

# 随机计及相对速度的交通流跟驰模型<sup>\*</sup>

薛 郁

(广西大学物理系, 南宁 530004)

(上海大学上海市应用数学与力学研究所, 上海 200072)

(2002 年 12 月 13 日收到, 2003 年 2 月 10 日收到修改稿)

从研究微观个体车辆行为出发, 考虑车辆加速过程的不确定性, 提出了随机计及相对速度的交通流跟驰模型 (SR-OV 模型). 对随机相对速度的跟驰模型的动力学方程进行稳定性分析, 得到与 Bando 跟驰模型不同的稳定性判据, 其稳定性优于 Bando 模型. 运用摄动理论分析交通过程中密度波的变化, 结果表明, 在发生交通阻塞相变时, 交通密度波以 mKdV 方程描述的扭结-反扭结波演化. 对随机相对速度跟驰模型进行数值模拟和分析, 结果发现车流速度的变化小于 Bando 模型的速度变化, 而且与随机概率有关, 当随机考虑相对速度的概率增大时, 初始的小扰动不会放大对车流产生影响, 甚至长时间就消失. 这与 Bando 模型完全不同. 数值模拟所得到的相图与解析解相符合, 而且交通流稳定区域大于 Bando 模型. 从车间距-速度演化图上, 随着随机概率的增大, SR-OV 模型在初始时存在的滞后现象, 随着时间的增长, 趋于稳定状态后, 滞后曲线收敛于一小区域, 滞后效应被削弱. 这完全不同于 Bando 模型, 在 Bando 模型中, 滞后曲线由一点向外扩散, 滞后曲线区域越来越大, 车流趋于不稳定状态.

关键词: 交通流, 跟驰模型, 稳定性判据, 相对速度

PACC: 0550, 0520, 6470

## 1. 引言

交通流问题的研究是近年来兴起的一个课题, 这是日益增长的交通建设和管理的需求. 交通流理论是一门应用力学、物理学和数学等学科知识描述交通特性的科学, 它是通过交通数学模型的建立, 然后进行数值模拟和求解的过程. 有关交通流的第一篇论文可追溯到 1933 年, Kinzer 首次提出并论述了 Poisson 分布应用于交通的可能性<sup>[1]</sup>. 第二次世界大战之后, 交通流理论有了飞跃的发展, 特别在 20 世纪 50 年代, 除提出了车辆跟驰理论和排队论之外, 最引人注目的是 Lighthill 和 Whitham 在名著《论运动学波》中提出的交通波理论<sup>[2]</sup>. 20 世纪 70 年代以车辆跟驰理论思想为出发点的交通流动力学模型开始崭露头角, 其中以 1971 年 Payne 提出的动力学模型及以此编制的 FREFLO 交通应用软件最为有名<sup>[3,4]</sup>. 目前, 交通流理论呈现百家争鸣的局面, 既有从宏观角度出发研究交通流的宏观模型, 也有考虑单一个体车辆行为的微观模型. 研究的方法包括跟驰模型、动力学模型、动力论方法和元胞自动机方法等<sup>[5,6]</sup>.

交通流的微观模型跟驰模型主要将交通流处理为分散的粒子组成, 以单个车辆作为描述对象, 通过研究单个车辆的前后作用, 了解交通流的特性. 从力学观点来看, 它实际上是一种质点系动力学模型, 其假设车队中的每一辆车必须与前车保持一定的间距, 以免发生碰撞, 后车的加速或减速取决于头车, 考虑车辆对刺激的反应滞后的阻尼效应, 以及车辆运动的跟随性, 建立跟随车与前车的相互关系. 这样, 每辆车的运动规律可以通过如下微分方程来描述, 这个微分方程通常与相对前方的车间距、相对速度以及自己的速度有关, 通过求解微分方程就可以确定车流的演化过程<sup>[6]</sup>,

$$\dot{x} = f_{\text{st}}(v_n, \Delta x_n, \Delta v_n). \quad (1)$$

最早的跟驰模型是 Pipes 于 1953 年提出, Chandler 等人进行了深入研究, 在他们的文献中, 将其跟驰模型称为 California 模型. 主要的跟驰模型有 Pipes 模型<sup>[7]</sup>、California 模型<sup>[8]</sup>、两倍视野模型 (double look-ahead)<sup>[9]</sup>、Newell 模型<sup>[10]</sup>、Gazis 模型<sup>[11]</sup>、优化速度模型<sup>[12]</sup>、广义力模型<sup>[13]</sup>和智能驾驶模型<sup>[14]</sup>. 从分析实验观测得到的详细数据表明驾驶员对前方车距变化的延迟反应而产生小扰动, 小扰动沿车流上游进行

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 19932020 和 10147201)资助的课题.

