

# 一种基于 washout 滤波器技术的参数受扰混沌系统的控制

张 浩 马西奎

( 西安交通大学电气工程学院 , 西安 710049 )

( 2003 年 1 月 8 日收到 2003 年 1 月 27 日收到修改稿 )

基于 washout 滤波器技术的混沌控制方法不仅能用于参数不变的混沌系统的控制 , 还可用于参数受扰动时的混沌系统的控制 . 给出了参数受扰动情况下基于 washout 滤波器技术的控制器设计的一个充分条件 . 数值仿真表明 , 该控制方法易于实现、控制代价小、能使原混沌系统的不稳定不动点稳定 , 而且具有一定的鲁棒性 , 很适合于工程应用 .

关键词 : 混沌控制 , 参数受扰动 , washout 滤波器

PACC : 0545

## 1. 引言

自 Ott 等提出 OGY 方法实现了对混沌系统的控制以来<sup>[1]</sup> , 混沌系统的控制及其控制方法的研究已引起了许多学者的极大关注 . 目前已有许多重要的论著发表 , 建立了数种典型、有效的控制方法<sup>[2-9]</sup> , 但主要是针对系统参数未受扰动的混沌系统 , 而对系统参数受扰动时的混沌系统研究得还比较少 , 有些控制方法尚未考虑控制代价或不便于在工程中实现 . 实际上 , 一个混沌系统在运行中它的系统参数总会受到干扰 , 在这种情况下 , 工程控制上有时只要求将系统的不稳定不动点变为稳定不动点 . 针对这种情况 , 本文提出了基于 washout 滤波器技术的混沌控制方法 , 并给出了参数受扰动情况下控制器设计的一个充分条件 . 该方法不仅可用于参数不变的混沌系统的控制 , 还可用于参数受扰动时的混沌系统的控制 . 稳定性分析和数值仿真表明 , 基于 washout 滤波器技术的混沌控制方法具有易于实现、控制代价小、可以使原混沌系统的不稳定不动点稳定 , 而且具有一定的鲁棒性 , 很适合于工程应用等优点 .

## 2. 基于 washout 滤波器的混沌控制方法

washout 滤波器是一种广泛应用于电力系统和航空系统的高通滤波器<sup>[10,11]</sup> . 近年来 , Abed , Wang 和

Hassouneh 等人将这种滤波器应用于混沌系统的分岔控制<sup>[12,13]</sup> . 其目的是当系统存在不确定性因素或受到扰动时可以维持系统的平衡工作点 , 提高系统的抗干扰能力 . washout 滤波器的传递函数为  $G(s) = s(s + d)^{-1}$  , 而状态方程表达式为

$$\begin{cases} \dot{w} = x - dw, \\ v = x - dw, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $w$  为 washout 滤波器的状态 ,  $x$  为其输入 , 一般为受控系统状态 ,  $v$  为 washout 滤波器的输出 .  $d$  为时间常数 , 当  $d > 0$  时 , 工作在稳定状态 ; 当  $d < 0$  时 , 工作在不稳定状态 .

### 2.1. 控制方法

考虑具有如下形式的非线性自治系统 :

$$\dot{x} = ax + f(x) + bu, \quad (2)$$

其中  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$  为系统的状态变量 ,  $a$  为  $n \times n$  的不含状态变量的系统矩阵 ,  $b$  为一合适的常数矩阵 ,  $u$  为系统的控制输入 , 且  $u(0) = 0$  .  $f(x) = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$  且  $f_i$  为一连续函数 , 并且关于  $x$  满足 Lipschitz 条件 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) , 即设  $\forall x, y \in R^n$  ,  $\exists 0 < c < 1$  , 使得  $\|f_i(y) - f_i(x)\| \leq c \|y - x\|$  成立 .

设  $\tilde{x}$  为该系统混沌吸引子中的一个不稳定的周期轨道 (UPO) , 则其一定满足 (2) 式 , 即

$$\dot{\tilde{x}} = a\tilde{x} + f(\tilde{x}). \quad (3)$$

控制器  $u$  的设计 : 一般选择  $m \leq n$  个状态变

量,假设选取前  $m$  个状态变量,对所选的每一个状态变量设计一个 washout 滤波器. 具体如下:

$$\begin{cases} \dot{w} = x - dw, \\ v = x - dw, \\ u = kg(v), \end{cases} \quad (4)$$

其中  $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ ,  $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$ ,  $d$  为一对角矩阵, 即  $d = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_m)$ ,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ ,  $k$  为反馈矩阵,  $g(\cdot) = (g_1(\cdot), g_2(\cdot), \dots, g_m(\cdot))^T$ , 且  $g_l(\cdot)$  为一连续可微函数 ( $l = 1, 2, \dots, m$ ).

