frac{3K}{1+\nu} [\nu u_{ii}\delta_{ik} + (1-2\nu)u_{ik}], \quad (3)$$

其中系数 K 和 ν 分别是体弹模量和泊松比.重要的

是,普通固体的 K 基本上是一常数,但对颗粒体, K 将随密度和压力的不同而不同. 特别是在最松无规堆积密度 ρ_{dp} 时,系统的颗粒开始互相分离,弹性强度降为零. 在密度略大于 ρ_{dp} 的领域 K 关于密度的展开形式是

$$K = K_0 \left(\frac{\rho}{\rho_{dp}} - 1 \right)^\xi, \quad (4)$$

由于密度一般与空间位置 r 有关(具体形式取决于堆的制备过程), K 也是 r 的函数. K_0 一般是压力的函数. 为简单起见本文将忽略这一复杂的非线性效应,把它看作常数. 值得注意的是, K_0 的压力效应曾被文献 [22, 1] 解释为筒仓中的应力分布. 但由于不像密度效应那样与制备过程有关,它不应该是低陷的主要原因.

在具体计算中我们将局限于考虑沿 y 方向均匀和无限长的楔形堆(坐标系的取法见图 1). 这时有 y 方向位移 $u_y = 0$. 注意重力加速度矢量 G 沿负 z 方向,由 (1)–(4) 式和力平衡条件 $\partial\sigma_{ik}/\partial r_k = -\rho G_i$, 可得支配位移分量 $u_x(x, z), u_z(x, z)$ 的方程

$$3 \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\partial u_x}{\partial x} + K \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{3}{2} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial u_x}{\partial z} + K \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0, \quad (5)$$

$$3 \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\partial u_z}{\partial z} + K \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{3}{2} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial u_x}{\partial z} + K \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \rho G = 0. \quad (6)$$

由于 K 是 x, z 的函数,它们是一组变系数偏微分方程.

确定位移还需要知道边界条件和密度分布. 为避免地面静摩擦力带来的不确定性,假设堆位于一无限硬的光滑地面上,有

$$u_z(x, z=0) = 0, \sigma_{xz}(x, z=0) = 0. \quad (7)$$

在堆的自由斜面上,没有任何外力,边界条件是

$$n_k \sigma_{ik} = 0, \quad (8)$$

其中矢量 $n = (\cos\theta, 0, \sin\theta)$ 是斜面的法线方向, $2W$ 和 θ 分别是堆的底边长和底角(图 1). 密度分布与系统形成的动态过程有关. 它的理论计算原则上需要求解描述整个形成过程的动力方程,显然不是一件容易的事. 为克服这一困难,对从一固定线向下轻轻撒落颗粒形成的堆,我们将用下面的简单模型来估测其密度分布. 我们注意到堆是由颗粒从堆顶向下滚落而成,滚落的颗粒会拍打和震动堆表面,产生使其变密的效应. 随着堆体的增大,滚落的路程变

长,这一效应越大,从而最终形成的堆的中心部分密度略小于外部密度. 在具体计算时,我们假设等密度线与斜边平行,且密度沿垂直斜边方向线性变化. 即

$$\rho(x, z) = \rho_0 + (\Delta/W)(x + z \cot\theta), \quad (9)$$

其中 ρ_0 是堆底中心的密度, Δ 是密度变化. 由这个模型和 (4) 式给出的体弹模量是

$$K = K_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho_{dp}} - 1 \right)^\xi \left(1 + \frac{\Delta}{\rho_0 - \rho_{dp}} \frac{x + z \cot\theta}{W} \right)^\xi. \quad (10)$$

值得指出的是,由滚落颗粒的拍打和震动引起的密度变化应该很小,即 $\Delta/\rho \ll 1$. 但对松散堆因为 $\Delta/(\rho_0 - \rho_{dp})$ 并不小, K 会有显著变化.

3. 计算结果

计算时取角 θ 等于无黏性颗粒堆的自然坡度角的典型值 30° , 泊松比 ν 的典型值 0.2, 并考虑 $\rho_0 = 1.004\rho_{dp}$, $\Delta = 0.0059\rho_{dp}$ 和 $\xi = 1$. 这时尽管密度变化仅 0.2%, 体弹模量 K 能有约 1.5 倍的变化.

