第 52 卷 第 12 期 2003 年 12 月
1000-3290/2003/52(12)/2961-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52, No.12, December, 2003

测不准关系和最小不确定态*

邓文基[1)] 许运华[1)] 刘 平[2)]

[1)](华南理工大学物理系,广州 510640)

[2)](华南理工大学材料科学研究所,广州 510640)

(2003 年 2 月 13 日收到;2003 年 5 月 22 日收到修改稿)

利用力学量算符的厄密性和希尔伯特状态矢量模的非负性,重新给出了关于测不准关系的数学证明.简单的证明过程不仅揭示了测不准关系某些经常被忽视的特征,而且还可以直接给出最小不确定态的充要条件.在此基础上,我们提出了对易子为非零常数的任意一对力学量的最小不确定态问题,并且采用玻色型产生和湮没算符给出了它们的压缩态的明显表达式.

关键词:海森堡测不准原理,最小不确定态,压缩态

PACC:0365,0365F,4250

1. 引 言

海森堡测不准原理是理解量子力学哥本哈根诠释的关键[1,2].在流行的公理化量子力学体系中,测不准关系也是一个必要的数学推论.如果存在违背测不准关系的物理过程,那么必须重建量子力学的理论基础.如果在测不准原理的基础上建立了量子力学统计诠释和态矢量描述的数学方案,则无需任何具体的动力学方程就可以普遍地得到一系列的测不准关系[3,4].长期以来,测不准关系对物理系统的限制也是实验技术中必须正视的问题.光的相干态和压缩态[5—11]、光通讯和引力波的测量[12]以及关于冷原子玻色-爱因斯坦凝聚体自旋压缩态的最新研究[13—17]等都广泛地涉及到测不准关系和力学量不确定度的压缩问题[18].

本文关于测不准关系的严格数学证明只利用了力学量算符的厄密性和希尔伯特状态矢量模的非负性.简单证明不仅揭示了测不准关系某些经常被忽视的特征,而且还可以直接给出最小不确定态的充要条件[19,20].在此基础上,还进一步采用玻色型产生和湮没算符给出了对易子为非零常数的任意一对力学量的最小不确定态和压缩态的明显表达式.

2. 测不准关系的数学基础

波函数给出量子系统物理状态的完全描述,采用狄拉克的状态矢量符号[3,4]将其一般地记作 $|\psi\rangle$.待研究的力学量算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 的对易括号 $[\hat{A},\hat{B}]\equiv\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ 可一般地写作

$$[\hat{A},\hat{B}]=\mathrm{i}\hat{C}, \tag{1}$$

式中 $\hat{C}$ 标志一个厄密算符.两种特殊情形值得强调.如果 $[\hat{A},\hat{B}]=0$,则可以存在两个力学量的共同本征态,对它们没有测不准关系的限制.如果算符 $\hat{C}$ 只是一个不为零的常数,它必定是实数 C.

在任意给定的量子态,力学量的不确定度定义为 $\Delta A\equiv\sqrt{\langle\psi|(\Delta\hat{A})^2|\psi\rangle}$,其中 $\Delta\hat{A}\equiv\hat{A}-A$,而力学量的期望值定义为 $A\equiv\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$.利用力学量算符的厄密性和希尔伯特空间中态矢量模的非负性,即 $\langle\Psi|\Psi\rangle\geqslant0$,取特别选定的态矢量 $|\Psi\rangle\equiv(\Delta\hat{A}+\mathrm{i}\lambda\Delta\hat{B})|\psi\rangle$,容易证明对复参数 λ 的任意取值应有

$$\lambda^*\lambda(\Delta B)^2-\mathrm{Im}(\lambda)\langle\psi|\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}|\psi\rangle-\mathrm{Re}(\lambda)\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle+(\Delta A)^2\geqslant0, \tag{2}$$

其中等号仅对零矢量成立,$\mathrm{Re}(\lambda)$ 和 $\mathrm{Im}(\lambda)$ 分别标记复参数 λ 的实部和虚部,反对易括号定义为 $\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}\equiv\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}+\Delta\hat{B}\Delta\hat{A}$.