传播,经过一定程度放大后,引起畅行车辆的不稳定,这个不稳定造成交通“挤压”,导致局部区域车辆密集,阻塞相形成.因此,跟驰模型的稳定性条件相当重要.从方程(1)可以看出影响车辆不稳定的因素很多,除车辆本身速度之外,还有与前面车辆之间的车间距和相对速度的影响.文献[15—17]在 Bando 优化速度跟驰模型的基础上,提出了考虑相对速度的跟驰模型.解析研究与数值模拟表明,考虑相对速度影响因素,车流的稳定性有所提高,临界相变点增大,而且在不稳定区域的失稳导致阻塞,其密度波由 mKdV 方程描述的 Kink 波.然而,车辆具有自己的个性,带有随意性的行驶.最近, Sawada 认为应当随机地考虑最近邻车辆和次近邻车辆对行驶车辆的影响,提出了随机考虑最近邻车辆和次近邻车辆的跟驰模型<sup>[18]</sup>.车辆在行驶过程中,既有聚集在一起,形成局部阻塞,也有分离消散的过程,聚集过程与消散不同,存在滞后作用<sup>[15]</sup>.

本文在此基础上,研究车辆进行加速的机理,提出随机计及相对速度的跟驰模型,分析随机考虑相对速度对交通流稳定性的影响.通过非线性分析,研究在不稳定区域密度波的变化,进行数值模拟将所得结果与 Bando 最优化模型进行对比,分析随机计及相对速度的跟驰模型所具有的性质以及对整个交通流系统的影响.

## 2. 模型与稳定性分析

实际交通中,微观个体的车辆的加速行为各不相同,从各种跟驰模型的特点来看,有的跟驰模型通过时间延迟调整车辆速度达到优化速度的加速过程,而有的跟驰模型则认为车辆运动的相对速度引起车辆的加速行为. Pipes 的跟驰模型理论,认为车辆通过选择前车速度作为优化速度的加速行为<sup>[6]</sup>,其动力学方程如下<sup>[7]</sup>:

$$\dot{x}_n = \frac{1}{T}(\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n), \quad (2)$$

其中  $T$  为车辆的反应时间,  $x_n$  为车辆位置坐标,  $x_{n+1}$  为前车位置坐标. Pipes 的跟驰模型思想是当前车速度大于后车时,后车加速,而前车速度小于后车时,后车减速.然而 Pipes 模型没有考虑到加速过程的时间延迟性,与实测数据有所差别. Chandler 等人进行了深入研究,认为车辆在时间延迟内通过调整车辆运动的相对速度而获得加速度<sup>[8]</sup>. 1961 年 Newell 认真地研究跟驰模型以及实验观测到的数据,提

出了一个不同类型的跟驰模型<sup>[10]</sup>,即

$$\dot{x}_n(t+T) = V(\Delta x_n). \quad (3)$$

这个跟驰模型的思想是每辆车的驾驶员都期望通过反应时间的延迟来调整车速达到最优速度.然而,驾驶员的反应时间不同于车辆状态变化的弛豫时间<sup>[14]</sup>.在 Newell 跟驰模型提出之后的 30 年内,跟驰模型均没有取得显著进展,直到 1995 年 Bando 等人才提出了一个全新的模型——优化速度模型. Bando 等人认为车辆是通过在弛豫时间  $\tau$  内对车速调整达到优化速度,由此提出如下优化速度跟驰模型(简称 OV 模型)<sup>[12]</sup>:

$$\ddot{x}_n = a(V(\Delta x_n) - \dot{x}_n), \quad (4)$$

其中  $a = 1/\tau$ ,  $V(\Delta x_n)$  为优化速度. Bando 等人证明车间距  $h$  满足如下关系:

$$\frac{2V'(h)}{a} > 1, \quad (5)$$

而且在如下范围内,系统将处于不稳定状态:

