

# 集合预报物理基础的探讨\*

封国林<sup>1,2)</sup> 董文杰<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>扬州大学物理系,扬州 225009)

<sup>2)</sup>中国科学院大气物理研究所东亚中心,北京 100029)

<sup>3)</sup>国家气候中心,北京 100081)

(2002 年 9 月 29 日收到,2003 年 1 月 10 日收到修改稿)

将集合预报中的每次积分算程视为非平衡统计物理理论中的准粒子轨迹,由此对 Lorenz 模型进行了数值试验,计算了初值位于不同性质平衡态附近时准粒子数处于基态和第一激发态随时间的演化.结果证明(1)若动力系统在整个相空间内存在稳定的平衡态,在稳定的平衡态附近,系统随时间长期演化行为是可预测的.(2)若动力系统在整个相空间内不存在任何稳定的平衡态,初值位于远离非稳定的平衡态,则在 1—2 周内准粒子多数分布在低能量态,即预报是最可几率的.(3)若初始状态位于非稳定平衡态附近,系统随时间的演化几乎是不可预测的.这从理论上说明了作大量积分算程的集合预报其效果会比单一初值的单程积分要好.这就从物理上对集合预报能提高准确率提供了一种解释.

关键词:集合预报, Lorenz 模型, 正则分布, 概率密度分布

PACC: 9260X, 9260Y

## 1. 引言

集合预报在 20 世纪 70 年代由 Leith 提出,出发点是动力学和统计学相结合制作天气预报.他建议在初值上叠加随机扰动随后作多次积分,再对积分结果作平均作为最终预报.1983 年 Hoffman 和 Kalnay<sup>[1]</sup>提出滞后平均预报(LAF).两种方法的数学基础都是蒙特卡罗(MCF)统计试验法<sup>[2-4]</sup>.1989 年曹鸿兴等<sup>[5]</sup>从蒙特卡罗法原理来介绍和评述了 LAF,认为 LAF 不仅能利用天气演变的历史信息,而且能清除初始场的某些不确定性.集合预报最初用于中期天气预报,现在已扩展至短期天气预报和月预报乃至季节以上的气候预测<sup>[6]</sup>,大量实验研究和业务工作证明,集合预报比普通数值预报有更高的预报技巧.

大气是一个流体,气候系统是一个物理系统,因此在制作天气预报和气候预测时必须运用其物理规律.这意味着除了从数学上探讨集合预报外,还须对集合预报的物理基础进行探讨.本文就是从非平衡统计物理对此进行研究.

## 2. 基本原理

集合预报是在初始场上叠加随机扰动,得到新的初始场进行数值积分,这种积分在几十个以上.因此人们有理由将每一积分算程视为一个非平衡统计物理中的准粒子轨迹,从大量积分算程中研究其概率密度分布<sup>[7]</sup>.实际上在国际某些大气气象中心的业务中也是这样做的,即计算集合预报的多种统计量,如均值、方差、概率密度分布等.

一般说来,大气动力学方程均含有耗散和强迫项,因此能量是不守恒的.类似地可以设系统 A,在准粒子数  $N$  和外参量  $x$  不变的情况下和大热源接触而达到平衡.由于系统和热源之间存在热接触,两者可以自由地交换能量,即系统的能量是可变的.设系统处于能量为  $E_i$  的某一微观态的概率  $p_i$  为<sup>[8-12]</sup>

$$p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} \quad (1)$$

其中  $Z$  为归一化常数,其意义在于在自然条件下,绝大多数准粒子均处于能量较低的状态,系统不停地从外界吸取能量,概率分布函数向高能态迁移.当系统处于平衡状态时,它分布在每一个微观态的概

率是相同的,即非平衡物理中的各态历经假设.通过 Lorenz 模型,运用非平衡统计的方法和在每个初值附近通过奇异向量扰动法产生 2000 个初值,将每一积分算程抽象为一个非平衡统计物理中的准粒子轨迹,并求出准粒子的概率  $p_i$  的分布,进一步分析这些概率分布的规律,从中研究集合预报的可预报性.