如果 $\Delta B=0$,即 $\Delta\hat{B}|\psi\rangle=0$,(2)式简化成为

---

* 国家重点基础研究专项基金(批准号:2001-03500)资助的课题.

$$(\Delta A)^2 - \mathrm{Re}(\lambda)\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle \geqslant 0. \tag{3}$$

除非$\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle = 0$,$\Delta A$ 可以是任意非负实数,否则必定要求 $\Delta A \to +\infty$.

类似地,如果 $\Delta A = 0$,即 $\Delta\hat{A}|\psi\rangle = 0$,(2)式简化为

$$\lambda^*\lambda(\Delta B)^2 - \mathrm{Re}(\lambda)\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle \geqslant 0. \tag{4}$$

除非$\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle = 0$,$\Delta B$ 可以是任意非负实数,否则必定要求 $\Delta B \to +\infty$.很明显,如果两个力学量算符的对易括号是非零常数,它们的本征值的可能取值区间必将为一切实数.这是我们将在下面以玻色型产生和湮没算符统一地处理最小不确定态问题的基础.

在更一般的情形下,如果量子态$|\psi\rangle$既不是 $\hat{A}$ 又不是 $\hat{B}$ 的本征右矢量,那么(2)式左端是参数 λ 的典型二次式,简单的代数运算可以证明

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geqslant \frac{1}{4}\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle^2 + \frac{1}{4}\langle\psi|\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}|\psi\rangle^2. \tag{5}$$

由于上式右端两项厄密算符的期望值都是实数,此不等式常被进一步改写为测不准关系的标准形式

$$\Delta A\cdot\Delta B \geqslant \frac{1}{2}|<[\hat{A},\hat{B}]>|. \tag{6}$$

它概括了(3),(4)和(5)式的讨论结果.但不等式(5)也是测不准关系的有用形式,在研究力学量的最小不确定态问题时就必须特别考虑[6,7,20].

如果两个力学量算符的对易括号等于一个纯虚数,即$[\hat{A},\hat{B}] = \mathrm{i}C$,那么满足等式

$$\langle\psi|(\Delta\hat{A})^2|\psi\rangle\cdot\langle\psi|(\Delta\hat{B})^2|\psi\rangle = \left(\frac{C}{2}\right)^2 \tag{7}$$

的量子态$|\psi\rangle$定义为这一对算符的最小不确定态[20—22].检查前述证明过程不难发现,这实际上是要求量子态同时满足条件

$$\Delta\hat{A}|\psi\rangle = -\mathrm{i}\lambda\Delta\hat{B}|\psi\rangle, \tag{8}$$

$$\langle\psi|\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}|\psi\rangle = 0. \tag{9}$$

该条件可进一步合并简化为

$$\Delta\hat{A}|\psi\rangle = -\mathrm{i}\lambda\Delta\hat{B}|\psi\rangle, \tag{10}$$

其中 $\lambda = \lambda^*$ 为非零实数(下文将证明事实上还要求 $\lambda C > 0$).由(10)式容易证明$\langle\psi|(\Delta\hat{A})^2|\psi\rangle = \lambda^2\langle\psi|(\Delta\hat{B})^2|\psi\rangle$,所以实数 λ 在关于压缩态问题的研究中将成为标志压缩程度的重要参量[7—9].对于单模光场,这两个力学量可以是一对可观测量的相位正交分量,若以粒子的一维运动为例,它们分别是粒子的坐标和动量[21,22].