$$\Delta x_{c_1} < h < \Delta x_{c_2}. \quad (6)$$

在这样不稳定条件下,初始均匀分布的交通流在很小的扰动作用下,都会出现时停时走(stop-and-go)的交通阻塞状态,交通密度波由 mKdV 方程的扭结-反扭结波描述<sup>[19,20]</sup>.上述两种不同类型的跟驰模型(2)(3)和(4)分别描述车辆不同的加速过程,而且理论上的结果与实际观测数据基本符合,但也有差别.我们认为车辆加速行为具有随意性,车辆既可通过弛豫时间延迟,通过车速调整达到优化速度,又随机地计及相对速度的因素,使得速度达到最优.这样,车辆的加速行为中存在不确定性因素.考虑这种不确定性因素的影响,车辆加速过程一方面通过优化速度加速,另一方面以概率为  $p$  随机计及相对速度的加速.这样就提出如下跟驰模型(简称 SR-OV 模型):

$$\ddot{x}_n = a(V(\Delta x_n) - \dot{x}_n) + \frac{1}{T}\Delta v_n. \quad (7)$$

选取的优化速度  $V(\Delta x_n)$  为<sup>[19]</sup>

$$V(\Delta x_n(t)) = \tanh(\Delta x_n - x_c) + \tanh(x_c), \quad (8)$$

其中  $x_c$  为安全距离.对方程(7)进行稳定性分析,可得如下稳定条件:

$$V'(h) \leq \frac{1}{T} + \frac{a}{2}. \quad (9)$$

由于车辆的反应时间  $T$  与弛豫时间  $\tau$  的数量级不同( $T \leq \tau$ )<sup>[19]</sup>,其相差的比例因子  $\lambda$  ( $\lambda > 1$ ),  $T \approx \frac{\tau}{\lambda}$ . 因此,不稳定条件可表示为

$$\frac{2V(h)}{a} > 2\lambda + 1. \quad (10)$$

比较(10)与(5)式,可以明显地看出,考虑相对速度后,车流的稳定性得到增强.由于车流中一部分车辆随机地计及相对速度的影响,这部分车辆的稳定性得以增强,因此引起整个车流的稳定性增强,数值模拟将进一步证明这一结论.

### 3. 非线性分析

由于随机地计及相对速度对车流的稳定性起主要作用,因此,应用摄动方法对动力学方程(7)进行非线性分析,将方程(7)改写为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Delta x_n}{dt^2} = & a \left[ V(\Delta x_{n+1}(t)) - V(\Delta x_n(t)) \right. \\ & \left. - \frac{d(\Delta x_n)}{dt} \right] + \lambda a \left[ \frac{d(\Delta x_{n+1})}{dt} - \frac{d(\Delta x_n)}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

考虑在临界点附近慢变量的变化行为,在临界点附近  $a = a_c$ ,  $\epsilon = \left( \frac{a_c}{a} - 1 \right)^{1/2}$ ,  $0 < \epsilon \ll 1$ , 定义慢变量为  $X$  和  $T$ :

$$X = \epsilon(n + bt), \quad (12a)$$

$$T = \epsilon^3 t, \quad (12b)$$

其中  $b$  为待定参数,我们期望密度波的振幅  $A \propto \epsilon^{[20]}$ , 设车间距为

$$\Delta x_n(t) = h_c + \epsilon R(X, T), \quad (13)$$

将(11)式展开至  $\epsilon^5$  量级,则得到如下非线性偏微分方程:

$$\begin{aligned} \epsilon^2 a(V' - b) \partial_X R + \epsilon^3 \left[ \frac{a}{2} V' + \lambda ab - b^2 \right] \partial_X^2 R \\ + \epsilon^4 \left[ \left( \frac{aV'}{8} + \lambda \frac{ab}{2} \right) \partial_X^3 R + \frac{aV'''}{6} \partial_X R^3 - a \partial_T R \right] \\ + \epsilon^5 \left[ \lambda \frac{ab}{6} \partial_X^4 R + \frac{aV'}{24} \partial_X^4 R + \frac{aV'''}{12} \partial_X^2 R^3 \right. \\ \left. - (2b - \lambda a) \partial_T \partial_X R \right] = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$V' = dV(\Delta x)/d\Delta x \Big|_{\Delta x = h_c},$$

$$V''' = d^3 V(\Delta x)/d\Delta x^3 \Big|_{\Delta x = h_c}.$$

取  $b = V'$ , 在临界点附近方程(14)  $\epsilon$  的 2 次项可以消除. 在临界点附近  $\tau_c$  有如下关系:

$$\frac{\tau}{\tau_c} = 1 + \epsilon^2, \quad (15)$$

其中  $\tau_c = \frac{1+2\lambda}{2V'}$ ,  $\partial_T \partial_X R = \frac{1+3\lambda}{6} V' \partial_X^4 R + \frac{V'''}{6} \partial_X^2 R^3 +$