选择合适的控制参数  $k, d$  和  $g(\cdot)$  可以稳定原混沌系统的某个不稳定周期轨道, 即满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x - \tilde{x}\| = 0$ .

## 2.2. 控制器设计

引理 1 (Lyapunov 一次近似性原理)<sup>[14]</sup> 对于系统  $\dot{x} = f(x)$ , 假设  $f(x)$  在  $x=0$  处的 Taylor 展开式为  $f(x) = Ax + h(x)$ , 其中  $A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=0}$ . 如果  $h(x)$  在  $x=0$  的邻域内是  $x$  的高阶无穷小, 则  $\dot{x} = Ax$  的零解指数稳定性蕴含着原系统的零解指数稳定性.

由于当状态  $x$  到达不动点  $\tilde{x}$  时 washout 滤波器输出为零, 因此可知滤波器的输出必为零. 即

$$\begin{cases} \tilde{w} = \tilde{x} / d, \\ \dot{\tilde{w}} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

这样, 可将滤波器的状态引入到受控制系统中, 那么受控系统的状态为  $X = (x \ w)^T$ , 则受控系统可写成

$$\dot{X} = AX + F(X) + BU, \quad (6)$$

其中  $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ I & d \end{bmatrix}$ ,  $B = [b \ 0]^T$ ,  $F(\cdot) = [f(\cdot) \ 0]^T$ ,  $U = [u \ 0]^T$ .

由(3)式和(5)式可得

$$\dot{\tilde{X}} = A\tilde{X} + F(\tilde{X}), \quad (7)$$

其中  $\tilde{X} = (x - \tilde{x} \ w - \tilde{w})^T$ . (6)式与(7)式左右两边分别相减, 并对  $F(X)$  在不动点  $\tilde{X} = (\tilde{x} \ \tilde{w})^T$  处进行 Taylor 级数展开, 可得

$$\dot{e} = A_e e + f_e(e) + BU(e), \quad (8)$$

其中  $e = (x - \tilde{x} \ w - \tilde{w})^T$ ,  $A_e$  为  $A$  与  $F(X)$  的 Taylor 展开式的一次项系数矩阵之和,  $f_e(e)$  为  $F(X)$  的 Taylor 展开式的高次项.

假设  $\lim_{e \rightarrow 0} \frac{\|f_e(e)\|}{\|e\|} = 0$ , 即  $f_e(e)$  在  $e=0$  的邻

域内是  $e$  的高阶无穷小, 根据引理 1 可知, 系统(8)的稳定性可由系统

$$\dot{e} = A_e e + BU \quad (9)$$

来决定.

下面就系统参数无扰动和受扰动两种情况, 分别进行讨论.

1) 系统参数无扰动时(即  $A_e$  为常矩阵)

设可通过选取合适的  $B$  来使得(9)式满足  $Q = [A_e \ A_e B \ A_e B^2 \ A_e B^3 \ \dots \ A_e B^{n-1}]$  为满秩矩阵, 那么根据线性系统理论, 若取  $g_l(\cdot)$  为线性的多项式( $l = 1, 2, \dots, m$ ) 则可以对矩阵  $A$  的极点进行配置, 镇定原系统.

2) 系统参数受扰动时(即  $A_e = A_1 + \epsilon A_2$ )

当系统参数受扰动时,  $A_e = A_1 + \epsilon A_2$ , 其中  $A_1$  为经过极点配置后的矩阵;  $\epsilon A_2$  为扰动矩阵;  $\epsilon$  为扰动系数, 通常为一比较小的正数.

假定矩阵  $A_1$  的初等因子都是线性的, 这时存在  $A$  的右特征向量  $x^{(i)}$  与左特征向量  $y^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 满足

$$y^{(i)T} x^{(j)} = 0, i \neq j \text{ 和 } \|x^{(i)}\| = \|y^{(i)}\| = 1, \quad (10)$$

则

$$s_i = x^{(i)T} y^{(i)},$$

且  $|s_i| = |x^{(i)T} y^{(i)}| \leq \|x^{(i)}\| \|y^{(i)}\| = 1,$

$$(11)$$

$$\beta_{ij} = y^{(i)T} A_2 x^{(j)}, \quad (12)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ .

