

# 双动边界一维空腔中的能量密度

李 玲<sup>1,2)</sup> 李伯臧<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> 四川师范大学物理系, 成都 610066)

<sup>2)</sup> 四川大学物理科学与技术学院, 成都 610065)

<sup>3)</sup> 中国科学院物理研究所与凝聚态物理中心, 北京 100080)

(2002 年 9 月 2 日收到 2002 年 12 月 13 日收到修改稿)

利用广义 Moore 方程的数值解, 计算了具有做简谐振动的双边界一维空腔中的能量密度。能量密度的性质与运动边界的振幅、频率和相差密切相关。取某些特殊的参数值时, 能量密度呈现出波包结构。

关键词: 双动边界, 广义 Moore 方程, 能量密度

PACC: 1220D, 4250, 0370

## 1. 引 言

由两个全反射镜面构成的一维谐振腔, 其中一个镜面固定, 另一个镜面则按给定的轨迹运动。镜面的运动使腔内电磁场产生涨落, 真空态受到激发, 从而发射出光子。文献中把这种与运动边界相关的量子真空效应称为动力学 Casimir 效应<sup>[1-5]</sup>。在该领域中 Moore<sup>[6]</sup>做了开创性的工作。从那以后, 理论和实验工作连续不断, 取得不少成就<sup>[7-13]</sup>。在 Moore 的理论框架下, 具有单动边界一维空腔内的电磁场的模式函数  $\psi_k(x, t)$  可以表示成

$$\psi_k(x, t) = \frac{i}{\sqrt{4\pi k}} [\exp(-ik\pi G(t+x)) - \exp(-ik\pi F(t-x))], \quad (1)$$

式中相位函数  $U(z)$  为实函数。当  $t \leq 0$  时,  $U(z \leq \Lambda) = z/\Lambda$ ; 而当  $t > 0$  时,  $U(z > \Lambda)$  由所谓的 Moore 方程

$$U(t+R(t)) - U(t-R(t)) = 2 \quad (2)$$

确定, 其中  $R(t)$  为镜面的运动轨迹,  $\Lambda$  为  $t=0$  时两镜面间的距离。对于任意形式的  $R(t)$ , 一般是很难给出 Moore 方程的解析解。为此, Cole 和 Schieve<sup>[14]</sup>于 1995 年发展了一种对 Moore 方程进行数值求解的方法。一旦知道了  $U(z)$ , 就可以计算真空场的能量密度<sup>[15]</sup>。

最近人们将单边界运动推广到两个边界都运动的情形。与单动边界对应, Dalvit 和 Mazzitelli<sup>[16]</sup>把双动边界情形下的模式函数表示成

$$\psi_k(x, t) = \frac{i}{\sqrt{4\pi k}} [\exp(-ik\pi G(t+x)) - \exp(-ik\pi F(t-x))], \quad (3)$$

式中实函数  $G(z)$  和  $F(z)$  满足广义 Moore 方程

$$\begin{aligned} G(t+L(t)) - F(t-L(t)) &= 0, \\ G(t+R(t)) - F(t-R(t)) &= 2. \end{aligned} \quad (4)$$

当  $t \leq 0$  时,  $G(z \leq \Lambda) = z/\Lambda$ ,  $F(z \leq 0) = z/\Lambda$ ; 当  $t > 0$  时,  $G(z > \Lambda)$  和  $F(z > 0)$  由(4)式确定。

很显然, 广义 Moore 方程(4)比 Moore 方程(2)更难求解。迄今为止, 还没有找到一种可精确求解的运动形式  $R(t)$  和  $L(t)$ 。基于 Cole 和 Schieve<sup>[14]</sup>的思想, 文献[17]提出了一种数值求解广义 Moore 方程的方法。与 Cole 和 Schieve 的方法一样, 只要边界的运动速度低于光速, 该方法也适用于任意的  $R(t)$  和  $L(t)$ 。文献[17]中以

$$\begin{aligned} L(t) &= \varepsilon A_L \sin(m\pi t/\Lambda), \\ R(t) &= \Lambda - \varepsilon A_R \sin(\phi) + \varepsilon A_R \sin(m\pi t/\Lambda + \phi) \end{aligned} \quad (5)$$

