

二维格气模型中动力学相变与自组织临界现象^{*}

巩 龙[†] 童培庆[‡]

(南京师范大学物理科学与技术学院, 南京 210097)

(2002 年 9 月 29 日收到, 2003 年 2 月 25 日收到修改稿)

应用数值方法研究了一种具有封闭边界条件的 Manna 沙堆模型——格气模型. 通过模拟, 发现系统存在一个临界密度 $\rho_c \approx 0.684\dots$, 得到了相应的临界指数 $\alpha \approx 0.452 \pm 0.02$, 并且还发现只有在特定的粒子数密度范围, 系统才能体现出自组织临界性.

关键词: 沙堆模型, 格气模型, 自组织临界现象

PACC: 0565, 0590, 0500

1. 引 言

近十几年来对非平衡系统中的动力学行为^[1]和自组织临界现象及其普适性^[2-14]的研究引起了人们广泛的关注. 1987 年 Bak 等人在沙堆模型^[2]的研究中提出自组织临界现象的概念. 随后很多人从不同的角度, 用不同的模型研究了这种现象的具体表现及普适性, 例如 Dhar 的各向异性模型^[5,6]、Zhang 的连续模型^[7]、Manna 的随机模型^[8,9]、高度箭头 (height arrow) 模型^[10]、大米堆 (ricepile) 模型^[11]等. 研究发现自组织临界现象普遍存在于这些系统中. 以上所述模型都是开放系统, 系统中的粒子按一定的规则运动, 若达到边界, 就运动到系统外; 当系统达到临界状态时, 系统中的粒子数密度在某个值上下波动, 并且系统在演化过程中会形成一系列大小不一的“雪崩”, 当一个“雪崩”结束 (系统中无运动粒子) 后, 随机格点上加粒子 (从外界加粒子, 即加入“能量”或“压力”), 让系统的演化进行下去.

为了了解封闭系统 (粒子数不变) 的动力学行为以及在此类系统中是否存在这种自组织临界性质, 本文在开放系统的 Manna 模型的基础上, 提出了一种具有封闭边界条件的格气模型, 并对该模型的动力学性质及自组织性质进行了数值模拟.

2. 模型介绍

2.1. Manna 沙堆模型

Manna 沙堆模型是 Manna 在 1991 年提出的, 其研究的系统为二维正方格点, 每个格点要么被粒子占据, 要么为空格点. 在静止状态时, 一个格点上至多只有一个粒子. 随机选取格点, 从外界向系统一次只加一个粒子. 如果该格点为空格点, 该粒子将占据该格点, 继续从外界加粒子; 如果该格点已被一个粒子占据, 那么外加粒子与原已存在的粒子会发生碰撞 (“硬球势相互作用”), 碰撞后两个相碰的粒子分别以随机的方式移向两个最近邻格点上. 如果新的格点为空格点, 那么碰撞后移向该格点上的粒子将占据该格点. 如果新的格点已被粒子占据, 两粒子将以同样的碰撞方式继续碰撞. 若粒子达到边界, 粒子将运动到系统外. 系统的演化是并行的, 即如果系统中同时有若干对粒子发生碰撞, 它们的碰撞过程是同时进行的. 在此动力学演化过程中, 可能出现所谓的“雪崩现象”, 即当外加一个粒子后, 引起一系列碰撞, 直到一个格点上至多只有一个粒子, 即静止状态时为止, 然后继续从外界向系统加粒子, 让系统粒子运动进行下去.

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 10175035), 国家教育部优秀青年教师基金及江苏省高等学校科研基金 (批准号: 00KJB140004) 资助的课题.

[†] E-mail: luckgong@sina.com

[‡] E-mail: pptong@pine.njnu.edu.cn

2.2. 格子模型

为了了解封闭系统(粒子数不变)的动力学行为,本文在 Manna 模型的基础上提出了一个格子模型.

考虑一个封闭的格子系统,其粒子数 N 给定,这样粒子数密度也给定,初始时刻粒子随机地分布在空间格子上,然后外界对系统进行随机驱动,即随机选取一个格点,若上面有粒子占据,则让粒子在下一步随机运动到一个最近邻格点上,如果新格点已有粒子,则两粒子发生与 Manna 模型中相同的“碰撞”及运动规则,若随机选取的格点上没有粒子,则进行下一次驱动.由于在封闭系统中可能存在这样的状态,即当粒子数密度很大时,一次驱动则会引起无穷多次“碰撞”,无法静止下来,这与开放系统的沙堆模型完全不同.为了对不同粒子数密度系统进行比较,采用周期外驱动的方式,即每隔一个周期 T 对系统进行一次随机驱动.