### 3. 数值试验

Lorenz 模型可写为

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\sigma x_1 + \sigma x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= rx_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1 x_2 - bx_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Lorenz 考虑到物理背景,其值为  $\sigma = 10.0, b = 8/3, 0 < r < \infty$ . 令(2)式左端为零,得 Lorenz 系统的定常解

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, \\ x_1 = \sqrt{b(r-1)}, x_2 = \sqrt{b(r-1)}, x_3 = r-1, \\ x_1 = -\sqrt{b(r-1)}, x_2 = -\sqrt{b(r-1)}, x_3 = r-1. \end{cases} \quad (3)$$

显然,当  $r \leq 1$  时,只有一组实根,即  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . 这意味着无对流状态. 当  $r > 1$  时有三组实根. 经稳定性分析,在  $1 < r < 24.74$  时(2)式有两个对称稳定的平衡态解. 数值计算表明,几乎任意选取的初

值最终都趋近于上述两个稳定的平衡态之一,当然  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  是不稳定的,这里说“几乎”是指仍有个别曲线始终在做不规则的运动. 当  $r > 24.74$  时,在整个相空间内不存在任何稳定的平衡态,此时也是我们大家熟知的混沌状态. 根据 Lorenz 系统的非线性本质,外部参数的选取我们分成两种类型.

#### 3.1. 第一种类型

取外部参数  $\sigma = 10.0, b = 8/3, r = 12 (1 < r < 24.74)$  (2)式的两个稳定的平衡态是  $C_1 = (5.4160, 5.4160, 11), C_2 = (-5.4160, -5.4160, 11)$  ( $0, 0, 0$ ) 是不稳定的平衡态. 同时我们也注意到(2)式具有对称性,即用  $(-x_1, -x_2, x_3)$  可以替代  $(x_1, x_2, x_3)$ , 方程的形式是不变的. 对于第一种类型,我们着重考虑了从  $(0, 0, 0) \rightarrow (-0.5, -0.5, 0.5) \rightarrow (-1.5, -1.5, 3.5) \rightarrow \dots \rightarrow (-5.4160, -5.4160, 11)$  其中的一条轨迹进行分析. 根据集合预报思想我们取不同的初值,在每个初值附近再用奇异向量扰动法产生 2000 个初值,即  $N = 2000$  个准粒子. 定义能量为

$$E = \frac{1}{2} [(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2]. \quad (4)$$

(2)式时间积分间隔为 0.01,意味着实际大气演化 10min. 每积分一步按(4)式搜索  $E_{\min}$ , 定义基态能量为  $E_0 \leq 1.05 E_{\min}$ , 第一激发态  $E_1, 1.05 E_{\min} < E_1 \leq 1.10 E_{\min}$ , 第二激发态  $E_2, 1.10 E_{\min} < E_2 \leq 1.15 E_{\min}$ , 其他激发态以此类推.

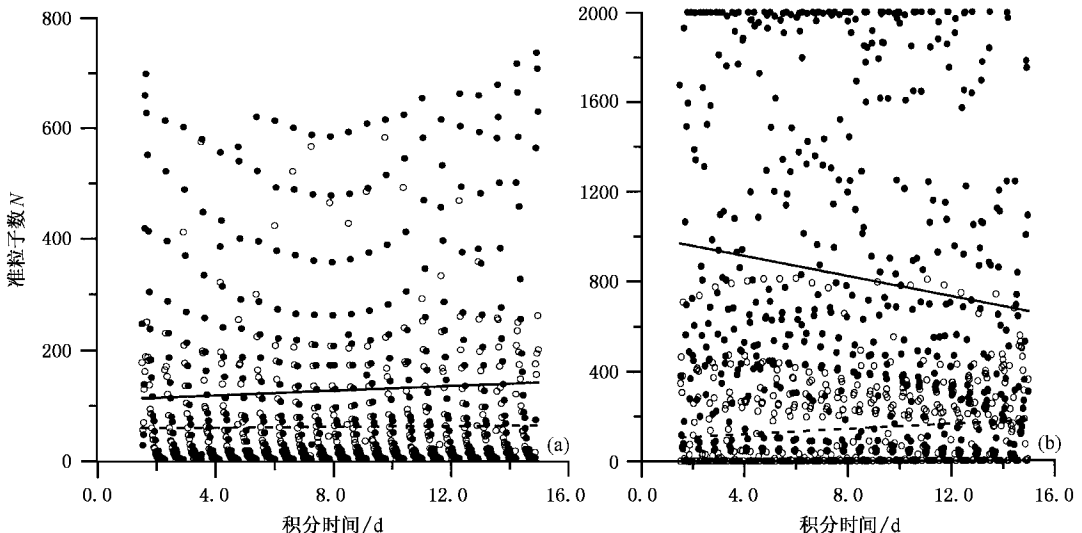


图1 初值在不稳定平衡态附近准粒子数在基态、第一激发态随时间演化 (a)准粒子处于(0.0,0.05,0.05)附近 (b)准粒子处于(-0.5, -0.5,0.5)附近 (实圆,实线为准粒子处于基态及拟合曲线,空圆,虚线为准粒子处于第一激发态及拟合曲线)

