第 52 卷 第 1 期 2003 年 1 月
1000-3290/2003/52(01)/0225-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 52, No. 1, January, 2003

非线性激发的磁激子对的振荡特性*

史庆藩[1)2)]　闫学群[1)2)]
[1)]（北京理工大学应用物理系，北京　100081）
[2)]（中国科学院物理研究所，北京　100080）
（2002 年 4 月 9 日收到；2002 年 6 月 28 日收到修改稿）

通过分析放置于微波谐振腔中的磁有序晶体中的磁激子对激励过程，推导出了磁激子对的运动方程，发现磁激子对不能被认为是两个单个的磁激子的一般组成，而是可以整体的看作为一个具有非线性行为的单模谐振子。依据微波谐振腔与磁激子对集体形成的谐振器之间的耦合作用的机理，可以定性解释在有关磁激子对激励实验中所出现的双峰现象。

关键词：磁激子，谐振器，Hamilton 方程
PACC：7530D，7650

1. 引　　言

磁性材料的理论与应用研究已成为当前物理学研究的热点之一[1—10]。其中自旋波（磁激子，magnon）理论自 20 世纪 30 年代初由 Bloch 提出以来就一直为人们所关注。例如当对微波铁氧体材料制成的器件注入高功率微波超过某一阈值 P_c 时，人们注意到除了产生打火、过热这两种损坏器件性能的现象以外还伴随着损耗的非线性效应（自旋波的非线性激发）。即能量通过自旋-自旋弛豫过程由一致进动转移到磁激子，且磁激子数随功率增加呈指数增长，通过自旋-晶格弛豫过程导致晶格振荡后产生声子。因此研究自旋波系统的非线性动力学不仅在发展凝聚态的基础理论方面而且对于改善磁性材料器件的性能都有着重要的意义。

当频率为 ω_p 的较强大的注入微波功率施加于磁有序晶体（如 YIG）时一致进动（$\boldsymbol{k}_0=0$）被激发，这时在自旋-自旋弛豫过程中所不能忽略的效应是：如果能量关系

$$\omega_p = \tilde{\omega}_{\boldsymbol{k}} \text{ 或 } \omega_p = \tilde{\omega}_{\boldsymbol{k}} + \tilde{\omega}_{-\boldsymbol{k}}$$

成立（$\tilde{\omega}_{\boldsymbol{k}}$ 考虑了由于非线性相互作用而引起的频移），则有生成磁激子对的过程

$$2(\boldsymbol{k}_0 = 0) \rightarrow (\boldsymbol{k}) + (-\boldsymbol{k})$$

或

$$(k_0 = 0) \rightarrow (k) + (-k)$$

发生[11,12]。我们可以把磁激子对表示为

$$M_-(\boldsymbol{k}) = b_k b_{-k},\quad M_+(\boldsymbol{k}) = b_k^* b_{-k}^*;$$
$$M_0(\boldsymbol{k}) = (1/2)(|b_k|^2 + |b_{-k}|^2). \tag{1}$$

这里 b_k 和 b_k^* 是带有波矢量 $\boldsymbol{k}$ 和频率 $\tilde{\omega}_{\boldsymbol{k}}$ 的自旋波的经典复振幅。我们注意到在（1）式中的三个元素 M_-，M_+ 和 M_0 可以分别看作是 $SU(1,1)$ 李代数生成元 K_0，K_+，K_- 的经典类比。因此引入经典对易关系

$$\{A, B\} = \sum_q \left(\frac{\partial A}{\partial b_q} \frac{\partial B}{\partial b_q^*} - \frac{\partial B}{\partial b_q} \frac{\partial A}{\partial b_q^*} \right), \tag{2}$$

对一个给定的 $\boldsymbol{k}$ 可以得到

$$\{M_0, M_\pm\} = \pm M_\pm,\ \{M_-, M_+\} = 2M_0,$$
$$C = M_0^2 - \frac{1}{2}(M_+ M_- + M_- M_+). \tag{3}$$

这里 C 是 Casimir 不变量。由于 $SU(1,1)$ 李代数可以有一个单玻色实现，所以它已被用于在理论上研究各种相干和压缩态[13—15]。这意味着方程（1）中的三种元素 M_0，M_+ 和 M_- 可以按照一个振荡器的经典复振幅 m_k 和 m_k^* 来表示，而这种振荡器则相当于一个给定的磁激子对。本文提出一个按照 m_k 和 m_k^* 来表示 M_0，M_+，M_- 的处理磁激子对的理论方法，

* 国家教委留学回国人员科研基金（批准号：LQ2000-2）资助的课题。

结果显示磁激子对不能简单地被认为是两个单个的自旋波的一般组成.

