第 52 卷 第 10 期 2003 年 10 月
1000-3290/2003/52(10)/2363-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52, No.10, October, 2003

用积分因子方法研究非完整约束系统的守恒律*

张 毅[1)] 葛伟宽[2)]

[1)](苏州科技学院土木工程系,苏州 215011)

[2)](湖州师范学院物理系,湖州 313000)

(2002 年 12 月 26 日收到;2003 年 1 月 23 日收到修改稿)

用积分因子方法研究非线性非完整约束系统的守恒律.给出了非完整约束系统的 Routh 方程的积分因子的定义,研究了守恒量存在的必要条件,建立了系统的守恒定理及其逆定理,并举例说明结果的应用.

关键词:非完整约束系统,积分因子,守恒律,Killing 方程

PACC:0320

1. 引 言

守恒律往往与动力学特征量或运动微分方程在无限小群变换下的不变性相联系.例如,基于 Hamilton 作用量在无限小群变换下不变性的 Noether 对称性[1—6],基于运动微分方程在无限小群变换下不变性的 Lie 对称性[5—11]以及基于力学系统动力学方程的形式在无限小群变换下保持不变的形式不变性[12—15].

1984 年,Djukic 提出了构造非保守动力学系统的守恒律的积分因子方法[16],该方法类似于构造保守系统的能量积分的方法,即通过运动方程乘以适当的积分因子的方法来直接构造系统的守恒律.最近,乔永芬等将该方法作了进一步的推广[17—20].但是,上述研究都将积分因子方法局限于各类系统的正则方程.

本文研究非完整约束系统的 Routh 方程的积分因子与守恒律的构造.定义了非完整约束系统的 Routh 方程的积分因子;基于积分因子的概念,构造出非完整约束系统的守恒律;建立了系统的守恒定理及其逆定理.

2. 非完整系统的 Routh 方程及其积分因子

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s ($s=1,\cdots,n$)来确定.系统的运动受有 g 个理想 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g), \tag{1}$$

约束(1)加在虚位移上的限制为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g). \tag{2}$$

由 d'Alembert-Lagrange 原理和虚位移方程(2),利用 Lagrange 乘子法,可导出非完整约束系统的 Routh 方程[6]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s''+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,\cdots,n), \tag{3}$$

其中 L 为系统的 Lagrange 函数,Q_s'' 为非势广义力,λ_β 为约束乘子.假设系统非奇异,即设 $\det(h_{sk})=\det(\partial^2 L/\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k)\neq 0$,则在运动微分方程积分以前,可由方程(1),(3)求出乘子 λ_β 作为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数,于是右边第二项可表为 $\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\lambda_\beta\partial f_\beta/\partial\dot{q}_s$ 称为系统的广义约束反力.

定义 1 如果不变式

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}-Q_s''-\Lambda_s\right)\xi_s$$

恒等地变为

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}-Q_s''-\Lambda_s\right)\xi_s$$

$$\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\tau+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\tau)-G\right)$$

* 国家自然科学基金(批准号:19972010)及江苏省青蓝工程基金资助的课题.

$$+\mu_s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}-Q_s''-\Lambda_s\right), \tag{4}$$

其中 τ,G 和 μ_s 为 t,$\boldsymbol{q}$,$\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数,则称 $\xi_s=\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非完整约束系统的 Routh 方程(3)的积分因子.

3. 非完整约束系统的守恒定理

联合(3)式和(4)式,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\tau+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\tau)-G\right)$$
$$=-\mu_s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}-Q_s''-\Lambda_s\right). \tag{5}$$

定理 1 如果函数 ξ_s 是 Routh 方程(3)的积分因子,那么非完整约束系统(1),(3)存在守恒量(第一积分),形如

$$I=L\tau+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\tau)-G. \tag{6}$$

对于一个已知非完整系统(1),(3),如果函数 ξ_s 是方程(3)的积分因子,那么每一组函数 ξ_s,τ,G 和 μ_s 一定满足必要条件(5).利用方程(3),条件(5)可写成

$$\frac{\partial L}{\partial t}\tau+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\tau})$$
$$+L\dot{\tau}+(Q_s''+\Lambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\tau)$$
$$-\dot{G}+\Phi=0, \tag{7}$$

其中

$$\Phi=\mu_s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}-Q_s''-\Lambda_s\right). \tag{8}$$

显然,如果函数组 ξ_s,τ,G 和 μ_s 满足必要条件(7),那么沿着已知非完整系统的运动轨线,该函数组使(6)式的右边成为一个常数.于是,有如下定理.