图 1 给出了初值在不稳定平衡态附近 2000 个准粒子随能量分布情况,从图中可看出,分布在各个能量态的粒子数,尽管处于基态的粒子数略多于第一激发态,但总体而言差不多.从预报角度而言,可预报性是很小的.这也可从 Lorenz 模型的动力学得到解释  $(0, 0, 0)$  是一个不稳定平衡态,只要一个微

小的扰动,它就会移开这一平衡态,至于向哪个稳定的平衡态  $C_1$  或  $C_2$  移动,完全由初值决定,2000 个准粒子是随机扰动产生的,因此也决定准粒子的分布随时间运动向各个方向,从而弥漫整个相空间<sup>[13,14]</sup>.

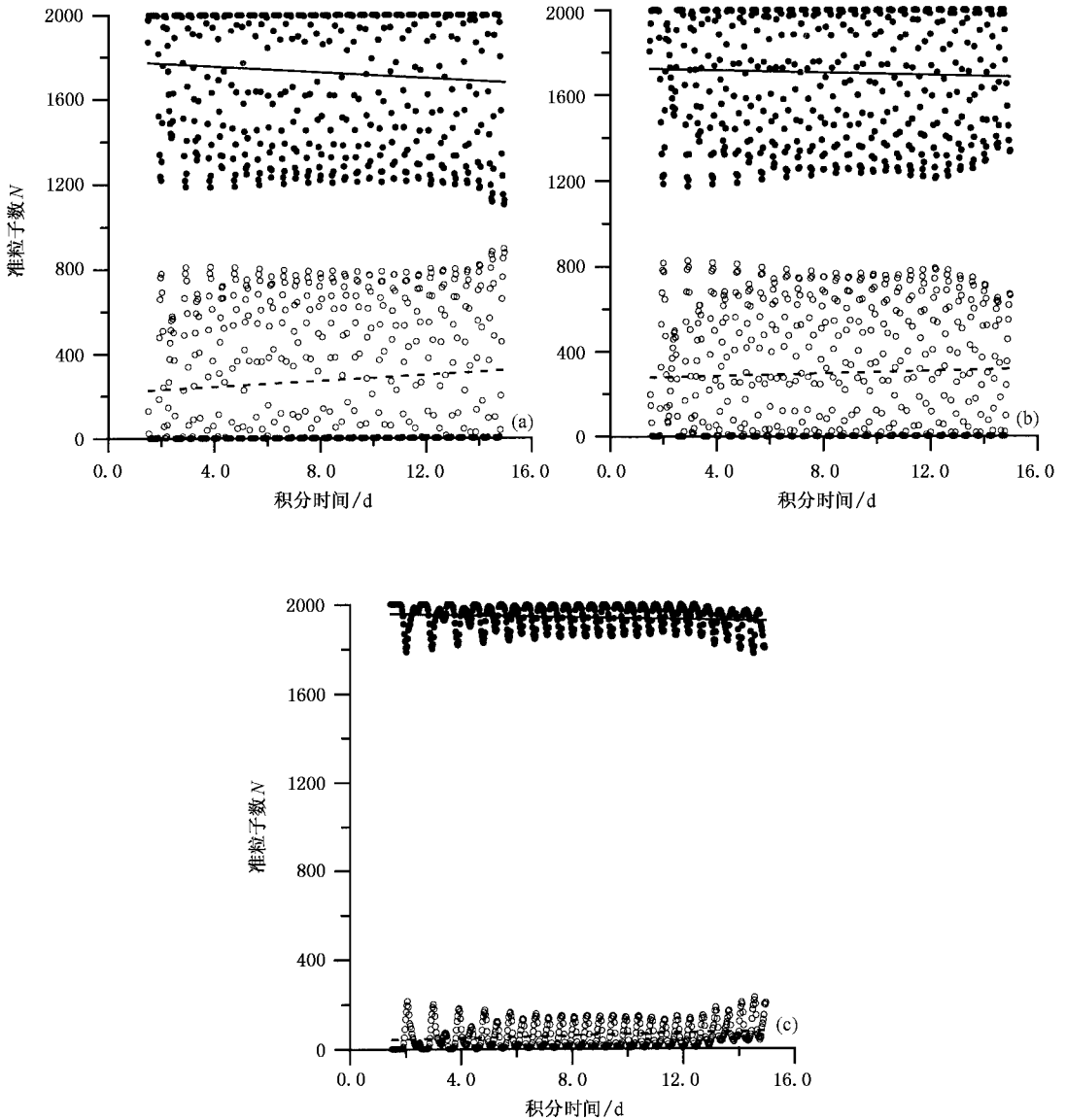


图 2 初值远离非稳定的平衡态准粒子数在基态、第一激发态随时间演化 (a) 准粒子处于  $(-1.0, -1.0, 3.0)$  附近 (b) 准粒子处于  $(-2.0, -2.0, 4.0)$  附近 (c) 准粒子处于  $(-2.5, -2.5, 4.0)$  附近 (实圆, 实线为准粒子处于基态及拟合曲线; 空圆, 虚线为准粒子处于第一激发态及拟合曲线)

对于  $C_2$  是一个稳定的平衡态,图 2 给出了准粒子数远离非稳定的平衡态随时间演化的分布,计算表明循着上述轨迹进行取初值,处于第一激发态的准粒子数远远大于第二激发态,即对于第一种类型,服从正则分布,对于远离非稳定的平衡态,系统的演

