

空间诱导群速度色散的数值研究^{*}

胡 巍[†] 卢光山 杨振军 郭 弘 刘承宜

(华南师范大学传输光学实验室, 广州 510631)

(2002 年 5 月 2 日收到 2002 年 8 月 9 日收到修改稿)

利用数值模拟方法研究了超短脉冲 Bessel 光束传输过程中的空间诱导群速度色散. 数值模拟的结果证实了对于实验中有限宽度的 Bessel 光束, 只要其衍射距离大于空间诱导群速度色散的距离, 空间诱导群速度色散的理论就可以很好地描述脉冲的演化过程.

关键词: 脉冲光束, 时空耦合, 空间诱导群速度色散

PACC: 4255B, 4280W

1. 引 言

随着激光技术的进展, 实验中已经可以获得接近激光振荡周期的超短激光脉冲. 此类脉冲的时间和空间部分在传输过程中会相互耦合、相互影响, 从而带来一系列新的传输效应, 因此称为脉冲光束^[1-8]. 脉冲光束在线性介质^[1-5]、色散介质^[6,7]和非线性介质^[8]中的传输已被广泛研究, 并发现了诸如时间微分^[3,4,6]、脉冲的延迟、展宽和变形^[6], 以及脉冲极性反转^[7]等一系列新效应, 还发现了空间诱导群速度色散 (spatial induced group velocity dispersion, 简称 SIGVD)^[9].

由于脉冲光束传输的复杂性, 大部分研究工作都假定脉冲光束的空间部分是 Gauss 分布, 这样可以利用 Gauss 光束的解析结果. 另一类常被用来构造脉冲光束的是 Bessel 光束^[10], 即无衍射光束, 已见报道的如脉冲 Bessel x 波 (pulsed Bessel x-wave, 简称 PBXW)^[11]、脉冲 Bessel-Gauss 光束 (pulsed Bessel-Gauss beam, 简称 PBGB)^[12] 等, 这些都是不同频率 Bessel 光束的叠加, 并部分继承了无衍射的性质.

本文研究了脉冲 Bessel 光束 (pulsed Bessel beam, 简称 PBB), 其空间和时间部分可以做分离变量, 空间部分是 Bessel 分布, 时间部分可以是任意脉

冲. 不同于 Liu 等人^[13]提出的傍轴条件下的 PBB, 本文的 PBB 是非傍轴传输方程的严格解, 并保持传输中的空间无衍射性质. 同时, 其时间部分传输行为类似于在普通色散介质中的传输, 此效应我们称之为 SIGVD 效应^[9].

严格的 Bessel 光束将携带无穷大的能量, 所以实验中可实现的无衍射光束都是有限宽度的, 或者称为截断 Bessel 光束 (truncated Bessel beams), 它只能在有限的传输距离内近似保持无衍射特性. 本文利用数值模拟方法研究有限空间宽度的 PBB 的传输行为, 数值模拟的结果证实了只要 PBB 的衍射距离大于 SIGVD 的色散距离, SIGVD 的理论就可以很好地描述脉冲的演化过程.

2. PBB 与 SIGVD

对于激光在自由空间中的脉冲光束的线性传输, 我们可以从频率域分析. 将电磁波场 $E(r, z, t)$ 满足的波动方程 $\nabla^2 E - (1/c)^2 \partial_t^2 E = 0$ 做 Fourier 变换到频率域:

$$\nabla^2 \tilde{E} + k^2 \tilde{E} = 0. \quad (1)$$

方程(1)与 Helmholtz 方程一样, 只是 $k = \omega/c$ 不再是常数. 对每一个 ω 都可以得到严格 Bessel 光束解 $J_0(\alpha r) e^{i\beta z}$ ($\beta^2 = k^2 - \alpha^2$), 于是可以在频率域构造出

^{*} 国家自然科学基金(批准号 60278013)及广东省自然科学基金团队项目(批准号 20003061)、霍英东教育基金(批准号 31058)和国家高技术研究发展计划专项经费部分资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: huwei@scnu.edu.cn

PBB 的表达式：

$$\tilde{E}(r,z,\omega) = J_0(\alpha r) e^{i\beta z} S(\omega), \quad (2)$$

其中 $S(\omega)$ 为初始脉冲的光谱. 以下假定 α 与频率无关, 此条件意味着在初始 $z = 0$ 处, 脉冲光束的时间空间部分可以分离变量, 而且不同频率分量的光束宽度一致^[2,3,6]. 另一类常见的情况是 α 与频率有关, 而不同频率分量的衍射距离与频率无关^[1,4,5], 即要求 $\alpha \propto \omega$, 于是会得到 PBXW^[10].