2. 磁激子对的运动方程

自旋波系统的Hanmiltonian方程可以写为

$$
\begin{aligned}
H/\hbar = {} & \omega_R R^* R + \sum_k{}' 2\omega_k M_0(\boldsymbol{k}) \\
& + \sum_k{}' \mathrm{i} G_k (R M_+(\boldsymbol{k}) - R^* M_-(\boldsymbol{k})) \\
& + F(R^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\mathrm{p} t} + R \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_\mathrm{p} t}) + H_{\mathrm{int}}/\hbar. \quad (4)
\end{aligned}
$$

这里 R^* 和 R 是频率为 ω_R 的微波谐振腔模的复变量; ω_k 是"bare"自旋波频率; G_k 是光子和磁激子的非线性耦合参量; F 是激励场参数; 方程中考虑了已被实验证实起重要作用的谐振腔模的动力学[16—18]. 方程中的最后一项为

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{int}}/\hbar = {} & 2\sum_{k,q}{}' (2T_{kq} M_0(\boldsymbol{k}) M_0(\boldsymbol{q}) \\
& + S_{kq} M_+(\boldsymbol{k}) M_-(\boldsymbol{q})) \\
& + 2\sum_k{}' T_k^{(R)} R^* R M_0(\boldsymbol{k}). \quad (5)
\end{aligned}
$$

其中 T_{kq} 和 S_{kq} 表示4-磁激子相互作用的大小; $T_k^{(R)}$ 表示光子-磁激子散射的大小. 由于这里的自旋波系统具有反对称性($\boldsymbol{k}\to -\boldsymbol{k}$), 所以这里用 $\sum_k{}'$ 表示在 $\boldsymbol{k}$ 半空间上的求和. 为了有一个无量纲的复变量作为Bose子产生和湮没算符的经典近似, 引入Plank常数 $\hbar$ 作为空间常量. 这样含有衰减参数(Γ 相应于 R, γ_k 相应于 b_k)的磁激子的Hamilton运动方程可以写为

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \Gamma\right) R = \{R, H/\hbar\}, \\
& \mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \gamma_k\right) b_k = \{b_k, H/\hbar\}, \quad (6)
\end{aligned}
$$

这里对易关系式包含对 R 和 R^* 的导数. 引入转动体系中的变量

$$
b_k = c_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\mathrm{p} t/2} \text{ 和 } R = \tilde{R}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\mathrm{p} t/2},
$$

可以得到复振幅的运动方程

$$
\begin{aligned}
& \left\{\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \Gamma\right) + \left(\omega_\mathrm{p} - \tilde{\omega}_R\right)\right\} \tilde{R} \\
& = -\mathrm{i} \sum_q{}' G_q c_q c_{-q} + F, \quad (7)
\end{aligned}
$$

$$
\left\{\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \gamma_k\right) + \left(\frac{\omega_\mathrm{p}}{2} - \tilde{\omega}_k\right)\right\} c_k = P_k c_{-k}^*. \quad (8)
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\tilde{\omega}_R & \equiv \omega_R + 2\sum_q{}' T_q^{(R)} N_q, \\
\tilde{\omega}_k & \equiv \omega_k + 4\sum_q{}' T_{kq} N_q + T_k^{(R)} |\tilde{R}|^2, \\
P_k & \equiv \mathrm{i} G_k \tilde{R} + 2\sum_q{}' S_{kq} c_q c_{-q}, \\
N_q & \equiv \frac{1}{2}\left(|c_q|^2 + |c_{-q}|^2\right).
\end{aligned}
$$