化行为完全是可以预测的.在非稳定的平衡态附近,系统的演化行为是由初始值决定的.

### 3.2. 第二种类型

外部参数取  $\sigma = 10.0, b = 8/3, r = 28.0 (r >$

24.74).(2)式存在三个不稳定的平衡态  $(0, 0, 0)$  和  $C_1 = (8.4853, 8.4853, 27)$ ,  $C_2 = (-8.4853, -8.4853, 27)$ . 类似于第一种类型取  $(0, 0, 0) \rightarrow$

$(-0.5, -0.5, 0.5) \rightarrow (-1.5, -1.5, 3.5) \rightarrow \dots \rightarrow (-8.4853, -8.4853, 27)$  其中的一条轨迹进行分析.

图3给出了初值在不稳定平衡态附近2000个

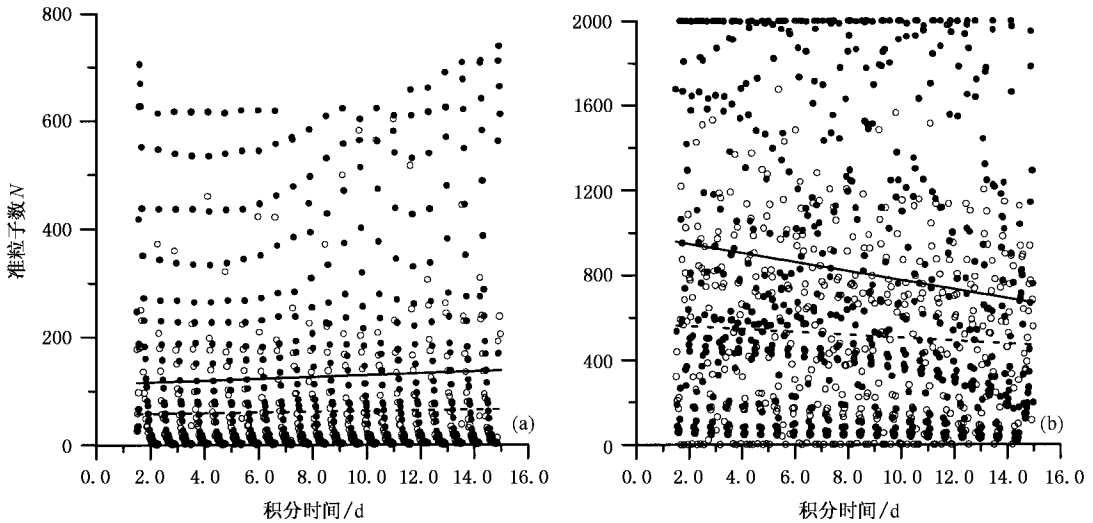


图3 初值在不稳定平衡态附近准粒子数在基态、第一激发态随时间演化 (a)准粒子处于 $(0, 0, 0.05, 0.05)$ 附近 (b)准粒子处于 $(-0.5, -0.5, 0.5)$ 附近(实圆,实线为准粒子处于基态及拟合曲线,空圆,虚线为准粒子处于第一激发态及拟合曲线)

准粒子随能量分布情况,从图中可看出,它类似于第一种类型的分布,2000个准粒子是随机扰动产生的,因此也决定准粒子的分布随时间运动向各个方向,从而弥漫整个相空间.