3. 最小不确定态及其压缩

采用算符代数的方法可以普遍地解决最小不确定态问题.不失一般性,我们假定$[\hat{A},\hat{B}] = \mathrm{i}C$ 中的 C 是正实数(如果 $C<0$,可以改变 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 的顺序,或者令 $\hat{B}' = -\hat{B}$).为此我们引入湮没算符和产生算符

$$\hat{a} \equiv \frac{\hat{A}+\mathrm{i}\hat{B}}{\sqrt{2C}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$
$$\hat{a}^+ \equiv \frac{\hat{A}-\mathrm{i}\hat{B}}{\sqrt{2C}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}. \tag{11}$$

它们满足玻色型简单对易关系$[\hat{a},\hat{a}^+] = 1$,而实数 θ 为可调相角.由(10)式可知,算符为 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 的一对力学量的最小不确定态就是算符 $\hat{A}+\mathrm{i}\lambda\hat{B}$,也就是

$$\hat{g} = (1+\lambda)\hat{a} + (1-\lambda)\hat{a}^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} \tag{12}$$

的本征态,并且$[\hat{g},\hat{a}^+] = \lambda$.

如果 $\lambda > 0$,定义

$$\hat{b}_\xi \equiv \hat{a}\cosh r + \hat{a}^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}\sinh r,$$
$$\hat{b}_\xi^+ \equiv \hat{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta}\sinh r + \hat{a}^+\cosh r, \tag{13}$$

式中实参量定义为 $r \equiv -\ln(\lambda)$,复参数定义为 $\xi \equiv r\exp(\mathrm{i}2\theta)$,而 $\cosh r$ 和 $\sinh r$ 分别表示 r 的双曲余弦和双曲正弦函数.显然$[\hat{b}_\xi,\hat{b}_\xi^+] = 1$.利用 Baker-Hausdorff 定理[22,23]

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}+\hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] + \cdots, \tag{14}$$

可以证明

$$\hat{b}_\xi = \hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}^+(\xi). \tag{15}$$

其中幺正算符定义为

$$\hat{S}(\xi) \equiv \exp\left(\frac{\xi^*}{2}\hat{a}^2 - \frac{\xi}{2}\hat{a}^{+2}\right). \tag{16}$$

它正是量子光学中常用的压缩算符[6,7,21,22].因为 $\hat{b}_\xi \equiv \hat{g}/\sqrt{2\lambda}$,由(10)和(12)式可知,算符 $\hat{b}_\xi$ 的本征态就是力学量 A 和 B 的最小不确定态.如我们所知,Glauber 相干态[5,21,22]

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle \tag{17}$$

满足 $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.其中$|0\rangle$为"真空态",即 $\hat{a}|0\rangle = 0$,而 α 可以是任意复数,位移算符定义为[21,22]

$$\hat{D}(\alpha) \equiv \exp(\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}). \tag{18}$$

所以$|\Psi\rangle = \hat{S}(\xi)\hat{D}(\alpha)|0\rangle$就是我们所求的最小不

确定态,即 $\Delta A \cdot \Delta B = C/2$,并且其压缩度为 λ,即 $\Delta A = \lambda \Delta B$.

如果 $\lambda < 0$,重复以上的讨论可以证明,力学量 A 和 B 的最小不确定态应该是产生算符 $\hat{b}_{\xi}^{+}$ 的本征态.但我们知道玻色型的产生算符不存在可归一化的本征右矢量,因此也无法给出有意义的最小不确定态[24].注意到我们在开始讨论最小不确定态问题时,就假定了 $C > 0$,所以最小不确定态的充要条件(10)实际上要进一步限定实参数 λ 的取值满足条件 $\lambda C > 0$.

4.结　论

首先,我们仅仅利用力学量算符的厄密性和希尔伯特状态空间中矢量模的非负性,给出了测不准关系的严格数学证明.与常见的证明方法比较,它具有简单、明确和完整等优点,澄清了文献中一些模糊的概念和结论.证明过程不仅揭示了测不准关系某些经常被忽视的特征,而且还可以直接给出最小不确定态的充要条件.注意到对易子为非零常数的力学量的取值范围可以包括全部实数,我们建立了采用玻色型产生和湮没算符研究任意这样一对力学量的最小不确定态问题的普遍方案,并且一般地给出了最小不确定态和压缩态的明显表达式.