方程(7), (8)以及它们的共轭方程已被用于非线性自旋波动力学的模拟[13—15]. 由(8)式及其共轭方程可以得到磁激子对的运动方程为

$$
\left\{\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 2\gamma_k\right) + \left(\omega_\mathrm{p} - 2\tilde{\omega}_k\right)\right\} \sigma_k = 2N_k P_k, \quad (9)
$$

$$
\left\{-\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 2\gamma_k\right) + \left(\omega_\mathrm{p} - 2\tilde{\omega}_k\right)\right\} \sigma_k^* = 2N_k P_k^*, \quad (10)
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 2\gamma_k\right) |c_k|^2 & = \mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 2\gamma_k\right) |c_{-k}|^2 \\
& = P_k \sigma_k^* - P_k^* \sigma_k. \quad (11)
\end{aligned}
$$

其中 $\sigma_k \equiv c_k c_{-k}$, $\sigma_k^* \equiv c_k^* c_{-k}^*$, 联立方程(9)—(11), 得到

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 2\gamma_k\right)\left(|c_k|^2 - |c_{-k}|^2\right) = 0, \\
& \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 4\gamma_k\right)\left(N_k^2 - |\sigma_{-k}|^2\right) = 0.
\end{aligned}
$$

这样, 对于方程(9)—(11)的任何解在 $t \gg 1/2\gamma_k$ 时, $|c_k| = |c_{-k}|$, $|\sigma_k| = N_k$. 注意到: σ_k, σ_k^*, N_k 可以被认为是 $SU(1,1)$ 李代数在转动体系下的经典生成元, 并且

$$
\begin{aligned}
& M_-(\boldsymbol{k}) = \sigma_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\mathrm{p} t}, \quad M_+(\boldsymbol{k}) = \sigma_k^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_\mathrm{p} t}, \\
& M_0(\boldsymbol{k}) = N_k, \; C = 0. \quad (12)
\end{aligned}
$$

进一步导入相位角 θ_k 使得, $\sigma_k = N_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_k - \pi/2)}$, 则方程(7)和(8)变换为

$$
\begin{aligned}
& \left\{\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \Gamma\right) + \left(\omega_\mathrm{p} - \tilde{\omega}_R\right)\right\} \tilde{R} \\
& = -\sum_q{}' G_q N_q \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_q} + F, \\
& \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_k - G_k\left(\tilde{R}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_k} + \tilde{R}^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}\right) - \left(\omega_\mathrm{p} - 2\tilde{\omega}_k\right)\right. \\
& \left. + 4\sum_q{}' S_{kq} N_q \cos(\theta_k - \theta_q)\right\} N_k = 0, \\
& \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 2\gamma_k - \mathrm{i} G_k\left(\tilde{R}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_k} - \tilde{R}^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}\right)\right. \\
& \left. + 4\sum_q{}' S_{kq} N_q \sin(\theta_k - \theta_q)\right\} N_k = 0.
\end{aligned}
$$

从这些方程可以得出结论: $\boldsymbol{k}$ 半空间存在一个区域 $\boldsymbol{Q}$, 使得在 $\boldsymbol{Q}$ 中 $N_k \neq 0$ 和 $N_k = 0$ (如果 $\boldsymbol{k} \notin \boldsymbol{Q}$). 这样方程就被简化为

$$
\left\{\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \Gamma\right) + \left(\omega_\mathrm{p} - \tilde{\omega}_R\right)\right\} \tilde{R}
$$

$$= -\sum_{q\in Q}{}' G_q N_q \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_q} + F, \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_k - G_k\left(\tilde{R}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_k} + \tilde{R}^{*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}\right) - \left(\omega_{\mathrm{p}} - 2\tilde{\omega}_k\right) + 4\sum_{q\in Q}{}' S_{kq} N_q \cos(\theta_k - \theta_q) = 0, \tag{14}$$

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 2\gamma_k - \mathrm{i}G_k\left(\tilde{R}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_k} - \tilde{R}^{*}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}\right) + 4\sum_{q\in Q}{}' S_{kq} N_q \sin(\theta_k - \theta_q)\right\} N_k = 0. \tag{15}$$

稳定态($\mathrm{d}/\mathrm{d}t=0$)由不依赖于时间的函数 $\tilde{R}^{(0)}$, $\tilde{R}^{(0)*}$, $\theta_k^{(0)}$ 和 $N_k^{(0)}$ 来描述,而且区域 $\boldsymbol{Q}$ 应当包括方程的振荡解 $\omega_{\mathrm{p}} = 2\tilde{\omega}_k$.