(此处  $\phi$  称为相差,  $A_L$  和  $A_R$  分别为左、右镜面的振幅,  $\Lambda$  为初始时刻两个镜面间的距离,  $\varepsilon \ll 1$  为一个小参数)为例, 对广义 Moore 方程的解进行了系统研究, 发现  $G(z)$  和  $F(z)$  的台阶结构与边界的运动参数(频率、振幅和相差)均有密切的关系; 只有取某些特殊值时, 随着  $z$  的增加  $G(z)-z/\Lambda$  和  $F(z)-z/\Lambda$  曲线才可能出现台阶结构, 而且台阶的陡峭程度也完全由这些参数确定。

本文将在文献[17]的基础上, 利用广义 Moore 方程的数值解, 计算以(5)式所描述的双动边界一维

谐振腔内的能量密度,并进一步讨论能量密度与镜面运动的振幅、频率和相差的关系.

## 2. 数值求解广义 Moore 方程

在文献[16]中,Dalvit 和 Mazzitelli 针对(5)式所描述的简谐振动,利用重整化群技术获得了广义 Moore 方程的解  $G(z)$  和  $F(z)$ .但是,这种近似方法具有很大的局限性:首先, $\epsilon$  必须是一个小量,即  $\epsilon \ll 1$ ;其次,该方法只能处理  $\phi = 0$  和  $\pi$  两种特殊情况,而对于一般的  $\phi$  值,计算过程则十分繁琐;另外,这种方法不能处理除(5)式外的其他运动形式.

受 Cole 和 Schieve<sup>[14]</sup>的启发,我们<sup>[17]</sup>将数值求解只有一个动边界时的 Moore 方程的方法推广到两个边界都运动的情况,提出了广义 Moore 方程的数值求解方法.下面对该方法做简单介绍.

首先计算  $G(z)$ .在图 1(a)中,左、右两条曲线分别代表左、右镜面的世界线,左边的竖直线为时间轴.在时间轴上选取一点  $z$ ,从该点出发画一条零线,这条零线与右边的曲线交于  $(R(t_1), t_1)$  处.由此可知

$$z = t_1 + R(t_1) \quad (6)$$

和

$$G(z) = G(t_1 + R(t_1)). \quad (7)$$

利用广义 Moore 方程的第二式  $G(t_1 + R(t_1)) - F(t_1 - R(t_1)) = 2$ ,得到

$$G(z) = F(t_1 - R(t_1)) + 2. \quad (8)$$

被右镜面反射后,零线与左镜面交于  $(L(t_2), t_2)$  处,于是又有

$$t_1 - R(t_1) = t_2 - L(t_2) \quad (9)$$

和

$$F(t_1 - R(t_1)) = F(t_2 - L(t_2)). \quad (10)$$

利用广义 Moore 方程的第一式  $F(t_2 - L(t_2)) = G(t_2 + L(t_2))$ ,得到

$$F(t_1 - R(t_1)) = G(t_2 + L(t_2)). \quad (11)$$

从  $(L(t_2), t_2)$  反射回来之后,零线再一次与右镜面相交,交点为  $(R(t_3), t_3)$ ,从而得到

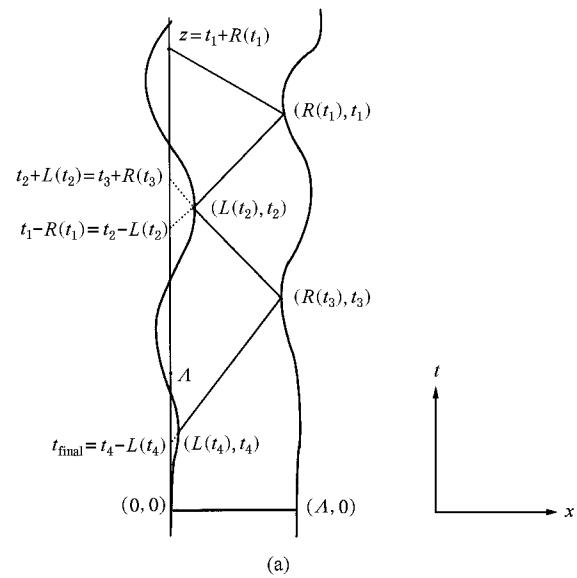
$$t_2 + L(t_2) = t_3 + R(t_3) \quad (12)$$