该模型与 Manna 模型的最大区别是:该模型所研究的对象为给定粒子数密度下的系统,并研究其在周期性微扰下系统的动力学行为及自组织临界现象.而 Manna 模型所研究的对象为粒子数不固定的开放系统,系统中粒子全部静止下来后再加微扰,从而研究系统的自组织临界现象.

3. 模拟结果

本文主要对二维正方形格子在不同粒子数密度下分别进行模拟.在具体的模拟中格子系统的大小取 200×200 ,在临界密度下,对 200 个样本作平均,在临界密度上,对 10 个样本作平均,外界驱动周期 $T = 10$ 个单位时间,在每个样本中取 1.5×10^6 个数据点,即 1.5×10^6 个单位时间段内的系统演化过程.本文还对更大的模拟尺寸和其他驱动周期进行了模拟,所得的结果一致.

3.1. 序参量与临界粒子数密度

为了描述系统的动力学状态,类似相变现象,引入一个临界参量 λ 来表示系统演化过程中总的间歇期(无粒子运动)与总的演化时间的比值.图 1 为 λ 在不同密度下的曲线图.从图 1 可以看出,系统中存在一个临界密度 ρ_c ,当 $\rho > \rho_c$ 时,系统总是处于活动状态,即总是存在粒子“碰撞”,当 $\rho < \rho_c$ 时,系统总

存在一定的比例,系统中所有的粒子处于静止状态,从模拟的结果中,得到 $\rho_c \approx 0.684 \dots$.

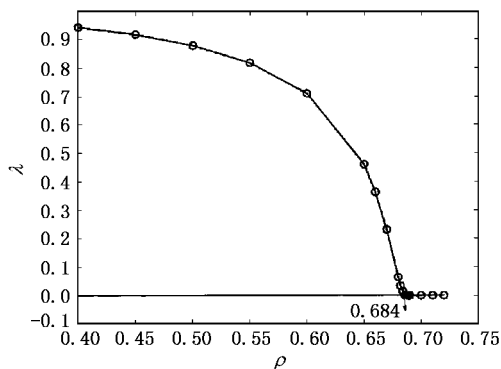


图 1 系统演化过程中总的间歇期(无粒子运动)与总的演化时间的比值 λ 与系统中粒子数密度 ρ 的关系图

与 Manna 模型相比较,当系统处于自组织临界状态时,小尺度的数值模拟发现系统中的粒子数密度绝大多数时间在 $\rho_a = 0.6818 \dots$ 附近一个非常窄的范围内波动, Manna 利用外插法得到当系统尺寸 $L \rightarrow \infty$ 时, $\rho_a = 0.6832 \dots$. 该密度与我们模拟得到的临界密度相一致.因此可以看到开放系统处在自组织临界状态时的平均密度对应于相应的封闭系统的临界密度.

3.2. 临界性的表现

为了研究在临界密度附近系统的细节行为,我们进一步研究了其他物理量在临界点附近的行为.研究发现,在系统演化过程中,平均运动粒子数与总的粒子数之比值 Z 会因粒子数密度 ρ 不同而不同,图 2 为 Z 与 ρ 的这种具体的关系.从图 2 可以明显地看出,在 $\rho = 0.684 \dots$ 附近有一个明显的拐点,因此在该处存在一个相变点.在该密度下 Z 随 ρ 的变化很小,且其数值约等于零,而在该密度以上 Z 随 ρ 的增大而增大,为了较精确地确定此时 Z 与 ρ 的关系,我们在 $\rho = 0.684$ 附近详细地研究了两者的关系.图 3 为 $\log Z$ 对 $\log[(\rho - \rho_c)/\rho_c]$ ($\rho_c = 0.684$) 的依赖关系,对图中的点进行线性拟合的结果显示, $Z \propto (\rho/\rho_c - 1)^\alpha$, $\alpha = 0.452 \pm 0.02$.

对一个特定粒子数密度的系统,在演化过程中每时每刻运动的粒子数 $s_1(t)$ 不尽相同,图 2 给出平均运动粒子数与总的粒子数之比值 Z 随粒子数密度 ρ 的变化关系.为了更加具体地研究运动粒子的统计规律受粒子数密度的影响,我们在不同的粒子