$O(\epsilon)$ . 这样方程(14)中  $\epsilon$  的 3 次项可表示为  $\left[ b^2 - \frac{a}{2} V' - \lambda ab \right] \partial_X^2 R = \epsilon^2 \frac{1+2\lambda}{2} a V' \partial_X^2 R$ , 这样方程(14)为

$$\begin{aligned} \epsilon^4 \partial_T R = & \epsilon^4 \left[ \left( \frac{1}{6} + \frac{\lambda}{2} \right) V' \partial_X^3 R + \frac{V'''}{6} \partial_X R^3 \right] \\ & + \epsilon^5 \left[ \frac{(1+2\lambda)^2}{6} V' \partial_X^4 R + \frac{1+2\lambda}{12} \right. \\ & \left. \times V'' \partial_X^2 R^3 + \frac{1+2\lambda}{2} V' \partial_X^2 R \right]. \end{aligned} \quad (16a)$$

利用(15)式,对方程(16a)化简,得

$$\begin{aligned} \partial_T R - \left( \frac{1}{6} + \frac{\lambda}{2} \right) V' \partial_X^3 R - \frac{V'''}{6} \partial_X R^3 \\ = \epsilon \left[ \frac{(1+2\lambda)^2}{6} V' \partial_X^4 R + \frac{1+2\lambda}{12} V'' \partial_X^2 R^3 \right. \\ \left. + \frac{1+2\lambda}{2} V' \partial_X^2 R \right]. \end{aligned} \quad (16b)$$

对方程(16)进行下列变换:

$$\begin{aligned} T' &= \left( \frac{1}{6} + \frac{\lambda}{2} \right) V' T, \\ R &= \left[ - \left( \frac{1}{6} + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{6V'}{V''} \right]^{1/2} R', \end{aligned} \quad (17)$$

因此得到下列方程:

$$\begin{aligned} \partial_{T'} R' - \partial_X^3 R' + \partial_X R'^3 \\ = \epsilon \left[ \frac{(1+2\lambda)^2}{1+3\lambda} \partial_X^4 R' - \frac{1+2\lambda}{2} \partial_X^2 R'^3 \right. \\ \left. + \frac{3(1+2\lambda)}{1+3\lambda} \partial_X^2 R' \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

忽略  $O(\epsilon)$  项,方程(16)正好是 mKdV 方程,其扭结-反扭结波解为

$$R'_0(X, T') = \sqrt{c} \tanh \sqrt{c/2} (X - cT'). \quad (19)$$

如果考虑  $O(\epsilon)$  项,假定  $R'(X, T') = R'_0(X, T') + \epsilon R'_1(X, T')$ . 为了得到方程(19)的传播速度  $c$ ,  $R'_0(X, T')$  必须满足可解性条件<sup>[20]</sup>

$$\begin{aligned} (R'_0, \mathcal{M}[R'_0]) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dX R'_0(X, T') \mathcal{M}[R'_0(X, T')] = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[R'_0] &= c_1 \partial_X^2 R' + \frac{c_2}{2} \partial_X^4 R' - \frac{c_3}{2} \partial_X^2 R'^3, \\ c_1 &= \frac{3(1+2\lambda)}{1+3\lambda}, \\ c_2 &= \frac{3(1+2\lambda)^2}{1+3\lambda}, \\ c_3 &= 1+2\lambda. \end{aligned} \quad (21)$$

通过积分,得到传播速度  $c = \frac{45c_1}{2c_2 + 3c_3}$ . 扭结-反扭结波解的振幅  $A$  为

$$A = \left[ \frac{1 + 2\lambda}{2} c \left( \frac{a_c}{a} - 1 \right) \right]^{1/2}, \quad (22)$$