图4给出了初值远离平衡态时2000个准粒子随能量分布图.在很长的积分时段绝大多数准粒子分布在能量较低的状态,这和统计物理中的正则分布一致,也和集合预报中有关离散度的经验一致.从Lorenz模型的动力学结构知,此时初值虽然经扰动,但它随时间演化的方向是  $C_2 = (-8.4853, -8.4853, 27.0)$  吸引子,即它们发展是有序的,但它又是非稳定的平衡态.若定义处于某态的粒子数占总粒子数60%,认为天气系统是可预报的.进一步分析可知,随着初值取值向吸引子  $C_2$  靠近,可预报时效存在极值,对应图4中所取初值,可预报时效分别为3.0,4.4,5.5,3.0,3.5,2.4天(在图中已经标出);另一方面,准粒子数在空间分布范围越来越小,但不管怎么样,若积分时间超过14天,粒子数几乎不再落在基态和第一激发态,这可视为Lorenz混沌系统可预报性的上限.

在非稳定的平衡态附近即吸引子附近的准粒子

分布随时间的演化是无序的,因此各个微观状态是等概率的,即天气系统的可预报性也是很小的(图5).但它与第一种类型的分布有着本质的不同.

### 4. 结 论

将天气或气候可预报性视为大气态的可几率大小,通过对Lorenz系统的大量积分运算,求得初值所处状态与概率分布的关系.结果表明,当初值位于远离非平衡态附近,则大气是最可预报的,这为集合预报能提高准确率提供了理论论证.当初值位于不稳定平衡态或吸引子附近,则大气的可预报性是很小的.这一结果与集合预报的经验相符,即在具有特定天气形势的某些初始场下集合预报并不比单一初值的预报好.集合预报的数学基础是蒙特卡罗(MCF)法和滞后平均(LAF)法,而集合预报的物理基础是本文首次从非平衡统计物理进行了探讨,它服从于正则分布.

对中国气象科学研究院曹鸿兴研究员和中国科学院院士丑纪范先生的具体指导表示感谢.