3. 磁激子对的振荡器表达形式

考察方程(13)—(15),带有衰减参数的 Hamilton 方程可以写为

$$\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \Gamma\right)\tilde{R} = \frac{\partial \tilde{H}/\hbar}{\partial \tilde{R}^{*}},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_k = -\frac{\partial \tilde{H}/\hbar}{\partial N_k},$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 2\gamma_k\right) N_k = \frac{\partial \tilde{H}/\hbar}{\partial \theta_k}. \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{H}/\hbar = {} & \left(\omega_R + 2\sum_{k\in Q}{}' T_k^{(R)} N_k - \omega_{\mathrm{p}}\right)|\tilde{R}|^2 \\ & + \left(F - \sum_{k\in Q}{}' G_k N_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_k}\right)\tilde{R} \\ & + \left(F - \sum_{k\in Q}{}' G_k N_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}\right)\tilde{R}^{*} \\ & + \sum_{k\in Q}{}' (2\omega_k - \omega_{\mathrm{p}}) N_k \\ & + 2\sum_{k\in Q}{}' \{2T_{kq} + S_{kq}\cos(\theta_k - \theta_q)\} N_k N_q\end{aligned} \tag{17}$$

是在转动体系中的有效磁激子对 Hamiltonian. 现在引入复变量

$$m_k = \frac{N_k + \mathrm{i}\theta_k}{\sqrt{2}},\quad m_k^{*} = \frac{N_k - \mathrm{i}\theta_k}{\sqrt{2}}. \tag{18}$$

并考虑到 $\sigma_k = N_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_k - \pi/2)}$, 则(12)式可以重新写为

$$\begin{aligned}M_-(\boldsymbol{k}) &= \frac{m_k + m_k^{*}}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\omega_{\mathrm{p}}t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{m_k - m_k^{*}}{\sqrt{2}}} \\ &= M_0(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\omega_{\mathrm{p}}t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{m_k - m_k^{*}}{\sqrt{2}}},\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}M_+(\boldsymbol{k}) &= \frac{m_k + m_k^{*}}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega_{\mathrm{p}}t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{m_k - m_k^{*}}{\sqrt{2}}} \\ &= M_0(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega_{\mathrm{p}}t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{m_k - m_k^{*}}{\sqrt{2}}}.\end{aligned} \tag{20}$$

显然(19)和(20)式是具有频率为 ω_{p} 的振荡器的数学表达形式,因而由 $\boldsymbol{k}$ 和 $-\boldsymbol{k}$ 构成的磁激子对相当于由经典复振幅所表现的非线性谐振子. 同时方程(3)对于含有 m_k 和 m_k^{*} 的交换子的经典相似也是有效的. 至此磁激子系统的运动方程可以重新写为

$$\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \Gamma\right)\tilde{R} = \{\tilde{R}, H/\hbar\},$$

$$\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \gamma_k\right) m_k + \mathrm{i}\gamma_k m_k^{*} = \{m_k, \tilde{H}/\hbar\}, \tag{21}$$

4. 结　　论

当激励场的能量超过生成磁激子对的阈值时[5],即

$$F > F_{\mathrm{c}},\quad \frac{F_{\mathrm{c}}\,\Gamma}{\Gamma^2 + (\omega_{\mathrm{p}} - \omega_R)^2} = \min\left(\frac{\gamma_k}{G_k}\right),$$