和

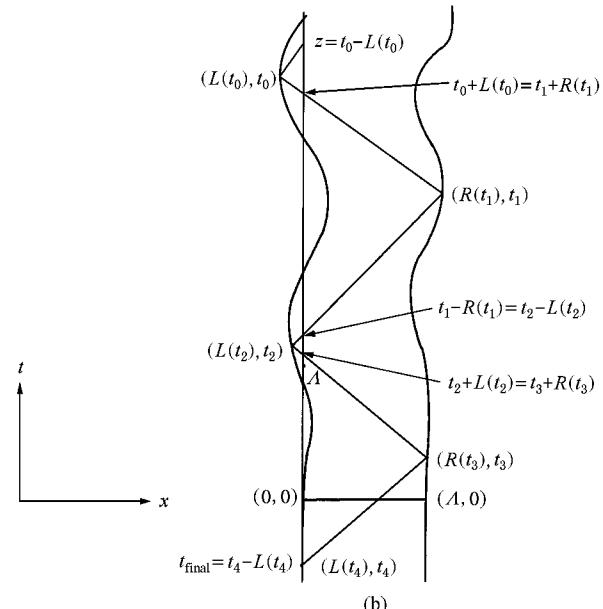
$$G(t_2 + L(t_2)) = G(t_3 + R(t_3)). \quad (13)$$

重复利用广义 Moore 方程的第二式,不难得到

$$G(z) = F(t_3 - R(t_3)) + 4. \quad (14)$$



(a)



(b)

图 1  $G(z)$  和  $F(z)$  的计算示意图 左右两边的曲线分别代表左右边界的 worldline,中间的折线代表从  $z$  出发的零线

若已知函数  $F$  在时刻  $t_2 - L(t_2)$  的值,或者函数  $G$  在时刻  $t_3 + R(t_3)$  的值,那么就可以利用(10)和(8)式,或者(14)式求得  $G(z)$ .否则将继续上述程序,直到零线进入  $G$  或者  $F$  的“静止区”,即  $(-\infty, \Lambda]$  或  $(-\infty, 0]$ .因为只有在静止区才可以直接确定  $G$  和  $F$  的值.于是,对于双动边界情形,上述程序在两种情况下可以被终止:I. 被右镜面反射后的零线一旦进入  $F$  的静止区  $(-\infty, 0]$ ;II. 被左镜面反射后的零线进入  $G$  的静止区  $(-\infty, \Lambda]$ .

从上述程序可以看到,每当零线被右镜面反射

一次,  $\alpha(z)$  的值就增加 2. 于是可以把  $\alpha(z)$  表示成两部分之和:

$$\alpha(z) = 2n + t_{\text{final}}/\Lambda, \quad (15)$$

式中  $n$  为零线被右镜面发射的次数,  $t_{\text{final}}$  为在  $G$  或  $F$  的静止区中零线与时间轴的交点. 当  $n > 1$  时,  $t_{\text{final}}$  为

$$t_{\text{final}} = \begin{cases} z - 2 \sum_{i=1}^n R(t_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} L(t_{2i}), & \text{I}, \\ z - 2 \sum_{i=1}^n R(t_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^n L(t_{2i}), & \text{II}; \end{cases} \quad (16)$$

当  $n = 1$  时,

$$t_{\text{final}} = \begin{cases} z - 2R(t_1), & \text{I}, \\ z - 2R(t_1) + 2L(t_2), & \text{II}. \end{cases} \quad (17)$$

$F(z)$  与  $\alpha(z)$  的计算程序非常相似(见图 1(b)), 这里不再赘述.