其中  $a_c = \tau_c^{-1} = \frac{1}{(1 + 2\lambda)} v_{\max}$ . 这样便找到 mKdV 方程 (18) 的解

$$\begin{aligned} R(X, T) = & \left[ -\frac{1 + 3\lambda}{9V'''} V' c \right]^{1/2} \\ & \times \tanh \sqrt{c/2} \left( X - \frac{1 + 3\lambda}{6} V' c T \right), \end{aligned} \quad (23)$$

因此,车间距为

$$\begin{aligned} \Delta x_n = & h_c + \left[ -\frac{1 + 3\lambda}{9V'''} V' c \right]^{1/2} \tanh \sqrt{c/2} \\ & \times \left( X - \frac{1 + 3\lambda}{6} V' c T \right). \end{aligned} \quad (24)$$

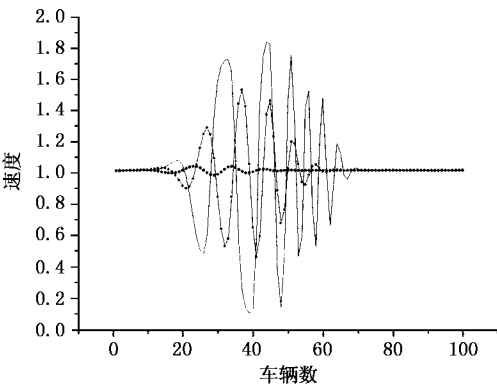
### 4. 数值模拟与分析

为了比较 SR-OV 模型与 OV 模型的稳定性,数值模拟  $t = 100$  和  $1000$  时所有车辆速度的分布,选取的最优速度函数为

$$V(\Delta x_k(t)) = \tanh(\Delta x_k - 2) + \tanh(2). \quad (25)$$

道路长  $L = 200$ , 有  $N = 100$  辆车以相同的车间距均匀地分布,该初始条件与 Bando 等人的一样,使用周期边界条件<sup>[12]</sup>,在车流稳定时,给头辆车施加一个小扰动,即

$$\begin{aligned} x_N(0) = & x_N^{(0)} + 0.1, \quad x_n(0) = x_n^{(0)} \\ (n \neq N), \quad \dot{x}_n(0) = & 0. \end{aligned} \quad (26)$$



为了研究车流中车速的变化,选取有关参数为

$$a = 1.0, \quad h = N/L, \quad T = 1. \quad (27)$$

图 1 为数值模拟得到的车流在不同时刻  $t = 100$  和  $1000$  时的速度分布.从图 1 可以发现,随着时间的增加,初始的小扰动引起车辆的速度在  $0 - V_{\max} = 2$  之间波动,在  $t = 100$  和  $1000$  时,SR-OV 模型的车辆速度波动变化小于 OV 模型,这表明车流的稳定性较高,而且车流的稳定性与随机计及相对速度的概率为  $p$  有关,概率  $p$  越大,随机计及相对速度的车辆就越多,车辆速度波动变化就越小.从速度-时间斑图(图 2)上,可以看出车流速度的演化过程,初始的小扰动形成激波,沿车流上游进行传播,经过一定程度放大后,导致局部区域车辆密集,阻塞相形成.由图 2 看出与 Bando 的 OV 模型相比,计及相对速度的 SR-OV 模型车流速度变化幅度较小,稳定性较好,而且车流的稳定性与计及相对速度的概率  $p$  有关,概率  $p$  越大,车流的稳定性就越好,当概率  $p = 0.8$  时,由头车引起的小扰动没有被放大,反而被抑制而消失,不会出现局部区域车辆密集的阻塞相.

根据方程 (7),应用上述初始条件,进行数值模拟,可得 SR-OV 模型相图(图 3),同时,根据 (14) 式 Kink 解的振幅,可得相图曲线,对比可以发现,数值模拟与解析解的结果一致.图 3 中可以分成两个区域:稳定区域和不稳定区域.SR-OV 模型相图与 OV 模型相图比较,可以看出 SR-OV 模型的稳定区域比 OV 模型的稳定区域大得多.这表明随机考虑相对速度相当于给车流一个阻尼作用,使得车速减小,能够平稳行驶.