则磁激子对表现得如同频率为 ω_{p} 的非线性介质的振荡. 磁激子对漂移微波谐振器的频率并减小激励场的振幅,这导致了吸收微波功率的限制,即使是在 $T_{kq} = S_{kq} = 0$ 的情况也是一样. 因此整个系统(样品+振荡器+微波激励场)需要用新的模式来描述. 即新模式可以通过自旋波频谱修正 $\Delta\omega \approx \Omega$ 或通过另外的频率为 $\omega \approx \omega_{\mathrm{p}} + \Omega$ 的微波激励场加在谐振器模上来分析. 由此,在放置于微波谐振腔的非线性介质中激励出的磁激子对相当于一个谐振子的结论可以定性地说明在 YIG 中的磁激子激励实验[16] 中所观察到的两个吸收峰是频率为 Ω_R 的微波谐振器与频率为 Ω_k 的磁激子对非线性相互作用的结果,定量分析将在今后的理论与实验工作中进行.

[1] Hou B H, Xu Y X, Han S Y, Yi S and Shen B G 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 527 (in Chinese) [侯碧辉、睢云霞、韩世莹、易　俗、沈保根 1999 物理学报 **48** 527]

[2] Liu G Q and Tsai C S 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 997 (in Chinese) [刘公强, Chen S. Tsai 1998 物理学报 **47** 997]

[3] Wang L 2000 *Chin. Phys.* **9** 685

[4] Tan M Q, Tao X M and Bao C N 2000 *Chin. Phys.* **9** 55

[5] L' vov V S 1994 *Wave Turbulence under Parametric Exciation* (Berlin: Springer-Verlag)

[6] Wang F, Sun G Q, Kong X M, Shan L, Jin X and Zhang H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1590 (in Chinese) [王 峰、孙国庆、孔祥木、单 磊、金 新、张 宏 2001 物理学报 **50** 1590]

[7] Gao Y, Zhang Y M and Chen H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1586 (in Chinese)[高 阳、章豫梅、陈 鸿 2000 物理学报 **49** 1586]

[8] Guo Y, Gu B L and Yoshiyuki K 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1820 (in Chinese) [郭 永、顾秉林、川添良幸 2000 物理学报 **49** 1820]

[9] Kalafati Y D and Safonov V L 1989 *Sov. Phys. JETP* **68** 1162

[10] Safonov V L and Yamazaki H 1996 *J. Magn. Magn. Mater* **161** 275

[11] Li Y Y and Li G D 1962 *Physics of Ferrites* (Beijing: Science Press) Chap. 9 (in Chinese) [李荫远、李国栋 1962 铁氧体物理学(北京: 科学出版社) 第九章]

[12] Liao S B 1998 *Ferrimagnetics* (Beijing: Science Press) Chap. 14 (in Chinese) [廖绍彬 1998 铁磁学(北京: 科学出版社) 第十四章]

[13] Vourdas A 1992 *Phys. Rew.* A **46** 442

[14] Lo C F and Liu K L 1993 *Phys. Rev.* A **48** 3362

[15] Bryant P, Jeffries C and Nakamula K 1988 *Phys. Rev.* A **38** 4223

[16] Yamazaki H and Mino M 1989 *Progr. Theor. Phys. Suppl.* **98** 400

[17] Nakamura K 1993 *Quantum Chaos: A New Paradigm of Nonlinear Dynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge)

[18] Zautkin V V, L' vov V S and Starobinets S S 1973 *Sov. Phys.*—*JETP* **36** 96

Characterization of the nonlinearly excited magnon pair*

Shi Qing-Fan[1)2)] Yan Xue-Qun[1)2)]

[1)] (*Department of Applied Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

[2)] (*Institute of Physics, Chinese Academy of Sciencies, Beijing* 100080, *China*)

(Received 9 April 2002; revised manuscript received 28 June 2002)

Abstract

The Hamilton's equations of motion were derived by analyzing the process of excitation for magnon pair in magneto-ordered medium placed in a microwave oscillator. The result showed that the magnon pair couples with the microwave resonator with nonlinearly oscillatory characterization.

Keywords: magnon, resonator, Hamilton equation

PACC: 7530D, 7650

* Project supported by National Education Committee of China for Returned Overseas Students (Grant No. LQ2000-2).