### 3. 谐振腔内的能量密度

在一维空腔内, 电磁场的能量密度的期望值为

$$\langle T_{00}(x, t) \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \hat{A}(x, t)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{A}(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right\}. \quad (18)$$

这里是对真空态求平均. 由于有高频贡献, 因而  $\langle T_{00} \rangle$  是发散的. 为了得到有限的物理结果, 人们常采用“point-splitting”正则化方法<sup>[18]</sup>. 利用该技术, Dalvit 和 Mazzitelli 得到了双动边界情形下有限的且与切断无关的能量密度

$$\langle T_{00}(x, t) \rangle = f_G(t+x) - f_F(t-x), \quad (19)$$

式中

$$\begin{aligned} 24\pi f_G(z) &= \frac{G''(z)}{G'(z)} - \frac{3}{2} \left( \frac{G''(z)}{G'(z)} \right)^2 + \frac{\pi^2}{2} (G'(z))^2, \\ 24\pi f_F(z) &= \frac{F''(z)}{F'(z)} - \frac{3}{2} \left( \frac{F''(z)}{F'(z)} \right)^2 + \frac{\pi^2}{2} (F'(z))^2. \end{aligned} \quad (20)$$

对于单边界运动情形(19)和(20)式化为

$$\langle T_{00}(x, t) \rangle = f(t+x) - f(t-x), \quad (21)$$

$$24\pi f(z) = \frac{U''(z)}{U'(z)} - \frac{3}{2} \left( \frac{U''(z)}{U'(z)} \right)^2 + \frac{\pi^2}{2} (U'(z))^2. \quad (22)$$

由于很难得到  $F(z)$  和  $\alpha(z)$  的解析解, 为此, 我们首先利用上节中给出的数值方法计算  $F(z)$  和  $\alpha(z)$ , 然后将其代入(20)式, 从而计算出能量密度

$$\langle T_{00}(x, t) \rangle.$$

从(20)式不难发现, 若在  $(x, t)$  处  $F(z)$  或  $\alpha(z)$  的值有一个突变, 那么  $\langle T_{00}(x, t) \rangle$  在该处就可以获得一个大的值, 而且突变越剧烈, 相应的  $\langle T_{00}(x, t) \rangle$  值也越大. 文献[17]的计算结果表示: 当谐振腔的边界按(5)式做简谐振动时, 取合适的边界振动参数, 随着  $z$  的增加,  $F(z)$  和  $\alpha(z)$  均出现台阶结构. 由此可作出一个定性判断: 与  $F(t-x)$  和  $\alpha(t+x)$  的台阶结构对应,  $\langle T_{00}(x, t) \rangle$  应该具有明显的波包形状. 在  $F(t-x)$  或  $\alpha(t+x)$  出现台阶跳跃的地方,  $\langle T_{00}(x, t) \rangle$  就产生一个波包, 台阶数与波包数一一对应; 而且, 台阶越陡, 对应的波峰就越尖; 在  $F(t-x)$  或  $\alpha(t+x)$  水平的地方,  $\langle T_{00}(x, t) \rangle$  达到其最小值. 以下是定量计算结果.

首先考虑三种情况 (i)  $A_L = A_R, \phi = 0$  (ii)  $A_L = A_R, \phi = \pi$  (iii)  $A_L = 0, \phi = 0$  (此时只有一个边界运动). 其他参数取自文献[16], 它们是  $t = 15.4\Lambda, m = 3, A_R = \Lambda$  和  $\epsilon = 0.01$ . 图 2 给出这三种情况下  $\alpha(t+x)$  和  $F(t-x)$  以及  $\langle T_{00}(x, t) \rangle$  随  $x/\Lambda$  的变化. 这里需要对图 2 和下面各图做一些说明: 第一, 与(i) (ii) 和 (iii) 三种情况对应的所有结果分别用粗实线、虚线和细实线表示. 第二, 为了表示方便, 统一用  $G(t+x)$  和  $F(t-x)$  表示 Moore 方程和广义 Moore 方程的解. 因此, 对于情况 (iii),  $\alpha(t+x)$  和  $F(t-x)$  分别对应  $U(t+x)$  和  $U(t-x)$ ; 第三, 图 2(a)、图 3(a) 和图 4(a) 中上面三条曲线代表  $G(t+x)$ , 而下面三条曲线则代表  $F(t-x)$ .