由于 α 与频率无关, 时间域的解可以写成分离变量形式：

$$E(r,z,t) = J_0(\alpha r) A(z,t). \quad (3)$$

很明显, 此解在传输过程中其空间部分将保持零阶 Bessel 函数 J_0 分布不变, 因而无衍射. 同时在传输过程中, 时间脉冲和空间光束之间一直可以分离变量, 而大部分脉冲光束的时间和空间部分相互耦合在一起, 即使初始时空可以分离, 传输的结果仍然时空耦合. 时空可分离变量是 PBB 的重要性质.

将(3)式代入波动方程, 可以得到

$$\nabla_{\perp}^2 J_0(\alpha r) = -\alpha^2 J_0(\alpha r), \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \alpha^2 A. \quad (5)$$

可以看到, 虽然 PBB 的时间空间部分可以分离变量, 但他们之间通过参数 α 联系在一起, 所以仍然存在时间传输和空间传输之间的相互作用, 即本文下面讨论的 SIGVD.

在普通色散介质中脉冲传输的色散由以下方程决定^[13]：

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (6)$$

其中线性电极化矢量 $P = \epsilon_0 \chi^{(1)}(t) E$. 在频率域(5)和(6)式都可以变成

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{A}(z,\omega) = i\beta \tilde{A}(z,\omega), \quad (7)$$

其中 $\beta^2 = k^2 - \alpha^2$ (PBB 在真空中) 和 $\beta^2 = k^2 [1 + \chi^{(1)}(\omega)]$ (普通脉冲在色散介质中, $\chi^{(1)}(\omega)$ 为 $\chi^{(1)}(t)$ 的 Fourier 变换), 通过对比可以得到 $\alpha^2 = -k^2 \chi^{(1)}(\omega)$. 这里空间诱导色散与普通色散的表示形式完全一样, 但其根源来自于空间参数 α^2 , 而 α 为空间分布 J_0 函数的参数, $1/\alpha$ 为空间 Bessel 光束的束宽, 所以我们称这种真空中的‘色散’为 SIGVD. 于是(5)式可以改写成标准的色散方程形式, 即

$$\frac{\partial A}{\partial z} = i\beta_0 A - \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

$$+ i \sum_{n=3}^{\infty} \frac{i^n \beta_n}{n!} \frac{\partial^n A}{\partial t^n}, \quad (8)$$

其中色散系数由以下关系决定：

$$\begin{aligned} \beta(\omega) &= \sqrt{k^2 - \alpha^2} \\ &= \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} (\omega - \omega_0)^n, \\ \beta_n &= \left. \frac{\partial^n \beta}{\partial \omega^n} \right|_{\omega = \omega_0}. \end{aligned} \quad (9)$$

不难得到 $\beta_0 = k_0 \cos \gamma$, $\beta_1 = 1/(c \cos \gamma)$, 其中 $k_0 = \omega_0/c$, $\sin \gamma = \alpha/k_0$, 于是相速度 $v_p = c/\cos \gamma$, 群速度 $v_g = c \cos \gamma$, 且满足 $v_p v_g = c^2$. 这些与单色光 Bessel 光束的性质一样. 进一步引入复数包络表示 $A(z,t) = \Psi(z,t) \exp[i(\beta_0 z - \omega_0 t)]$, 色散长度 $L_n = T_p^n / |\beta_n|$ (其中 T_p 为脉冲宽度), 以及归一化移动坐标 $\tau = (t - \beta_1 z)/T_p$ 和 $\zeta = z/L_2$, 得到

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} + i \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + i \sum_{n=3}^{\infty} \frac{i^n \text{sgn}(\beta_n)}{n!} \frac{L_2}{L_n} \frac{\partial^n \Psi}{\partial \tau^n} = 0, \quad (10)$$

其中 $\text{sgn}()$ 为符号函数. (10) 式为标准的色散方程. 与普通介质色散一样^[13], β_2 为最低阶的色散项, 亦即群速度色散 (group velocity dispersion, 简称 GVD). 其他项称为高阶色散项, 在 $L_n \gg L_2$ 时, 高阶项可以忽略, 此时方程退化为线性薛定谔方程. 仅考虑二阶色散时, 脉冲传输过程中会展宽, 当考虑高阶色散时, 特别是奇数阶色散时, 脉冲不仅展宽, 同时脉冲中心会漂移, 脉冲形状将出现不对称.