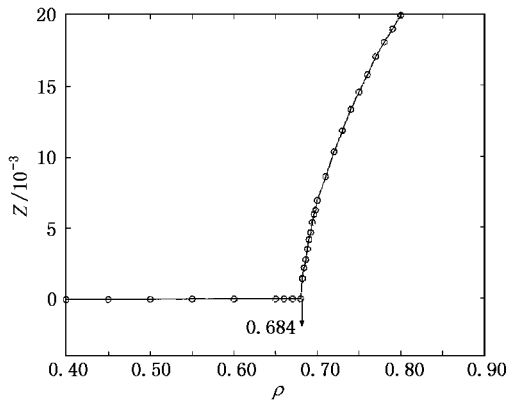


图2 系统演化过程中平均运动的粒子数与总的粒子数的比值 Z 与系统中粒子数密度 ρ 的关系图

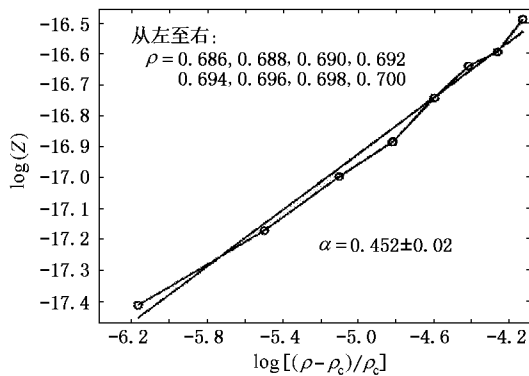


图3 $\rho = 0.684$ 附近, $\log Z$ 对 $\log[(\rho - \rho_c)/\rho_c]$ ($\rho_c = 0.684$) 的依赖关系图. 对图中的点进行线性拟合的结果显示, $Z \propto (\rho/\rho_c - 1)^{\alpha}$, $\alpha = 0.452 \pm 0.02$

数密度下对运动粒子数 $s_1(t)$ 作了统计, 其规律如图4所示. 图4给出不同粒子数密度下的情形, 从中可以看到, 当密度较小时 ($\rho \leq 0.68$), s_1 出现的概率 $P(s_1)$ 随 s_1 的增大而减小; 当 $\rho > 0.69$ 时, $P(s_1)$ 在某一 s_1 左右近似成拱形对称分布. 很显然, 粒子数密度在 0.68—0.69 之间, 系统中运动粒子数的统计行为发生了很大的变化, 在该密度范围内应存在相变点.

另外, 在开放系统自组织临界状态研究中, 人们普遍研究雪崩大小 S 及雪崩持续时间 T 的统计规律. 结果发现其分布呈幂律关系, 而且这种分布不依赖于空间的大小和系统演化时间的长短, 也不依赖于系统的初始状态^[15]. 同样我们在现在的模型中也可对这些物理量进行研究, 在临界密度以下, 系统演化过程中存在间隙, 按沙堆模型一般的处理方法, 我们把相邻间隙间的运动粒子数之和称为一个雪崩的

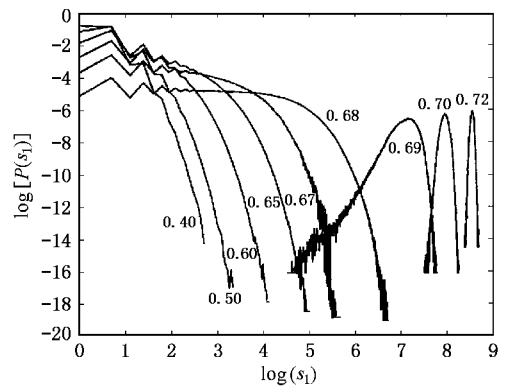


图4 不同粒子数密度(图中的数字)下运动粒子数 $s_1(t)$ 的统计图. 横轴表示运动粒子数 s_1 , 纵轴表示系统在进化过程中, 该运动粒子数出现的概率 $P(s_1)$

大小, 即若第 n 次出现 $s_1(t) = 0$, $s_1(t + \tau) \neq 0$ ($\tau = 1, \dots, m$), $s_1(t + m + 1) = 0$, 则 $S(n) = \sum_{\tau=1}^m s_1(t + \tau)$ 为第 n 个雪崩的大小, 同时 $T(n) = m$ 为该雪崩的持续时间. 我们分别对不同密度下雪崩大小 S 和雪崩持续时间 T 作了统计分布, 图5为 S 在不同密度 ($\rho = 0.40, 0.45, 0.50, 0.60, 0.65, 0.68$) 下的统计分布图. 从图5可以看出, 当 ρ 较小 ($\rho = 0.40, 0.45, 0.50, 0.60$) 时, S 与 $P(S)$ 取对数后没有线性规律, 当 ρ 较大 ($\rho = 0.65, 0.68$) 时, 其线性部分基本重合在一起, 为了显示清晰, 图5对 $\rho = 0.68$ 作了一定的平移, 并对其进行线性拟合, 发现 $P(S) \propto S^{-1.283}$. 当 $\rho > 0.68$ 时, 系统进化过程中基本没有间歇期, 不能对 S 作该统计. 图6为 T 在不同密度下的统计分布图. 与 S 的概率分布图所体现的规律类似, 当 $\rho = 0.68$ 时, 有 $P(T) \propto T^{-1.455}$. 在 Manna 模型中, 当系统的大小为 1000×1000 时, 平均粒子数密度 $\rho \approx 0.682$, 其 $P(S) \propto S^{-1.28 \pm 0.02}$, $P(T) \propto T^{-1.47 \pm 0.10}$, 这与