数值计算将采用下面近似方法. 首先定义无量纲位移 $u_i^* = 3u_i K_0 / (40W^2 \rho_{dp} G)$ 并把它们写成 N 阶多项式形式. 由于沙堆关于 z 轴对称,到 x 和 z 的 N 次方这个展开形式是

$$u_x^* = \sum_{m+2n+1 \leq N} a_{mn} x^{2n+1} z^m, \quad u_z^* = \sum_{m+2n \leq N} b_{mn} x^{2n} z^m. \quad (11)$$

然后用边界条件 (7)–(8) 确定出一部分系数. 剩下的系数(设有 M 个)将通过要求 (11) 在一组位于堆中的 $M/2$ 个点上满足力平衡方程 (5)–(6) 来确定,并通过考察坐标为 z 的水平面上的总压力与该面上方所有颗粒重量的比值

$$C(z) = \frac{\int_0^{1-\chi(\cot\theta)} \sigma_z(x, z) dx}{G \int_z^{z+\chi(\cot\theta)} \rho(x, z') dx} \quad (12)$$

来检验所得结果的好坏. 如果解是严格的,有 $C(z) = 1$. 在计算时我们仔细地调节这些点的位置,使得 C 尽可能地接近 1. 对截断 $N = 9$ 的情形,得到的一组最好系数见表 1. 对截断 $N = 12, 15$ 和 18 时得到的结果见文献 [28]. 图 2(a) 是它们的检验结果. 可以看到,在沙堆内部 $z < 0.3$ 范围里所有上述截断给出的结果都与条件 $C = 1$ 符合得很好. 大的偏差出现在堆的顶部,但随着截断 N 的增大,偏差的范围

和程度都明显变小。

表 1 (a) $N=9$ 时 u_x^* 的展开系数 a_{mn}

$n \backslash m$	0	1	2	3	4
0	0.87533218	-1.3919554	1.7557019	-1.3674318	0.45489415
1	0	0	0	0	0
2	-10.669142	30.458832	-31.889855	14.677366	0
3	47.147389	-210.14372	128.51641	0	0
4	-311.19629	1118.1922	-459.60928	0	0
5	1210.8457	-2152.3121	0	0	0
6	-2787.9573	914.35154	0	0	0
7	3867.3040	0	0	0	0
8	-2343.2573	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0

表 1 (b) $N=9$ 时 u_x^* 的展开系数 b_{mn}

$n \backslash m$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	-4.0017994	13.021564	-21.251075	19.182017	-6.9507072
2	6.7658852	-12.425067	14.223845	-8.2737197	0
3	5.4791354	-149.57160	285.34302	-137.69111	0
4	-85.898215	1086.9554	-1034.7014	0	0
5	360.93536	-3937.1800	1963.2532	0	0
6	-709.88965	6329.8274	0	0	0
7	534.97910	-3604.6717	0	0	0
8	90.515878	0	0	0	0
9	-221.67871	0	0	0	0