代表 SIGVD 效应的 $\beta_2 = -k_0 \tan^2 \gamma / \omega_0^2 \cos \gamma$ 的大小主要取决于 γ (即 α/k_0) 值. γ 值越大, 即非傍轴的作用越强烈, 导致的 SIGVD 越大, 典型值见图 1. 对 $\lambda_0 = 0.8 \mu\text{m}$ 的激光脉冲, 当 $\gamma = 0.1$ 时, β_2 值约为 $0.014 \text{fs}^2/\mu\text{m}$, 与熔融石英的色散值 ($0.036 \text{fs}^2/\mu\text{m}$) 接近. 当 $\gamma = 0.01$ 时, β_2 值约为 $1.4 \times 10^{-4} \text{fs}^2/\mu\text{m}$, 对应 10fs 左右的脉冲的色散距离不到 1m, 可见色散的作用很强.

图 1 给出在 $m = 1$ 和 $m = 2$ 时二阶和三阶色散长度随 γ 值的变化. 色散长度分别为 $L_2 = 2\pi\lambda_0 m^2 \cos \gamma / \tan^2 \gamma$,

$$L_3 = \frac{4}{3} \pi^2 \lambda_0 m^3 \cos^3 \gamma / \tan^2 \gamma,$$

其中 $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ 为中心频率的波长, $m = T_p/T_0$ 为脉冲宽度 T_p 内包含的光学振动周期数, $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 为光学振动周期. 可以看到 m 较大时, 色散长度增大,

对应色散效应变弱. 在 γ 较小时, 色散长度迅速变大, 色散效应变弱, 同时高阶色散弱于二阶色散. γ 较小意味着光束近似满足傍轴条件. 当 γ 较大时, 色散长度迅速减小, 色散效应增强, 同时高阶色散效应开始超过二阶色散的贡献, 非傍轴效应增强的同时, 也不能忽略高阶色散效应. 这反映出我们的色散效应来自于空间传输的本质.

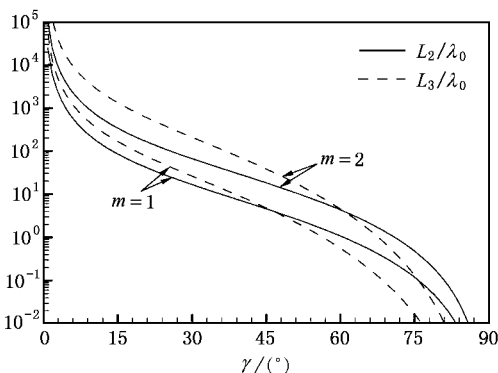


图1 色散长度 L_2/λ_0 和 L_3/λ_0 与 γ 的关系. 单周期脉冲 ($m=1$) 的色散强于双周期脉冲 ($m=2$), 当 $\gamma > 45^\circ$ 时, 三阶色散 β_3 比二阶色散 β_2 强.

3. 空间受限的 PBB

前面给出的 PBB 解中假定空间光束的分布是 Bessel 光束. 严格的 Bessel 光束将携带无穷大的能量, 所以实验中可实现的无衍射光束都是有限宽度的, 或者称为截断 Bessel 光束, 它只能在有限的传输距离内近似保持无衍射特性^[12]. 下面将用数值模拟的手段研究脉冲的截断 Bessel 光束的传输行为, 重点考察脉冲的变化过程是否满足色散方程(10).

对于光束半径为 R 的截断 Bessel 光束, 其无衍射传输的距离为 $Z_B = 2\pi R/\alpha\lambda_0$, 在此距离内, 光束近似保持无衍射, 中心光强基本不变. 当传输距离大于 Z_B , 光束迅速发散, 中心光强急剧下降到零. 所以为了观察到 SIGVD, 选取 γ 和 R 值使 $Z_B > L_2$, 并且主要考察光束中心 ($r=0$) 处的脉冲演化.