引理 2<sup>[15]</sup> 设  $n$  阶矩阵  $A_1$  为简单矩阵, 则矩阵  $A = A_1 + \epsilon A_2$  的特征值  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 位于圆盘  $d_i = \left\{ z \mid |z - \lambda_i - \epsilon \beta_{ii} / s_i| \leq \epsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\beta_{ij} / s_i| \right\}$  的并集内.

定理 假设矩阵  $A_1$  的初等因子都是线性的且所有特征值都具有负实部, 那么  $A_e = A_1 + \epsilon A_2$  ( $\epsilon$  为一小正数) 在参数受扰动时仍能保持稳定的充分条件为

$$-\operatorname{Re}(\lambda_i + \epsilon \beta_{ii} / s_i) > \epsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\beta_{ij} / s_i| \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (13)$$

证明 由矩阵  $A_1$  的初等因子都是线性的, 则存在一个非奇异矩阵  $P$  和对角阵  $D$  使得  $A_1 = PDP^{-1} = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)P^{-1}$ . 因而, 由前面的

定义,则  $P$  的各列平行于  $A$  的右特征向量  $x^{(i)}$  和  $P^{-1}$  的各列平行于  $A$  的左特征向量  $y^{(i)}$ . 将  $x^{(i)}, y^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 标准化, 并使其满足(10)式. 再把  $x^{(i)}$  作为  $P$  的第  $i$  列,  $y^{(i)^T}/s_i$  作为  $P^{-1}$  的第  $i$  行, 则由(10)式和(11)式可知  $PP^{-1} = I$  成立. 于是, 利用(12)式以及  $x^{(i)}, y^{(i)}$  的定义, 可得

$$\begin{aligned} P^{-1}(A_1 + \epsilon A_2)P &= D + \epsilon P^{-1}A_2P \\ &= \text{diag}(\lambda_i) + \epsilon \begin{bmatrix} \beta_{11}/s_1 & \beta_{12}/s_1 & \dots & \beta_{1n}/s_1 \\ \beta_{21}/s_2 & \beta_{22}/s_2 & \dots & \beta_{2n}/s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1}/s_n & \beta_{n2}/s_n & \dots & \beta_{nn}/s_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由引理 2 可得, 矩阵  $A_e = A_1 + \epsilon A_2$  的特征值  $\lambda_i(\epsilon)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 位于圆盘

$$d_i = \left\{ z \mid z - \lambda_i - \epsilon \beta_{ii}/s_i \leq \epsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\beta_{ij}/s_i| \right\}$$

的并集内.

因矩阵  $A_1$  的所有特征值都具有负实部, 即  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ , 而  $-\operatorname{Re}(\lambda_i + \epsilon \beta_{ii}/s_i) > \epsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\beta_{ij}/s_i| \geq 0$ , 即  $\operatorname{Re}(\lambda_i + \epsilon \beta_{ii}/s_i) < 0$ , 所以所有圆盘的圆心都处于左半平面. 又因  $|\operatorname{Re}(\lambda_i + \epsilon \beta_{ii}/s_i)| = -\operatorname{Re}(\lambda_i + \epsilon \beta_{ii}/s_i) > \epsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\beta_{ij}/s_i|$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 成立, 则所有圆盘的圆心距虚轴的距离大于半径. 故所有圆盘都处于左半平面, 即矩阵  $A_e$  的所有特征值都有负实部.

因此有结论:  $A_e = A_1 + \epsilon A_2$  ( $\epsilon$  为一小正数) 在参数受扰动时仍能保持稳定的充分条件为  $-\operatorname{Re}(\lambda_i + \epsilon \beta_{ii}/s_i) > \epsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |\beta_{ij}/s_i|$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

### 3. 数值实例与结果分析

像 Chen's 系统、Lorenz 系统和 Rössler 系统等, 都可采用上述控制方法实现控制. 不失一般性, 我们以 Chen's 系统为例, 说明基于 washout 滤波器技术的控制方法在参数受扰混沌系统控制中的应用. Chen's 系统是 Chen 在研究混沌系统的反控制时发现的一种新的混沌吸引子, 如图 1 所示. 它在拓扑结构上比 Lorenz 和 Rössler 吸引子更为复杂<sup>[16,17]</sup>, 其表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = (c - a)x - xz + cy, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$

其中  $a = 35, b = 3, c = 28$ .