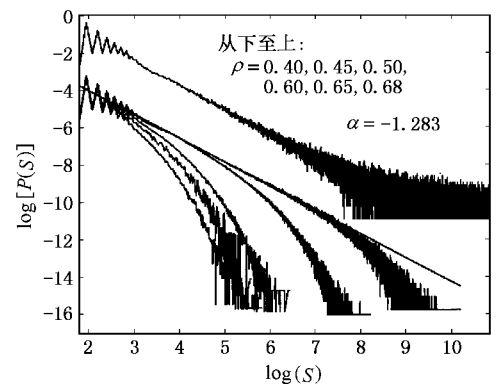


图5 不同密度下雪崩大小 S 的统计分布图

本文结果一致.

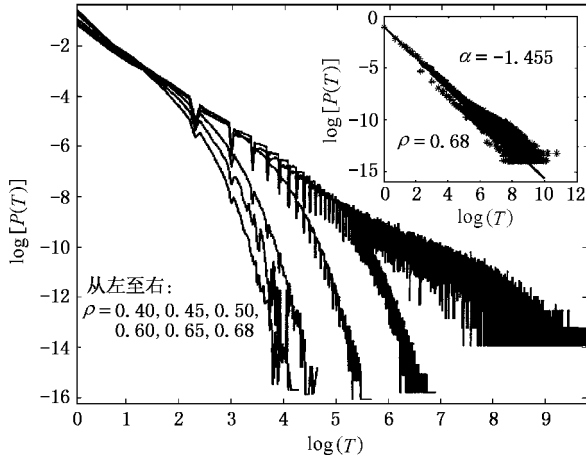


图 6 不同密度下雪崩持续时间 T 的统计分布图

从以上分析可以看出:系统只有在特定的粒子数密度范围(临界密度附近),才能体现出自组织临界性.

4. 结 论

本文对封闭系统(粒子数不变的系统)在外界驱动下的动力学行为及自组织临界现象等进行了研究,通过计算机模拟,发现随着粒子数密度的增加,系统的动力学行为会发生显著的变化,并且存在一个临界密度 $\rho_c \approx 0.684\dots$,在该密度附近系统中平均运动粒子数与总的粒子数之比值 Z 随 ρ 的变化具有很好的指数行为,相应的临界指数为 0.452 ± 0.02 ,同时发现只有在临界密度附近系统才表现出自组织临界现象.

- [1] Stauffer D 1994 *Annual Reviews of Computational Physics* (K Singapor:World Scientific) pp275—308
- [2] Bak P ,Tang C and Wiesenfeld K 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 381
- [3] Bak P ,Tang C and Wiesenfeld K 1988 *Phys. Rev. A* **38** 364
- [4] Tang C and Bak P 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2347
- [5] Dhar D 1989 *Phys. Rev. Lett.* **63** 1659
- [6] Dhar D 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1613
- [7] Zhang Y C 1989 *Phys. Rev. Lett.* **63** 470
- [8] Manna S S 1991 *J. Phys. A* **24** L363

- [9] Manna S S 1991 *Physica A* **179** 249
- [10] Shcherbakov R and Turcotte D L 1999 *Physica A* **277** 274
- [11] Christensen K *et al* 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 107
- [12] Wu Z L 2001 *Chin. Phys.* **10** 914
- [13] Wu Z L 2001 *Chin. Phys.* **10** 395
- [14] Deng W J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1171(in Chinese) [邓文基 2002 物理学报 **51** 1171]
- [15] Broker H M and Graddlberger P 1997 arXiv :adap-org/9706005

Dynamical phase transition and self-organized critical phenomena in the two-dimensional gas lattice model^{*}

Gong Long-Yan Tong Pei-Qing

(College of Physical Science and Technology , Nanjing Normal University , Nanjing 210097 , China)

(Received 29 September 2002 ; revised manuscript received 25 February 2003)

Abstract

A renovated Manna model is studied by computer simulation. The dynamic behavior of the system is changed evidently with the density of particle number. There is a critical particle number density (PND) $\rho_c \approx 0.684 \dots$ and critical exponent $\alpha = 0.452 \pm 0.02$ at this density. Self-organized critical phenomena occur only at certain ranges of PND.

Keywords : sandpile model , gas lattice model , self-organized phenomena

PACC : 0565 , 0590 , 0500

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10175035) , the Foundation for Excellent Young Teachers from the Ministry of Education of China , and the Scientific Research Foundation of the Higher Education Institutions of Jiangsu Province , China (Grant No. 00KJB140004).