对脉冲光束的传输过程, 我们直接使用波动方程 $\nabla^2 E - (1/c)^2 \partial_t^2 E = 0$ 进行模拟, 初始光场分布取为 Gauss 脉冲:

$$E(r, z, 0) = \text{cir}(r/R) J_0(\alpha r) \exp\left(-\frac{t^2}{2T_p^2}\right) e^{i\omega_0 t}, \quad (11)$$

其中 $\text{cir}(r) = \begin{cases} 1 & r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases}$. 计算结果见图 2 和图 3, 其

中脉冲宽度取一个周期, $m=1$, $\lambda_0 = 0.8 \mu\text{m}$, $\gamma = 0.01$.

图 2 比较了理论预期的脉冲展宽和数值模拟的结果, 其中虚线、点线和实线是根据色散方程(10)得到的理论预期, 分别代表只考虑 β_2 、考虑 β_2 和 β_3 , 以及考虑全部 β_n 时的脉冲展宽因子 (broadening factor, 即传输后脉冲宽度与初始脉冲宽度之比, 脉冲宽度按照 RMS 定义计算); 圆点和方点分别为 $Z_B \approx 8L_2$ 和 $Z_B \approx 16L_2$ 时的数值计算结果. 在本文的计算条件下, $L_3/L_2 \approx 1.5$, 所以高阶色散的作用不可忽略. 实线是考虑了所有高阶色散项, 与数值模拟的结果最接近, 特别是在 z 较小时. 在 z 接近 Z_B 时, 脉冲光束中的低频长波长分量已经开始发散, 导致脉冲波形变化偏离理论预期. 这里圆点对应的 $Z_B \approx 8L_2$, 在 $z < 4L_2$ 的区间与理论预期一致, 但在 $z > 4L_2$ 区间, 展宽系数偏离 SIGVD 的预期单调下降. 方点对应的 $Z_B \approx 16L_2$, 在 $z < 8L_2$ 的区间与理论预期一致.

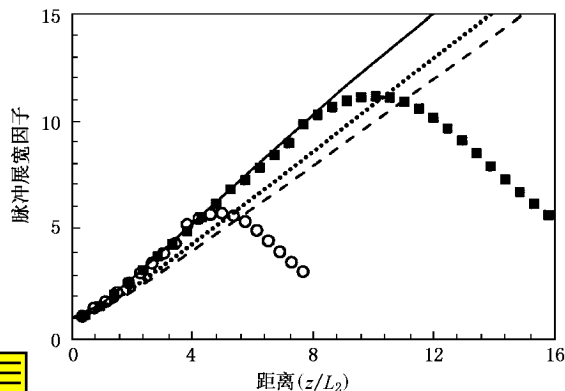


图2 Gauss 脉冲的展宽因子随传输距离的变化. $\gamma = 0.01$, $m=1$, - - -, 和 — 分别代表 1) 只考虑 β_2 2) 考虑 β_2 和 β_3 3) 考虑所有高阶色散效应, $\circ$ 和 $\blacksquare$ 分别代表 $Z_B \approx 8L_2$ 和 $Z_B \approx 16L_2$ 的数值模拟结果.

图 3 给出当 $Z_B \approx 8L_2$ 在 $z = 2L_2$ 和 $z = 6L_2$ 处的脉冲分布的计算结果, 实线是根据色散方程(10)的理论计算的分布, 考虑了所有高阶色散项. 可以看到, 在 $z = 2L_2$ 数值模拟的结果与理论预测非常接近. 而在 $z = 16L_2$ 已开始接近 Z_B , 脉冲后沿率先出现塌陷. 由于 SIGVD 是负值, 所以经过传输后的脉冲的后沿是红移的. 而低频成分对应的衍射距离较小, 所以脉冲后沿首先开始发散, 导致脉冲的塌陷和宽度减小.

通过数值模拟, 可以概括出 PBB 的脉冲演化过程. 在 $z < Z_B$ 区间, 各光谱分量都处于衍射距离之

内,光束的空间受限的影响不大,脉冲按照色散方程(10)的预期传输,在 z 已接近 Z_B ,低频成分率先开始发散,导致脉冲后沿的塌陷,脉冲宽度减小.考虑到超短脉冲光束的光谱非常宽,结合以上数值模拟结果,可以认为在 $z < \frac{1}{2} Z_B$ 区间内,用 SIGVD 的理论描述脉冲的演化过程是合适的,超出此区间,脉冲光谱中低频成分的空间衍射效应导致 SIGVD 的理论逐渐失效.