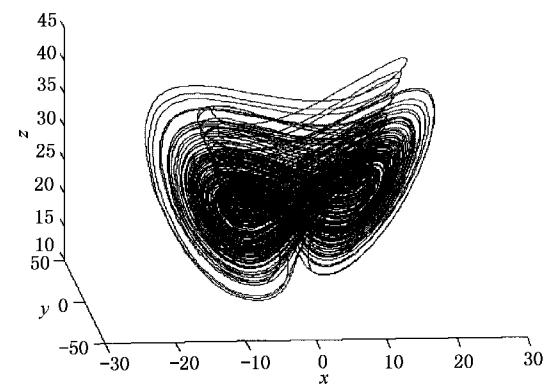


图 1 Chen's 吸引子

现在根据上面介绍的控制器设计方法进行控制器设计. 不失一般性, 只对状态  $y$  设计一个 washout 滤波器来实现对 Chen's 系统的控制. 具体如下

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = (c - a)x - xz + cy + u, \\ \dot{z} = xy + (-b + \epsilon)z, \\ \dot{w} = y - dw, \\ v = y - dw, \\ u = kv. \end{cases} \quad (14)$$

假设将原系统的不稳定不动点  $(0, 0, 0)$  变成稳定的不动点. 现在对系统参数无扰动和受扰动两种情况分别进行讨论.

#### 1) 系统参数无扰动时( $\epsilon = 0$ )

我们可以采用上面介绍的方法, 将受控 Chen's 系统变换为(6)式的形式. 即

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = (A_1 + \epsilon A_2) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -xz \\ xy \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ c - a & c + k & 0 & -kd \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -d \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$a, b$  和  $c$  为系统参数.

当取  $k = -36, d = -0.2$ , 可求得  $A_1$  的四个特

征值分别为  $-0.2875$ ,  $-3$ ,  $-21.256 + 7.717i$  和  $-21.256 - 7.717i$ , 可见受控系统是稳定的.

当利用 MATLAB 进行数值仿真时, 首先随机地给系统状态取初始值且  $u = 0$ , 然后让系统运行  $10s$ , 以确保其进入混沌吸引子中, 最后加入控制  $u$ , 观察控制结果, 如图 2 所示. 可以看出, 加入控制后能使原混沌系统的不稳定不动点  $(0, 0, 0)$  变成稳定的不动点. 而且当到达这样的不动点时, 控制  $u$  将趋于零.

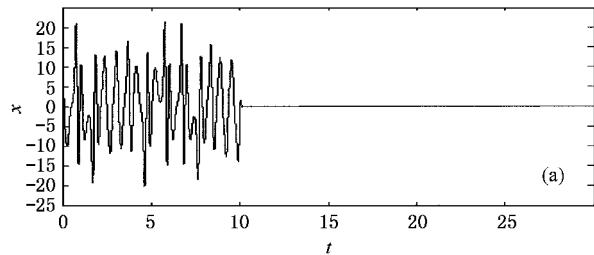
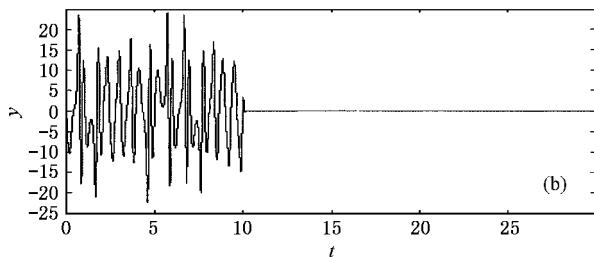
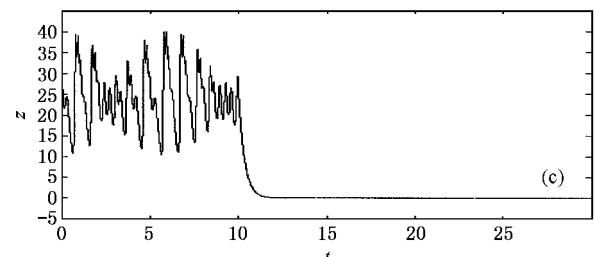
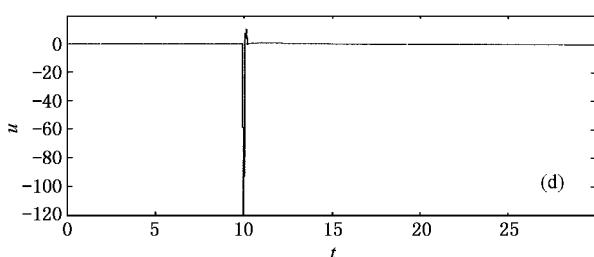
(a)受控制系统的状态  $x$ (b)受控制系统的状态  $y$ (c)受控制系统的状态  $z$ (d)受控制系统的控制输入  $u$ 