定理 2 对于满足必要条件(7)的每个非奇异函数组 ξ_s,τ,G 和 μ_s,存在已知非完整系统(1),(3)的守恒量(6).

积分方程(7)或用其他特定的方法可以求得函数组 ξ_s,τ,G 和 μ_s.对应于方程(7)的任意一个特解或函数解[16],其中不包含任何积分常数,由定理 2 可以得到非完整系统的一个守恒量(第一积分).

利用上述定理来寻求系统的守恒量,其关键在于找到函数 $\xi_s=\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,$\tau=\tau(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 和 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$.将方程(7)展开,并分解为对 ξ_s,τ 和 G 的一阶偏微分方程,称这些偏微分方程为广义 Killing 方程,解广义 Killing 方程便有可能找到这些函数.由于函数 ξ_s,τ 和 G 不依赖于 $\ddot{q}_s$,因此,令含 $\ddot{q}_s$ 的项的系数和不含 $\ddot{q}_s$ 的项分别为零,可以将方程(7)分离成$(n+1)$个线性偏微分方程,有

$$\frac{\partial L}{\partial t}\tau+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left[\frac{\partial \xi_s}{\partial t}+\frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right.$$
$$\left.-\dot{q}_s\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}+\frac{\partial \tau}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\right]+L\left(\frac{\partial \tau}{\partial t}+\frac{\partial \tau}{\partial q_s}\dot{q}_s\right)$$
$$-\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{\partial G}{\partial q_s}\dot{q}_s+(Q_s''+\Lambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\tau)$$
$$+\mu_s\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial t}+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k-\frac{\partial L}{\partial q_s}-Q_s''-\Lambda_s\right)=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k}-\dot{q}_s\frac{\partial \tau}{\partial \dot{q}_k}\right)+L\frac{\partial \tau}{\partial \dot{q}_k}$$
$$-\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_k}+\mu_s\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}=0\quad(k=1,\cdots,n). \tag{10}$$

(9)式和(10)式是关于$(2n+2)$个未知函数 ξ_s,τ,G 和 μ_s 的$(n+1)$个方程,可称为广义 Killing 方程.由于方程数目小于未知函数的数目,故 ξ_s,τ,G 和 μ_s 不是惟一的,我们可以适当选择 ξ_s,τ,G 和 μ_s,而得到不同的守恒量.

当 $\mu_s=0(s=1,\cdots,n)$时,上述广义 Killing 方程与根据 Noether 理论得到的广义 Killing 方程[6]相同,而在 Noether 理论中,函数 G 称为规范变更函数,且时间和广义坐标的单参数无限小变换为

$$t^*=t+\varepsilon\tau(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{11}$$

其中 ε 为无限小参数.Noether 守恒量的形式也与守恒量(6)式一致.因此,本文方法中有着基础重要性的积分因子 ξ_s 和函数 τ,G 在 Noether 理论中有非常清晰的物理意义.

4. 逆定理

假设非完整约束系统(1),(3)有积分

$$I=I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\mathrm{const}. \tag{12}$$

显然,积分(12)与相应的积分因子 ξ_s 和函数 τ,G 必须与方程(7)相容.从方程(6)计算$\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_s}$,并将所得结

果代入(10)式,得到

$$\xi_s = \tilde{h}_{sk}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} + \dot{q}_s\tau + \mu_s \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{13}$$

其中 $\tilde{h}_{sk}h_{kl} = \delta_{sl}$. 令积分(12)等于守恒量(6),即

$$L\tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\tau) - G = I. \tag{14}$$

从(14)式,有

$$G = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\tilde{h}_{sk}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} + \mu_s\right) + L\tau - I. \tag{15}$$

由此可得下面的定理.

定理 3　如果非完整系统(1),(3)有一个第一积分(12),则与此积分相应的积分因子 ξ_s 和函数 τ, G, μ_s 由关系(13)和(15)确定.

代数方程(13)和(15)是关于($2n+2$)个函数的($n+1$)个方程,显然函数 ξ_s, τ, G, μ_s 是不惟一的. 例如,对应于同一个守恒量,通过适当选取其中的($n+1$)个函数,我们可以得到不同的积分因子 ξ_s.

5. 算　　例

例　研究 Appell-Hamel 模型[6]. 系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - mgq_3, \tag{16}$$

非完整约束为

$$f = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \dot{q}_3^2 = 0, \tag{17}$$

试研究系统的守恒量.