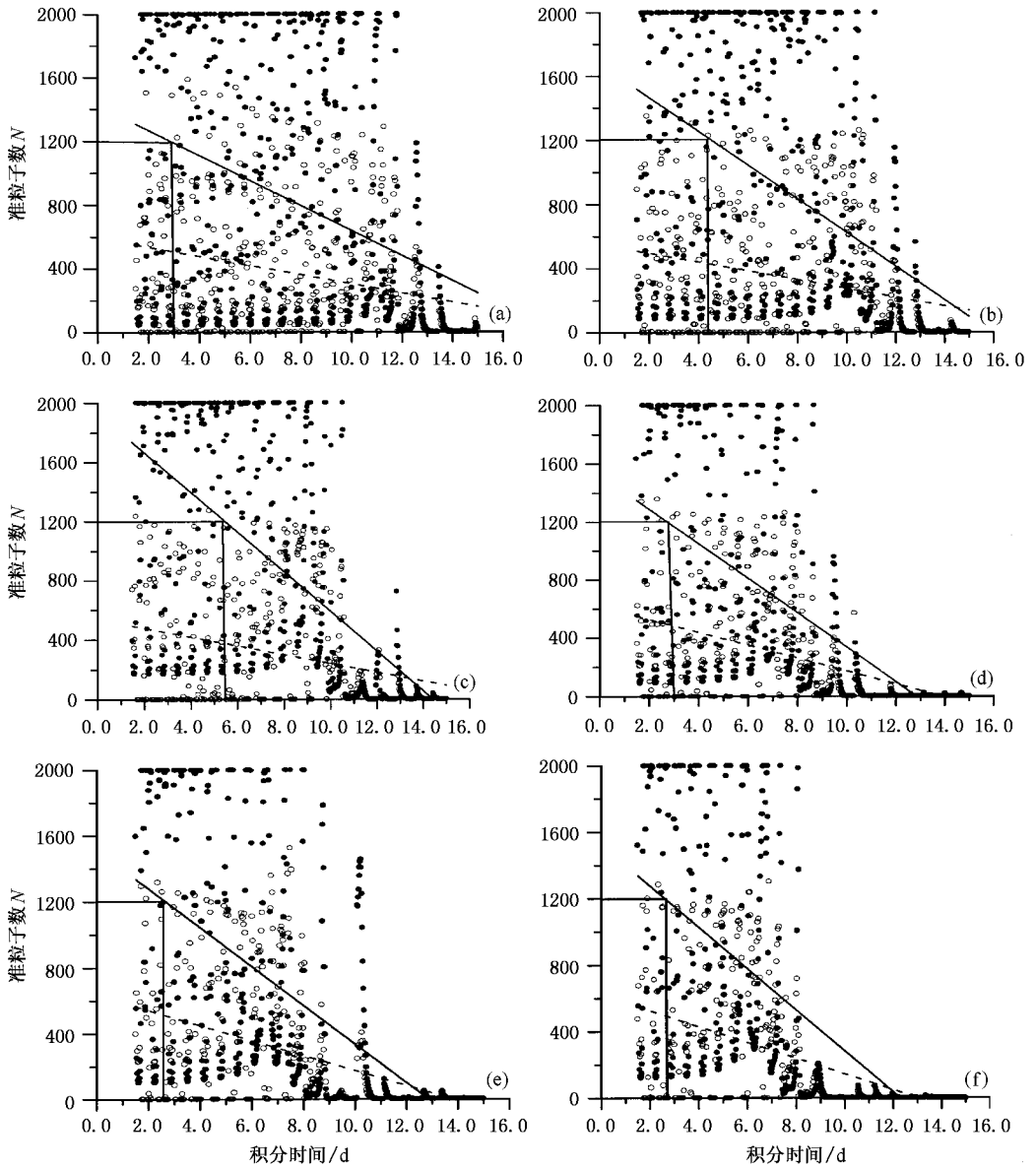


图4 初值远离非稳定的平衡态准粒子数在基态、第一激发态随时间演化 (a)准粒子处于  $(-0.7, -0.7, 0.6)$  附近; (b)准粒子处于  $(-1.0, -1.0, 3.0)$  附近 (c)准粒子处于  $(-1.5, -1.5, 3.5)$  附近 (d)准粒子处于  $(-1.7, -1.7, 5.6)$  附近 (e)准粒子处于  $(-2.0, -2.0, 6.0)$  附近 (f)准粒子处于  $(-2.5, -2.5, 6.5)$  附近 (实圆,实线为准粒子处于基态及拟合曲线,空圆,虚线为准粒子处于第一激发态及拟合曲线)

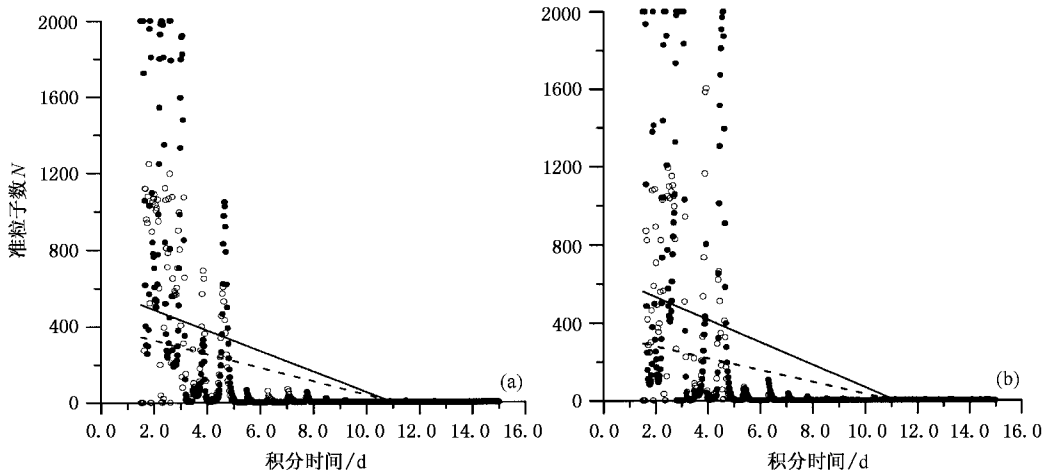


图 5 初值在吸子点  $C_2$  附近准粒子数在基态、第一激发态随时间演化 (a) 准粒子处于  $(-7.5, -7.5, 18.5)$  附近; (b) 准粒子处于  $(-8.4, -8.4, 26.9)$  附近 (实圆, 实线为准粒子处于基态及拟合曲线; 空圆, 虚线为准粒子处于第一激发态及拟合曲线)