对照图 2(a) 和 (b) 可以发现, 在图 2(a) 中有台阶的地方, 图 2(b) 就确实存在一个峰与之对应. 对于情况 (i), 在  $x \in [0, \Lambda]$  内,  $\alpha(t+x)$  有一个台阶, 而  $F(t-x)$  有两个台阶, 因此在  $\langle T_{00} \rangle$  中共出现三个很强的尖峰. 这体现出了动边界效应, 亦即简谐振动的边界使真空场的能量密度产生了具有波包形状的干涉结构. 对于情况 (iii), 虽然  $\alpha(t+x)$  和  $F(t-x)$  也有三个台阶, 但相比之下, 这三个台阶要平缓得多, 故由此产生的  $\langle T_{00} \rangle$  峰也矮得多, 几乎可以忽略. 而对于情况 (ii),  $\alpha(t+x)$  和  $F(t-x)$  的台阶完全消失, 它们分别随  $x/\Lambda$  线性增加和降低; 与之对应,  $\langle T_{00} \rangle$  中的峰也完全消失, 成为一条平行于  $x/\Lambda$  轴的直线. 这说明, 在第二种情况下运动边界几乎不能产生动力学 Casimir 效应. 这是单动边界情形下所未发生过的现象.

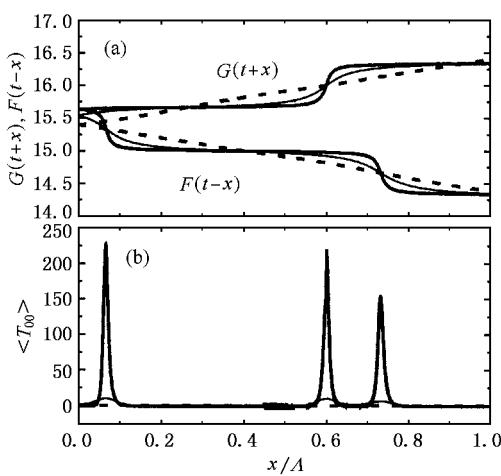


图2 在三种情况( i ) $A_L = A_R, \phi = 0$  ( ii ) $A_L = A_R, \phi = \pi$  ;和( iii ) $A_L = 0, \phi = 0$  下 ,系统能量密度和相位函数随  $x/\Lambda$  的变化  $t = 15.4\Lambda, m = 3, A_R = \Lambda$  和  $\epsilon = 0.01$

若  $G(t+x)-x/\Lambda$  和  $F(t-x)-x/\Lambda$  曲线出现台阶结构 ,在  $\langle T_{00} \rangle$  中则存在亚 Casimir 区域 . 所谓亚 Casimir 区域是指远离两个波峰之间的区域 . 从图 2 ( b ) 可以看出 , 在这个区域内 ,  $\langle T_{00} \rangle$  最小 , 在长时间极限下 , 它降到最小值  $9E_{\text{sta}}$  , 这里  $E_{\text{sta}} = -\pi/24\Lambda^2$  是静止 Casimir 能<sup>[14,19]</sup> . 这一规律对单动和双动边界系统均适用 .

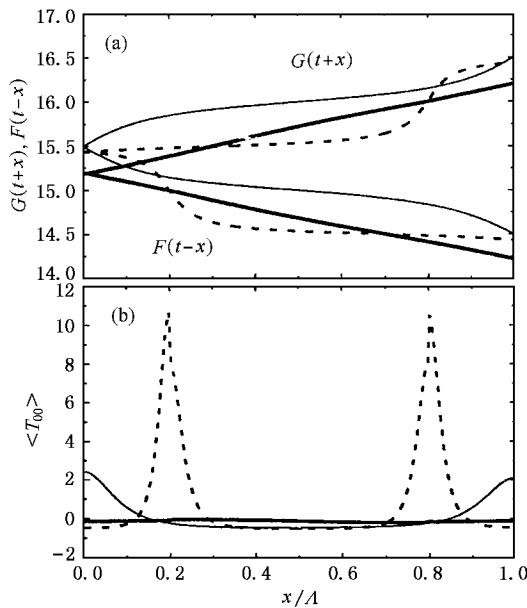


图3 在三种情况( i ) $A_L = A_R, \phi = 0$  ( ii ) $A_L = A_R, \phi = \pi$  和( iii ) $A_L = 0, \phi = 0$  下 ,系统能量密度和相位函数随  $x/\Lambda$  的变化  $m = 2$  ,其他参数同图 2