首先,研究正问题,求系统的守恒量. 方程(3)给出

$$m\ddot{q}_1 = 2\lambda\dot{q}_1, m\ddot{q}_2 = 2\lambda\dot{q}_2,$$
$$m\ddot{q}_3 = -mg - 2\lambda\dot{q}_3, \tag{18}$$

由方程(17)和(18)解得

$$\lambda = -\frac{mg}{4\dot{q}_3}, \tag{19}$$

于是

$$m\ddot{q}_1 = -\frac{mg\dot{q}_1}{2\dot{q}_3},$$
$$m\ddot{q}_2 = -\frac{mg\dot{q}_2}{2\dot{q}_3},$$
$$m\ddot{q}_3 = -mg + \frac{1}{2}mg. \tag{20}$$

广义 Killing 方程(9),(10)给出

$$-mg\xi_3 + \left[-\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - mgq_3\right] \times\left(\frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{\partial\tau}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\tau}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial\tau}{\partial q_3}\dot{q}_3\right)$$
$$+ m\dot{q}_1\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial t} + \frac{\partial\xi_1}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\xi_1}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial\xi_1}{\partial q_3}\dot{q}_3\right)$$
$$+ m\dot{q}_2\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial t} + \frac{\partial\xi_2}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\xi_2}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial\xi_2}{\partial q_3}\dot{q}_3\right)$$
$$+ m\dot{q}_3\left(\frac{\partial\xi_3}{\partial t} + \frac{\partial\xi_3}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\xi_3}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial\xi_3}{\partial q_3}\dot{q}_3\right)$$
$$- \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial q_1}\dot{q}_1 - \frac{\partial G}{\partial q_2}\dot{q}_2 - \frac{\partial G}{\partial q_3}\dot{q}_3$$
$$- \frac{1}{2}mg\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_3}(\xi_1 - \dot{q}_1\tau) - \frac{1}{2}mg\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_3}(\xi_2 - \dot{q}_2\tau)$$
$$+ \frac{1}{2}mg(\xi_3 - \dot{q}_3\tau) + \frac{1}{2}mg\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_3}\mu_1$$
$$+ \frac{1}{2}mg\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_3}\mu_2 + \frac{1}{2}mg\mu_3 = 0, \tag{21}$$

$$m\dot{q}_1\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial\dot{q}_k} - \dot{q}_1\frac{\partial\tau}{\partial\dot{q}_k}\right)$$
$$+ m\dot{q}_2\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial\dot{q}_k} - \dot{q}_2\frac{\partial\tau}{\partial\dot{q}_k}\right)$$
$$+ m\dot{q}_3\left(\frac{\partial\xi_3}{\partial\dot{q}_k} - \dot{q}_3\frac{\partial\tau}{\partial\dot{q}_k}\right)$$
$$+ L\frac{\partial\tau}{\partial\dot{q}_k} - \frac{\partial G}{\partial\dot{q}_k} + \mu_1\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}(m\dot{q}_1)$$
$$+ \mu_2\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}(m\dot{q}_2) + \mu_3\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}(m\dot{q}_3) = 0,$$
$$(k = 1,2,3). \tag{22}$$

方程(21),(22)有解

$$\tau = -1, \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0, G = 0,$$
$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0, \tag{23}$$

$$\tau = 0, \xi_1 = \xi_2 = 0, \xi_3 = 2, G = -mgt,$$
$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0, \tag{24}$$

$$\tau = 0, \xi_1 = \xi_2 = 0, \xi_3 = \dot{q}_3, G = -mgq_3,$$
$$\mu_1 = \mu_2 = 0, \mu_3 = -\dot{q}_3, \tag{25}$$

$$\tau = 0, \xi_1 = \frac{1}{2}\dot{q}_1, \xi_2 = \frac{1}{2}\dot{q}_2, \xi_3 = \frac{1}{2}\dot{q}_3,$$
$$G = -mgq_3, \mu_1 = -\frac{1}{2}\dot{q}_1, \mu_2 = -\frac{1}{2}\dot{q}_2,$$
$$\mu_3 = -\frac{1}{2}\dot{q}_3. \tag{26}$$

由于(23)和(24)式中 $\mu_k = 0$ ($k = 1,2,3$),因此解(23)和(24)相应于系统的 Noether 对称性,其中 τ, ξ_k

分别对应 Noether 理论中无限小变换的时间和空间的无限小生成元,G 对应规范变更函数.而在(25)和(26)式中,由于 μ_k 不全为零,因此与系统的 Noether 对称性没有上述对应关系.根据定理 1 和定理 2,相应于解(23)—(26),系统分别存在如下守恒量:

$$I_1 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + mgq_3 = \text{const}. \tag{27}$$

$$I_2 = 2m\dot{q}_3 + mgt = \text{const}. \tag{28}$$

$$I_3 = m\dot{q}_3^2 + mgq_3 = \text{const}. \tag{29}$$

$$I_4 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + mgq_3 = \text{const}. \tag{30}$$

可以看到,解(23)和(26)对应于同一个守恒量,有 $I_1 = I_4$.这表明一个守恒量可以对应不同的积分因子,其中有些积分因子可以有清晰的物理意义,例如对应系统的 Noether 对称性.