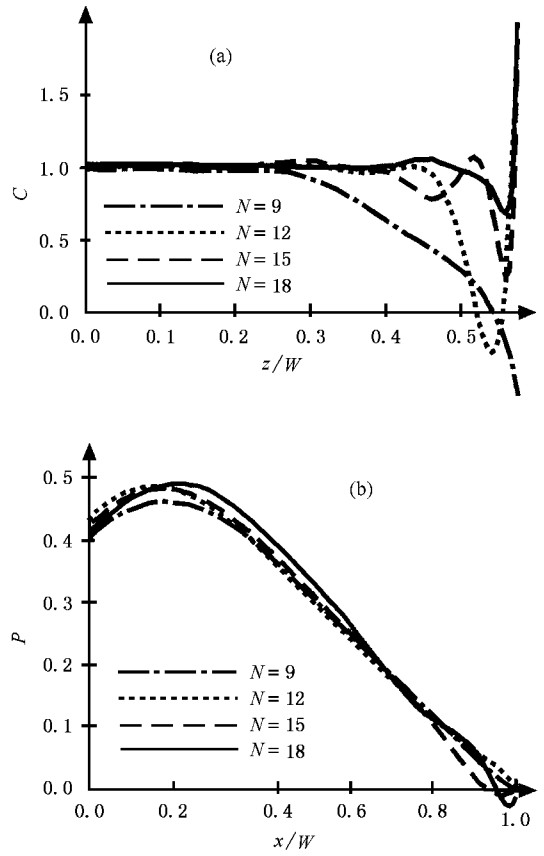


图 2 (a)取不同截断时 C 随 z 的变化 (b)堆底无量纲压力 P 随 x 的变化

图 2(b) 是上述数据给出的地面无量纲压力 $P = 40\sigma_z / 3K_0$ 的分布。由图可见最大压力大约位于 $x/W = 0.2$ 处, 中心处的压力比两边约低 7%。这一结果基本与观测到的低陷相符^[8,9]。注意在边角 $x/W \approx 1$ 处出现的负压力应来自计算误差。值得强调的是, 尽管不同的截断在堆顶对条件 $C = 1$ 的满足情况有很大的不同, 但都给出了基本相似的压力分布。我们相信大的应力计算误差仅出现于堆顶和边角部位。而对堆的内部, 特别是中间部分, 所用的计算方法是可靠的。

4. 讨 论

本文分析了二维堆状弹性体由其自重产生的应

力分布。计算表明当堆的中间部分的弹性强度明显小于两边时, 堆底的压力分布将在中心出现低陷。如

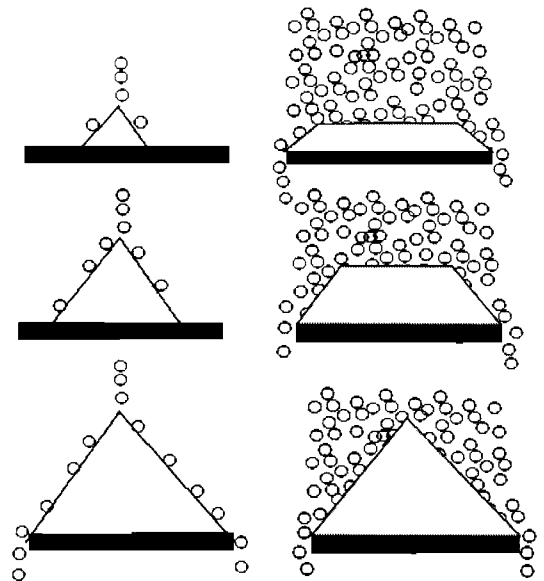


图 3 “点源式”堆(左)和“落雨式”堆(右)的生长过程示意

果考虑体弹模量沿垂直斜边方向线性地变化,我们能得到与在颗粒堆底观测到的压力相符的分布曲线.此结果对在刚性地面上的颗粒堆底部观测到的压力低陷现象提供了这样一种可能的解释.对“点源式”撒落颗粒的情况,在堆的形成过程中,颗粒沿堆边向下滚动会对堆产生一定的扰动拍紧效果,并随着堆体和堆边的变大而增强,最终形成的堆将是中间松边上紧,从而导致了中间部分的弹性强度明显小于两边.因此低陷现象可源自于堆体的致密度在制备过程中出现了微弱的不均匀性.这一解释可通过仔细测量不同位置颗粒排列的致密情况来进一步证实.

值得注意的是,在“点源式”与“落雨式”的实验里,堆有不同的生长过程(图3).对前一情形,滚动效应显然对整个堆体都有影响.而对后一情形,它只

影响最后得到的堆的边界层.由于堆体内部的密度仍维持均匀,所以没有压力低陷.

当然,严格地讲描写“点源”堆中应力情况的理论应比文中使用的简单弹性模型复杂许多.首先,密度和弹性模量的空间变化方式都可能偏离所用简单模型.但值得指出的是,在 $x \approx 0$ 的堆的中部,由于是由颗粒直接落下并很快停止而成,从底到顶基本不受滚动效果的影响,因此实际的密度变化不应改变中间松边上紧的结论.密度函数(9)只在大体上反映了这一特点.我们期望通过实验测量能进一步了解它的确切形式.第二,除密度外,弹性模量还应是应力的函数.第三,桌面与颗粒之间的摩擦力对堆底边界条件的修改.另外,我们还忽略了库仑屈服条件对斜边边界部分的影响.这些复杂因素对应力分布,特别是对低陷结构的影响仍有待进一步研究.