现在考虑  $m$  为偶数的情况 . 图 3 给出当  $m = 2$  ,  $t = 15.2\Lambda, A_R = \Lambda$  和  $\epsilon = 0.01$  时 , 上述三种情况下  $G(t+x)$  和  $F(t-x)$  以及  $\langle T_{00} \rangle$  随  $x/\Lambda$  的变化 . 当  $m = 2$  时 , 与情况( i ) 对应的  $G(t+x)$  和  $F(t-x)$  无台阶结构 , 故  $\langle T_{00} \rangle$  也无波包结构 . 然而 , 与情况( ii ) 对应的  $G(t+x)$  和  $F(t-x)$  却出现明显的台阶结构 , 由于在  $x \in [0, \Lambda]$  内只有两个台阶 , 因而  $\langle T_{00} \rangle$  也只有两个峰与之对应 . 同样地 , 由于情况( ii ) 的台阶比情况( iii ) 的台阶陡 , 因此与前者对应的  $\langle T_{00} \rangle$  峰比后者的峰尖 .

最后取  $m = 2, A_L/A_R = 0.1\Lambda, \phi = \pi/2$  和  $\epsilon = 0.01$  . 图 4 给出在时刻  $t = 15\Lambda, 25\Lambda$  和  $35\Lambda$  时  $G(t+x)$  和  $F(t-x)$  以及  $\langle T_{00} \rangle$  随  $x/\Lambda$  的变化 . 对图 4 还需作两点说明 : 第一 , 与  $t = 15\Lambda, 25\Lambda$  和  $35\Lambda$  对应的结果分别用细实线、粗实线和虚线表示 ; 第二 , 在图 4(a) 中 , 与  $t = 25\Lambda$  和  $35\Lambda$  对应的  $G$  和  $F$  是分别向下移动了 10 和 20 后的结果 . 计算结果显示 , 随着时间的增加 ,  $G$  和  $F$  的台阶结构逐渐形成 , 而且越来越陡 , 相应地 ,  $\langle T_{00} \rangle$  的峰也随之变得越来越尖 . 此外 , 随着时间的增加 , 亚 Casimir 区的  $\langle T_{00} \rangle$  逐渐降低 , 最后达到其稳定值  $4E_{\text{sta}}$  .

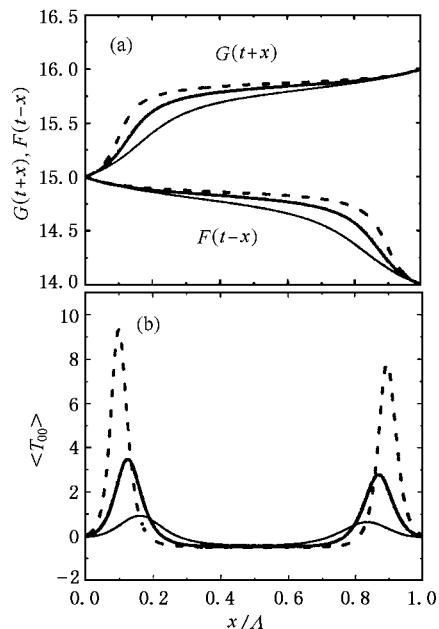


图4 在时刻  $t = 15\Lambda, 25\Lambda$  和  $35\Lambda$  相位函数和能量密度随  $x/\Lambda$  的变化 其他参数同图 3

## 4. 总 结

本文利用广义 Moore 方程的数值解计算了以 (5) 式描述的双动边界谐振腔内的能量密度  $\langle T_{00} \rangle$  , 并研究了  $\langle T_{00} \rangle$  的波包形式与边界运动的频率、振幅和相差的关系.