图 2 系统参数无扰动时受控混沌系统状态及控制输入

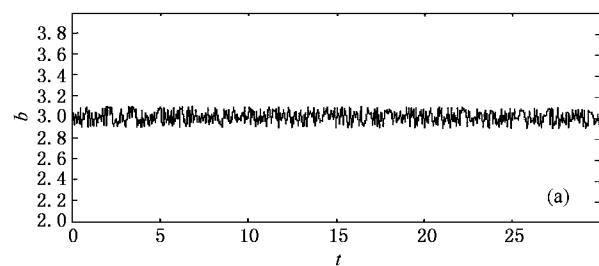
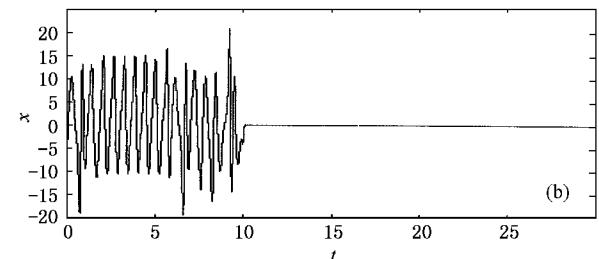
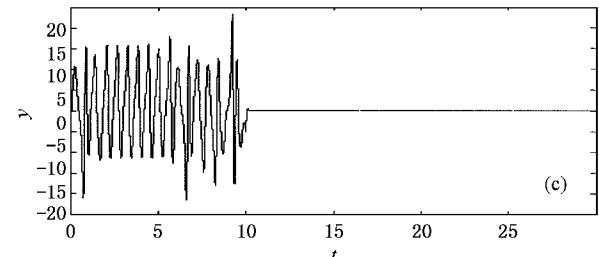
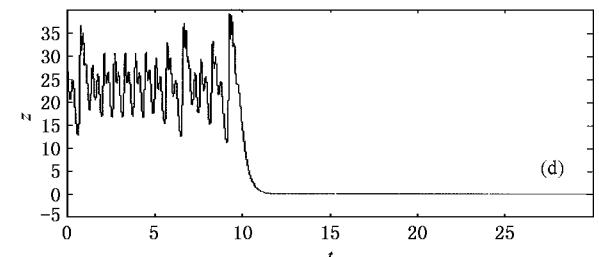
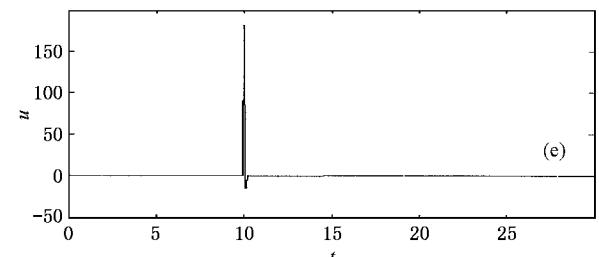
(a)参数  $b$  受扰动时的情形(b)参数  $b$  受扰时受控制系统的状态  $x$ (c)参数  $b$  受扰时受控制系统的状态  $y$ (d)参数  $b$  受扰时受控制系统的状态  $z$ (e)参数  $b$  受扰时受控制系统的控制输入  $u$ 

图 3 系统参数受扰动时受控混沌系统状态及控制输入

## 2 )系统参数受扰动时( $\epsilon \neq 0$ )

对  $k = -36, d = -0.2$  时 ,假设只有参数  $b$  受到幅值为  $\epsilon = 0.1$  的随机噪声的干扰 ,根据前面给出的充分条件进行分析 ,可知该混沌系统在参数  $b$  受扰动时 ,仍保持稳定 . 数值仿真结果如图 3 所示 . 可以看出 ,该混沌系统在参数  $b$  受扰动时的稳定性与理论分析相吻合 ,具有一定的鲁棒性 ,并且当受控系统到达不动点(0,0,0)时 ,控制  $u$  趋于零 ,控制代价小 .