作者邓文基特别感谢香港中文大学学术交流计划对其2002年10月短期学术访问的资助.

[1] Van Der Waerden B L 1967 *Sources of Quantum Mechanics*(Amsterdam:North-Holland Pub. Co.)
[2] Wheeler J A,Zurek W H 1983 *Quantum Theory and Measurement* (Princeton:Princeton University Press)
[3] Landau L D,Lifshitz E M 1977 *Quantum Mechanics* (*Non-relativistic Theory*) 3rd ed (Oxford:Pergamon Press Ltd.) pp.1—24
[4] Dirac P A M 1982 *The Principles of Quantum Mechanics* 4th ed (Oxford:Clarendon Press) pp.1—135
[5] Glauber R 1963 *Phys*. *Rev*. **131** 2766
[6] Stoler D 1970 *Phys*. *Rev*. D **1** 3217;Stoler D 1971 *Phys*. *Rev*. D **4** 1925
[7] Yuen H P 1976 *Phys*. *Rev*. A **13** 2226
[8] Loudon R,Knight P L 1987 *J*. *Mod*. *Opt*. **34** 709
[9] Walls D F 1983 *Nature* **306** 141
[10] Yao C M,Guo G C 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 59(in Chinese)[姚春梅、郭光灿 2001 物理学报 **50** 59]
[11] Li Y M,Fan Q Y,Zhang K S *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1492 (in Chinese)[李永民、樊巧云、张宽修等 2001 物理学报 **50** 1492]
[12] Caves C M 1981 *Phys*. *Rev*. D **23** 1693
[13] Mustecaplioglu O E,Zhang M,You L 2002 *Phys*. *Rev*. A **66** 33611
[14] Orzel C,Tuchman A K,Fenselau M L *et al* 2001 *Science* **291** 2386
[15] Cai X H,Kuang L M 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 876
[16] Dong C H 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1058(in Chinese)[董传华 2001 物理学报 **50** 1058]
[17] Li C X,Fang M F 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 294
[18] Agarwal G S 2002 *Fortschritte Der Physik-Prog*. *Phys*. **50** 575
[19] Cohen-Tannoudji C,Diu B,Laloë F 1977 *Quantum Mechanics* (Vol.1) (New York:John Wiley & Sons) p165
[20] Louisell W H 1973 *Quantum Statistical Properties of Radiation*(New York:John Wiley & Sons) pp45—51
[21] Walls D F,Milburn G J 1995 *Quantum Optics* 2nd ed (New York:Springer-Verlag) pp42—44
[22] Scully M O,Zubairy M S 1997 *Quantum Optics*(Cambridge:Cambridge University Press) pp46—66
[23] Wilcox R M 1967 *J*. *Math*. *Phys*. **8** 962
[24] Loudon R 1983 *The Quantum Theory of Light* 2nd ed (Oxford:Clarendon Press) p1493

The uncertainty relations and minimum uncertainty states*

Deng Wen-Ji[1)] Xu Yun-Hua[1)] Liu Ping[2)]

[1)] (*Department of Physics, South China University of Technology, Guangzhou* 510640, *China*)

[2)] (*Research Institute of Material Science, South China University of Technology, Guangzhou* 510640, *China*)

(Received 13 February 2003; revised manuscript received 22 May 2003)

Abstract

Based upon some basic properties of Hermitian operators and Hilbert state vectors, the Heisenberg's uncertainty relations are analyzed in details. The necessary and sufficient condition for the minimum uncertainty states is re-obtained directly from our proof. We propose also the problem of squeezed states for any couple of dynamical variables, and solve it by using the bosonic creation and annihilation operators.

Keywords: Heisenberg's uncertainty relations, minimum uncertainty states, squeezed states

PACC: 0365, 0365F, 4250

* Project supported by the Special Foundation for State Major Basic Research Program of China (Grant No. 2001-03500).