对于由两个全反射镜面构成的一维空腔 , 人们发现了一个规律 : 当其中一个边界固定 , 而另一个随时间做简谐振动时 , 随着  $z$  的增加 ,  $G(z)$  和  $F(z)$  一定会出现台阶结构 , 与之对应 , 能量密度出现明显的波包结构 . 然而 , 当两个边界都做简谐振动时 , 这种干涉现象却不一定会出现 . 针对本文所考虑的运动

形式 (5) 式 , 计算结果表明 ,  $G(z)$  和  $F(z)$  的台阶结构以及  $\langle T_{00} \rangle$  的波包结构均与运动边界的频率、振幅和相差有密切的关系 .

从 (20) 式可以看到 , 能量密度的性质完全由广义 Moore 方程的解  $G(z)$  和  $F(z)$  决定 . 因此 ,  $G(z)$  和  $F(z)$  的台阶结构必然导致  $\langle T_{00} \rangle$  的波包结构 . 而且台阶的陡峭程度直接决定  $\langle T_{00} \rangle$  峰的高度和宽度 .

此外 , 无论是单动边界还是双动边界 , 只要  $G(z)$  和  $F(z)$  有台阶结构 , 那么在  $\langle T_{00} \rangle$  中就一定存在亚 Casimir 区 . 随着时间的增加 , 亚 Casimir 区中的能量密度逐渐降低 , 最后到达一稳定值  $m^2 E_{\text{sta}}$  .

- 
- [ 1 ] Schwinger J 1993 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **90** 7285  
 [ 2 ] Jaekel M T and Reynaud S 1992 *J. Phys.* **I2** 149  
 [ 3 ] Dodonov V V , Klimov A B and Nikonov D E 1993 *J. Math. Phys.* **34** 2742  
 [ 4 ] Law C K 1994 *Phys. Rev. A* **49** 433  
 [ 5 ] Chen W Z and Wei R J 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 767  
 [ 6 ] Moore G T 1970 *J. Math. Phys.* **11** 2679  
 [ 7 ] Wu Y , Chu M C and Leung P T 1999 *Phys. Rev. A* **59** 3032  
 [ 8 ] Llave R de la and Petrov N P 1999 *Phys. Rev. E* **59** 6637  
 [ 9 ] Eberlein C 1999 *J. Phys. A : Math. Gen.* **32** 2583  
 [ 10 ] Kardar M and Golestanian R 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 1233  
 [ 11 ] Dodonov V V and Andreata M A 1999 *J. Phys. A : Math. Gen.* **32** 6711  
 [ 12 ] Yang X X and Wu Y 1999 *J. Phys. A : Math. Gen.* **32** 7375  
 [ 13 ] Plunien G , Schützhold R and Soff G 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 1882  
 [ 14 ] Cole C K and Schieve W C 1995 *Phys. Rev. A* **52** 4405  
 [ 15 ] Fulling S A and Davies P C W 1976 *Proc. Roy. Soc. London A* **384** 393  
 [ 16 ] Dalvit D A and Mazzitelli F D 1999 *Phys. Rev. A* **57** 2113  
 [ 17 ] Li L and Li B Z 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 1061  
 [ 18 ] DeWitt B S 1975 *Phys. Rep.* **19** 295  
 [ 19 ] Law C K 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 1931

# The energy density in a one-dimensional cavity with two moving boundaries

Li Ling<sup>1,2)</sup> Li Bo-Zang<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China

<sup>2)</sup> College of Physical Science and Technology, Sichuan University, Chengdu 610065, China

<sup>3)</sup> Institute of Physics and Center for Condensed Matter Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China

(Received 2 September 2002; revised manuscript received 13 December 2002)

## Abstract

Based on the numerical solutions of the generalized Moore's equations, the energy density is studied for the one-dimensional cavity where two boundaries oscillate resonantly. The feature of energy density depends strongly on the frequency, amplitude and dephasing of resonant motions of the boundaries. In some special cases, the packet structure takes place in the energy density.

**Keywords** : two moving boundaries, generalized Moore's equations, energy density

**PACC** : 1220D, 4250, 0370