## 4. 结 论

基于 washout 滤波器技术的控制方法不仅可实

现对无参数扰动时的混沌系统的控制 ,而且在系统参数受扰动的情况下也能实现对混沌系统的控制 . 以 Chen 's 系统为例给出的数值结果 ,表明了方法的有效性 . 基于 washout 滤波器技术的控制方法具有以下优点 :1 )控制代价小 ,即在达到混沌系统的 UPO 时 ,控制器输出为零 2 )结构简单 ,易于工程实现 3 )巧妙地利用了混沌系统的某些特性 ,将其转化为线性系统来研究 ,这样不仅便于系统的分析 ,而且有利于采用线性控制理论来指导控制器的设计 4 )具有一定的鲁棒性 .

- [ 1 ] Ott E ,Grebogi and York J A 1990 *Phys . Rev . Lett .* **64** 1196
- [ 2 ] Chen G and Dong X 1993 *IEEE Transactions on Circuits System-I* **40** 591
- [ 3 ] Chen G , Chaos 1997 *Soltions and Fractals* , **8** 1461
- [ 4 ] Li Z and Han C Z 2001 *Chin . Phys .* **10** 494
- [ 5 ] Li L X et al 2001 *Chin . Phys .* **10** 796
- [ 6 ] Gao J F et al 1999 *Acta . Phys . Sin .* **48** 1618 ( in Chinese ) 高金峰等 1999 物理学报 **48** 1618 ]
- [ 7 ] Chen S H et al 2002 *Acta . Phys . Sin .* **51** 749 ( in Chinese ) 陈士华等 2002 物理学报 **51** 749 ]
- [ 8 ] Luo X S et al 2002 *Acta . Phys . Sin .* **51** 988 ( in Chinese ) 罗晓曙等 2002 物理学报 **51** 988 ]
- [ 9 ] Tao C H et al 2002 *Acta . Phys . Sin .* **51** 1497 ( in Chinese ) 陶朝海等 2002 物理学报 **51** 1497 ]
- [ 10 ] Anderson P M and Fouad A A 1977 *Power System Control and Stability* ( Ames , IA : Iowa State University Press )
- [ 11 ] Stevens B L and Lewis F L 1992 *Aircraft Control and Simulation* ( New York : Wiley )
- [ 12 ] Wang H O and Abed E H 1995 *Automatica* **31** 1213
- [ 13 ] Hassounah M A and Abed E H 2002 *Technical Research Report* ( Institute for Systems Research University of Maryland , TR2002-26 ) available at <http://www.isr.umd.edu>
- [ 14 ] Liao X X 1999 *Their Method and Application of Stability* ( Wuhan : Huazhong University of Science & Technology Press ) 224-226 ( in Chinese ) 廖晓昕 1999 稳定性的理论、方法和应用( 武汉 : 华中科技大学出版社 ) 224-226 ]
- [ 15 ] Xu C X et al 1991 *Matrix Analysis* ( Xi 'an : Northwest Polytechnical University Press ) 79 ( in Chinese ) 徐成贤等 1991 矩阵分析( 西安 : 西北工业大学出版社 ) 79 ]
- [ 16 ] Chen G and Ueta T 1999 *Int . J . Bifurcation and Chaos* **9** 1465
- [ 17 ] Ueta T and Chen G 2000 *Int . J . Bifurcation and Chaos* **10** 1917

# Chaotic systems controlled with perturbed parameters based on washout filter technology

Zhang Hao Ma Xi-Kui

( School of Electrical Engineering ,Xi 'an Jiaotong University ,Xi 'an 710049 , China )

( Received 8 January 2003 ; revised manuscript received 27 January 2003 )

## Abstract

The chaos control methodology based on the washout filter technology is used in chaotic systems both without perturbation and with perturbed parameters. A sufficient condition on controller design with perturbed parameters is presented. Numerical results show that this method is easy to be implemented in engineering , requires little control cost , stabilizes the original unstable fixed points within the chaotic attractor and is robust enough . Thus , it is very suitable for engineering applications.

**Keywords** : chaos control , parameter perturbation , washout filter

**PACC** : 0545