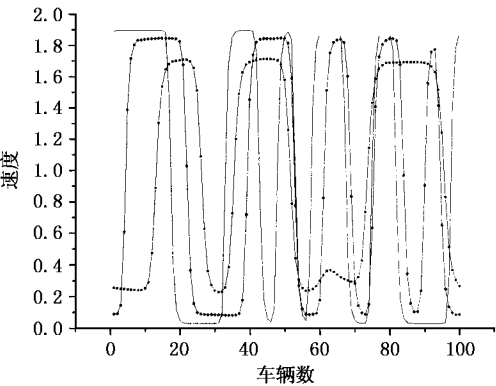


图 1 当  $t = 100$ (a) 和  $1000$ (b) 时,SR-OV 模型与 OV 模型车流速度的分布 —— 为 OV 模型,• 为 SR-OV 模型( $p = 0.2$ ),▼ 为 SR-OV 模型( $p = 0.5$ )

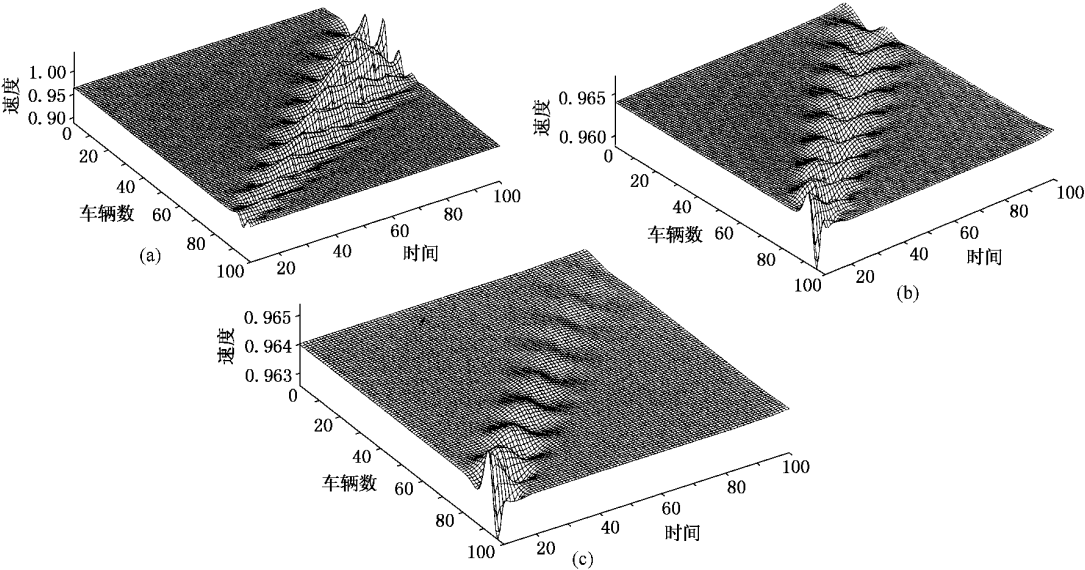


图2 车流速度的演化速度-时间斑图(每10时步进行统计)(a)为Bando的OV模型(b)为SR-OV模型,计及相对速度的概率 $p=0.5$ (c)为SR-OV模型,计及相对速度的概率 $p=0.8$

根据方程(7)和上述初始条件,在车流演化到 $t=10^4$ 步时,得到了车间距-速度关系图(图4),它具有类似磁回曲线的图,从曲线的变化趋势可以发现,车流在演化过程中,存在车辆从畅行到聚集拥挤形成的过程,然后再从聚集拥挤回到畅行的分离消散过程,然而这样的闭合回复的过程不相同,具有滞后效应.与Bando的OV模型的滞后曲线进行比较,可以明显看出,SR-OV模型滞后曲线区域小于OV模型的,根据第2节稳定性分析可以知道SR-OV模型比较稳定,与随机概率 $p$ 有关,当随机概率 $p$ 增大时( $p=0.5$ )SR-OV模型滞后曲线收敛于中心的小区域.根据交通调查,实际交通随机考虑相对速度作

用的概率约在0.1—0.25范围,而城市交通就小于该值.从车流由初始条件开始得到的滞后曲线演化图(图5),可以发现SR-OV模型在初始时存在滞后现象,随着时间的增长,趋于稳定状态后,滞后曲线收敛于一小区域,滞后效应被削弱.这完全不同于Bando的OV模型,在Bando的OV模型中,滞后曲线由一点向外扩散,车流趋于越来越不稳定的状态.实际交通中,车从畅行到聚集拥挤形成的过程,然后再从聚集拥挤回到畅行的分离消散过程,最后趋于稳定状态.因此,随机计及相对速度的SR-OV模型的演化过程符合日常交通.