- [ 1 ] Hoffman R N and Kalnay E 1983 *Tellus* **35** 100
- [ 2 ] Shi N and Wei F Y 1997 *J. Nanjing Institute of Meteorology* **20** 355 ( in Chinese ) 施能等 1997 南京气象学院学报 **20** 355 ]
- [ 3 ] Zhao H *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 533 ( in Chinese ) 赵 辉等 1999 物理学报 **48** 533 ]
- [ 4 ] Wang L *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 345 ( in Chinese ) 王 磊等 2000 物理学报 **49** 345 ]
- [ 5 ] Cao H X ,Wei F Y 1989 *Meteorology Science and Technology* **1** 32 ( in Chinese ) 曹鸿兴等 1989 气象科技 **1** 32 ]
- [ 6 ] Gao X J ,Chou Z C 2000 *Q. J. Applied Meteorology* **11** 180 ( in Chinese ) 高学杰等 2000 应用气象学报 **11** 180 ]
- [ 7 ] Shi D H 2000 *J. Nature* **22** 323 ( in Chinese ) 史定华 2000 自然杂志 **22** 323 ]
- [ 8 ] Li Y P and Zheng J Z 1982 *Non-equilibrium Dynamics Statistics* ( Beijing :Higher Education Press ) p189 ( in Chinese ) 李沅相等 1982 非平衡统计力学 ( 北京 :高等教育出版社 ) 第 189 页 ]
- [ 9 ] Cao Q J *et al* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2166 ( in Chinese ) 曹庆杰等 1997 物理学报 **46** 2166 ]
- [ 10 ] Yan K Z 2000 *Chin. Phys.* **9** 485
- [ 11 ] Zheng J R 1999 *Chin. Phys.* **8** 721
- [ 12 ] Feng G L 2001 *Chin. Phys.* **10** 1004
- [ 13 ] Risken H 1984 *The Fokker-Planck equation* ( New York :Spring-verlag Berlin ) pp29 - 34
- [ 14 ] Feng G L *et al* 2001 *Phys. Compu.* **18** 34

# On physical basis of ensemble prediction<sup>\*</sup>

Feng Guo-Lin<sup>1,2)</sup> Dong Wen-Jie<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> *Department of Physics Yangzhou University, Yangzhou 225009, China*

<sup>2)</sup> *East Asian Center of the Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica, Beijing 100029, China*

<sup>3)</sup> *National Climatic Center, Beijing 100081, China*

( Received 29 September 2002 ; revised manuscript received 10 January 2003 )

## Abstract

By viewing each integral process in the ensemble prediction as a locus of quasi-particle in the nonequilibrium statistical physics theory, numerical experiments of Lorenz model are performed, and under the circumstance that the initial value of the model is near the equilibrium state of different properties, the temporal evolution of the number of quasi-particles in the ground state and the first excited state is calculated in this paper. The results confirm that if the dynamic system has stable equilibrium states in the whole phase space, the long-range temporal evolutionary behavior of the system in the vicinity of the stable equilibrium states is predictable. If the dynamic system has not any stable equilibrium state in the whole phase space and the initial value of the system is far away from the unstable equilibrium states, then most of the quasi-particles lie in the low-energy state within 1 – 2 weeks, i. e. it is most probable. If the initial value lies in the vicinity of the unstable equilibrium states, the temporal evolution of the system is almost unpredictable. This proves theoretically that the effect of the ensemble prediction obtained after performing a large number of integral processes is better than that from the single integral process of a single initial value. This offers a physical explanation why the ensemble prediction has a higher accuracy.

**Keywords** : ensemble prediction , Lorenz model , regular distribution , probability density distribution

**PACC** : 9260X , 9260Y

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 40275031 and 40231006 ) and the National Key Program for Developing Basic Sciences ( Grant No. G1999043408 ).