其次,研究逆问题,根据已知积分求相应的积分因子.假设系统有积分

$$I = m\dot{q}_3^2 + mgq_3 = \text{const}. \tag{31}$$

方程(13)和(15)分别给出

$$\xi_1 = \dot{q}_1\tau + \mu_1,$$

$$\xi_2 = \dot{q}_2\tau + \mu_2,$$

$$\xi_3 = 2\dot{q}_3 + \dot{q}_3\tau + \mu_3, \tag{32}$$

$$G = m\dot{q}_1\mu_1 + m\dot{q}_2\mu_2 + m\dot{q}_3\mu_3 + L\tau - m\dot{q}_3^2 - mgq_3. \tag{33}$$

上述四个方程中含有 8 个未知量,因此解不惟一,可以适当选取其中的 4 个量来得到余下的 4 个函数.例如,取

$$\tau = 0,\ \mu_1 = \mu_2 = 0,\ \mu_3 = \dot{q}_3, \tag{34}$$

则有

$$\xi_1 = \xi_2 = 0,\ \xi_3 = \dot{q}_3, G = -mgq_3. \tag{35}$$

[1] Noether A E 1918 *Math*. *Phys*. **KI II** 235

[2] Djukic Dj S and Vujanovic B 1975 *Acta Mechanica* **23** 17

[3] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) p1 (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社) 第 1 页]

[4] Zhang Y and Mei F X 2000 *Applied Mathematics and Mechanics* **21** 59

[5] Zhao Y Y and Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) p1 (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与守恒量(北京 科学出版社) 第 1 页]

[6] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) p1 (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京:科学出版社) 第 1 页]

[7] Bluman G W and Kumei S 1989 *Symmetries and Differential Equations* (New York: Springer-Verlag)

[8] Lutzky M 1979 *J*. *Phys*. *A*: *Math*. *Gen*. **12** 973

[9] Prince G E and Elizer C J 1981 *J*. *Phys A*: *Math*. *Gen*. **14** 587

[10] Zhao Y Y 1994 *Acta Mech*. *Sin*. **26** 380 (in Chinese) [赵跃宇 1994 力学学报 **26** 380]

[11] Zhang Y and Mei F X 2000 Chin. *Sci*. *Bull*. **45** 1354

[12] Mei F X 2000 *Journal of Beijing Institute of Technology* **9** 120

[13] Wang S Y and Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 373

[14] Luo S K 2002 *Chinese Physics Letters* **19** 449

[15] Ge W K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 939 (in Chinese) [葛伟宽 2002 物理学报 **51** 939]

[16] Djukic Dj S and Sutela T 1984 *Int*. *J*. *Non-Linear Mechanics* **19** 331

[17] Qiao Y F, Zhang Y L and Zhao S H 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1661 (in Chinese) [乔永芬、张耀良、赵淑红 2002 物理学报 **51** 1661]

[18] Qiao Y F, Meng J and Zhao S H 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 859

[19] Qiao Y F, Zhang Y L and Han G C 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 988

[20] Li R J, Qiao Y F and Liu Y 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 760

Integrating factors and conservation laws for non-holonomic dynamical systems*

Zhang Yi[1)] Ge Wei-Kuan[2)]

[1)] (*Department of Civil Engineering*, *University of Science and Technology of Suzhou*, *Suzhou* 215011, *China*)

[2)] (*Department of Physics*, *Huzhou Teachers College*, *Huzhou* 313000, *China*)

(Received 26 December 2002; revised manuscript received 23 January 2003)

Abstract

In this paper, we present a general approach to the construction of conservation laws for nonlinear non-holonomic dynamical systems by finding corresponding integrating factors. The definition of integrating factors for the Routh equations of non-holonomic systems is given, and the necessary conditions for the existence of conserved quantities of the non-holonomic dynamical systems are studied in detail. The conservation theorem and its inverse for the systems are established, and an example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: non-holonomic system, integrating factor, conservation theorem, Killing equation

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19972010) and the 'Qing Lan' Project Foundation of Jiangsu Province of China.