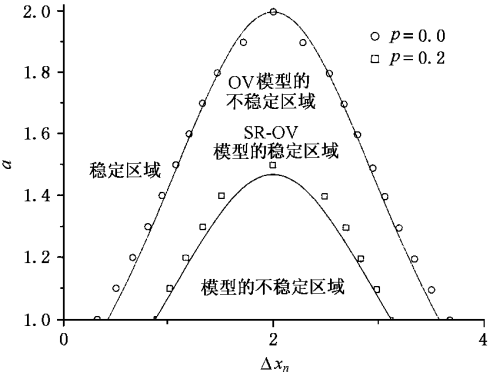


图3 SR-OV模型( $p=0.2$ )和Bando的OV模型的相图(离散点为数值模拟,曲线为解析解)上方区域为稳定区域,对于两个模型均匀分布的车流均为稳定的;中间区域对于OV模型为不稳定区域,而对于SR-OV模型为稳定区域;下方小区域对于两个模型均为不稳定区域

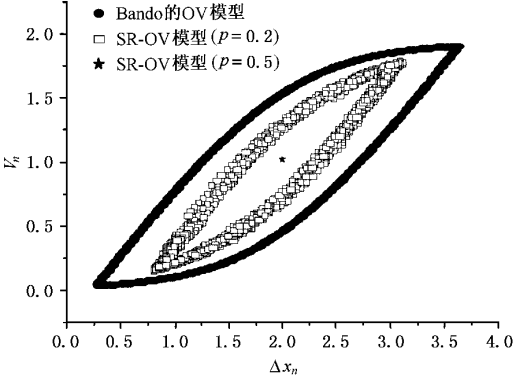


图4  $t=10^4$ 步时车间距-速度关系图 Bando的OV模型滞后曲线区域大于SR-OV模型的

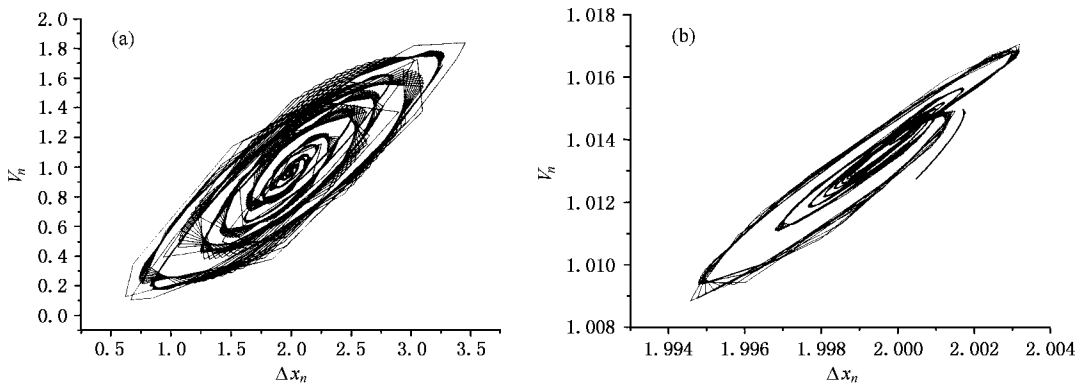


图 5 滞后曲线演化图 (a)为 Bando 的 OV 模型 (b)为 SR-OV 模型 ( $p=0.5$ )

5. 总 结

本文从研究微观个体车辆行为出发,考虑车辆加速机理的不确定性,提出了随机计及相对速度的交通流跟驰模型.对随机相对速度的跟驰模型的动力学方程进行稳定性分析,得到与确定性的跟驰模型不同的稳定性判据,其稳定性好于 Bando 的 OV 模型.运用摄动理论分析交通过程中密度波的变化,结果表明在发生交通阻塞相变时,交通密度波以  $mK-dV$  方程描述的扭结-反扭结波演化.对随机相对速度跟驰模型进行数值模拟和分析,结果发现车流速度的变化小于 Bando 的 OV 模型的速度变化,而且与随机概率有关,当随机考虑相对速度的概率增大时,

初始的小扰动不会放大对车流产生影响,甚至长时间就消失,这与 Bando 的 OV 模型完全不同;数值模拟所得相图与解析解相符合,在相图中 SR-OV 模型的交通流稳定区域大于 Bando 的 OV 模型的稳定区域;从车间距-速度关系图上,可以发现 SR-OV 模型的滞后曲线区域小于 Bando 的 OV 模型,与随机概率有关.随着随机概率增大,车流初始时存在滞后现象,随着时间的增长,滞后曲线收敛于一小区域,滞后效应被削弱,车流趋于稳定状态.这完全不同于 Bando 的 OV 模型.在 Bando 的 OV 模型中,滞后曲线由一点向外扩散,滞后曲线的区域越来越大,表明车流趋于不稳定状态.而实际上,车流会从不稳定状态趋于稳定状态.