- [1] de Gennes P G 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 374
- [2] Hou M Y and Lu K Q 2001 *Science* **53** 29 [in Chinese] 厚美瑛、陆坤权 2001 科学 **53** 29]
- [3] Kadanoff L P 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 435
- [4] Jaeger H M, Nagel S R and Behringer R P 1996 *Rev. Mod. Phys.* **68** 1259
- [5] Nagel S R 1992 *Rev. Mod. Phys.* **64** 321
- [6] Smid J and Novosad J 1981 *Int. Chem. Eng. Symp.* **63** D3/V/1
- [7] Jotaki T and Moriyama R 1979 *J. Soc. Powder Technol. Jpn.* **60** 184
- [8] Vanel L, Howell D, Clark D, Behringer R P and Clement E 1999 *Phys. Rev. E* **60** R5040
- [9] Geng J, Longhi E, Behringer R P and Howell D W 2001 *Phys. Rev. E* **64** R060301
- [10] Edwards S F and Oakeshott R B 1989 *Physica D* **38** 88
- [11] Bouchaud J P, Cates M E and Claudin P 1995 *J. Phys. I France* **5** 639
- [12] Wittmer J P, Cates M E and Claudin P 1997 *J. Phys. I France* **7** 39
- [13] Wittmer J P, Bouchaud J P and Claudin P 1998 *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **356** 2535
- [14] Cates M E, Wittmer J P, Bouchaud J P and Claudin P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1841
- [15] Savage S B 1997 *Disorder and Granular Media* (Amsterdam :North-Holland)
- [16] Behringer R P and Jenkins 1997 *Powders and Grains* (Rotterdam : Balkema) p185
- [17] Luding S 1997 *Phys. Rev. E* **55** 4720
- [18] Oron G and Herrmann H J 1998 *Phys. Rev. E* **58** 2079
- [19] Landau L D and Lifshitz E M 1986 *Theory of elasticity* (Oxford :Pergamon Press)
- [20] Huang W X *et al* 1983 *Engineering Character of Soil* (Beijing :Water Conservancy and Electric Power) p32 (in Chinese) [黄文熙主编 1983 土的工程性质(北京 水利电力出版社)第32页]
- [21] Du Q Z and Yang H Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2101 (in Chinese) [杜启振、杨慧珠 2002 物理学报 **51** 2101]
- [22] Evesque P P and de Gennes P G 1998 *C. R. Acad. Sci. Paris* **326** 761
- [23] Reydellet G and Clement E 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3308
- [24] Geng J, Howell D, Longhi E, Behringer R P, Reydellet G, Vanel L, Clement E and Luding S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 035506
- [25] Da Silva M and Rajchenbach J 2000 *Nature* **406** 708
- [26] Goldenberg C and Goldhirsch I 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 084302
- [27] Onoda G Y and Liniger E G 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 2727
- [28] Xie X M 2003 *The Master Thesis of Central South University* (in Chinese) [谢晓明 2003 中南大学硕士论文]

The influence of density variation of a granular pile on the pressure distribution at its bottom

Xie Xiao-Ming¹⁾ Jiang Yi-Min^{1,2)} Wang Huan-You¹⁾ Cao Xiao-Ping¹⁾ Mario Liu²⁾

¹⁾ College of Physical Science and Technology, Central South University, Changsha 410083, China)

²⁾ Theoretische Physik, Universitaet Tuebingen, Tuebingen 72676, Germany)

(Received 18 October 2002 ; revised manuscript received 27 December 2002)

Abstract

We report that when the density at the centre of a cohesionless granular pile is slightly smaller than the density at its sides, such that the elastic strength at the centre is evidently smaller than the strength at the sides, the pressure distribution under the pile will show a dip at the centre. For the conical (or wedge-shaped) piles formed by slowly pouring grains from a point (or a line), the small density variation may be due to the phenomenon that the pile is slightly tapped by the down-rolling grains along the pile surfaces. The computation shows that the observed pressure distribution can be well reproduced by the elastic theory with a spatial-varying bulk modulus.

Keywords : granular pile , stress distribution , elastic theory

PACC : 4610 , 4620 , 4690