[ 1 ] Kinzer J P 1933 Application of the Theory of Probability to Problems of Ighway Traffic. B C E Thesis Polytechnic Institute of Brooklyn ,also Proc. 1st Traffic Eng. **5** p118

[ 2 ] Lighthill M J and Whitham G B 1955 *Proc. Roy. Soc. A* **229** 281

[ 3 ] Payne H J 1971 *Math. Methods Public Syst.* **1**( 1 ) 51

[ 4 ] Payne H J 1979 FREFLO :A Macroscopic Simulationmodel of Freeway Traffic TRR **772** 68

[ 5 ] Helbing D 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 1076

[ 6 ] Chowdhury D , Santen L and Schreckenberg A 2000 *Phys. Rept.* **329** 199

[ 7 ] Pipes L A 1953 *J. Appl. Phys.* **24** 274

[ 8 ] Chandler R E *et al* 1958 *Oper. Res.* **6** 165

[ 9 ] Herman *et al* 1959 *Opns. Rec.* **7** 86

[ 10 ] Newell G F 1961 *Oper. Res.* **9** 209

[ 11 ] Gazis D C ,Herman R and Rothery R W 1961 *Oper. Res.* **9** 545

[ 12 ] Bando M *et al* 1995 *Phys. Rev. E* **51** 1035

[ 13 ] Helbing D and Tilch B 1998 *Phys. Rev. E* **58** 133

[ 14 ] Treiber M *et al* 2000 *Phys. Rev. E* **62** 1805

[ 15 ] Xue Y ,Dong L Y ,Yuan Y W and Dai S Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 492 [ in Chinese ] 薛郁、董力耘、袁以武、戴世强 2002 物理学报 **51** 492 ]

[ 16 ] Xue Y , Dong L Y ,Yuan Y W and Dai S Q 2002 *Commun. Theor. Phys.* **38** 230

[ 17 ] Xue Y 2002 *Chin. Phys.* **11** 1129

[ 18 ] Sawada S 2001 *J. Phys. A : Math. Gen.* **34** 11253

[ 19 ] Komatsu T and Sasa S 1995 *Phys. Rev. E* **52** 5574

[ 20 ] Muramatsu M and Nagatani T 1999 *Phys. Rev. E* **60** 180

# A car-following model with stochastically considering the relative velocity in a traffic flow<sup>\*</sup>

Xue Yu

( *Department of Physics , Guangxi University ,Nanning 530004 ,China* )

( *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics , Shanghai University , Shanghai 200072 , China* )

( Received 13 December 2002 ; revised manuscript received 10 February 2003 )

## Abstract

In this paper , the car-following model with stochastically considering the relative velocity in a traffic flow is presented through investigating the vehicle acceleration process with uncertainty. The stability criterion superior to the Bando 's model is derived by the linear stability analysis. The density wave is investigated analytically with the perturbation method. The results show that the occurrence of traffic jamming transitions can be described by the kink solution of the modified Korteweg-de Vries equation. The effects of stochastic relative velocity on the traffic flow are simulated and analyzed. It is shown that the change rate of velocity in the new model is smaller than that of the Bando 's model under the same condition and depends on the probability  $p$ . As the probability  $p$  increases , a small initial disturbance does not magnify and influence on the traffic flow , but fades away for a long time. The stable region in the new model is larger than in the Bando 's model in the phase diagram. The existent initial hysteresis in the new model will approach to a small region with the increase of time in the headway-velocity plot , which is exactly different from that in the Bando 's model. In contrast , the hysteresis region in Bando 's model will be continuously extended to cause traffic flow instability.

**Keywords :** traffic flow , car-following model , stable criteria , relative velocity

**PACC :** 0550 , 0520 , 6470

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 19932020 and 10147201 ).