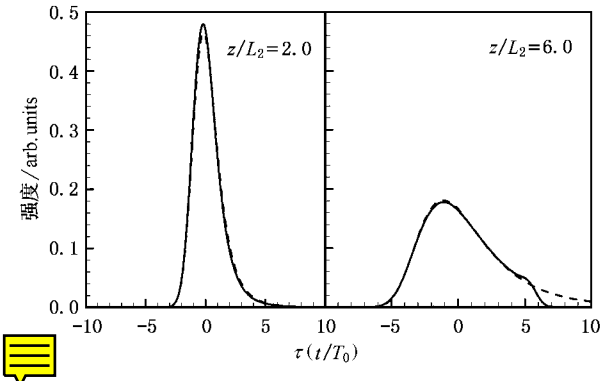


图3 不同距离处脉冲的形状 $\gamma = 0.01, m = 1, Z_B \approx 8L_2$, ——和 - - - 分别代表数值计算和理论预期的结果

以上数值模拟的结果说明 SIGVD 是实实在在可以被实验观察和验证的,它也可以用于啁啾脉冲的压缩.我们知道啁啾脉冲经过色散介质后的脉冲宽度可能被展宽,也可能被压缩,要求取决于啁啾和色散的符号^[14].我们模拟了不同啁啾值的 PBB 的传输过程,初始光场分布取为 Gauss 脉冲:

$$E(r, z, 0) = \text{cir}(r/R) J_0(\alpha r) \times \exp\left[-(1 + iC)\left(\frac{t^2}{2T_p^2}\right)\right] e^{i\omega_0 t}, \tag{12}$$

结果见图 4,其中 $m = 5, \lambda_0 = 0.8 \mu\text{m}, Z_B \approx 8L_2$. 由于 SIGVD 是负的,也就是反常色散,所以含有正啁啾的脉冲在传输过程中会出现脉宽变短,然后再展宽的过程.图 4 中计算结果与预测一致.但注意由于高阶 SIGVD 的存在,压缩得到的最短脉冲比理论预期的要长.

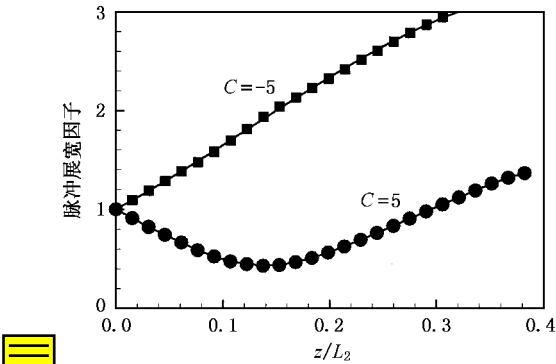


图4 啁啾 Gauss 脉冲的展宽因子随传输距离的变化

4. 讨 论

利用数值模拟手段,本文验证了 SIGVD 在实际的空间受限的 Bessel 光束传输过程中也存在,因而可以被实验观察到.本文构造的 PBB,其脉冲光束的空间和时间部分可以做分离变量,空间部分在传输过程中保持 Bessel 光束不变,而时间脉冲部分的传输行为类似于在普通色散介质中的传输,此效应我们称之为 SIGVD 效应.数值模拟结果表明,对于实验上可实现的空间受限的 PBB,只要 PBB 的衍射距离大于 SIGVD 的距离,就可以观察到时间脉冲部分的传输行为 SIGVD.同时模拟了利用 SIGVD 效应对啁啾脉冲光束的脉冲压缩过程.

感谢与王筱平博士、吕百达教授、蒲含博士的深入讨论.

[1]

Porras M A 1998 *Phys. Rev. E* **58** 1086

[2]

Kaplan E 1998 *J. Opt. Soc. Am. B* **15** 951

[3]

Agrawal G P 1998 *Opt. Commun.* **157** 52

[4]

Feng S, Winful H G and Hellwarth R W 1999 *Phys. Rev. E* **59** 4630

[5]

Feng S, Winful H G and Hellwarth R W 1998 *Opt. Lett.* **23** 385

[6]

Agrawal G P 1999 *Opt. Commun.* **167** 15

[7]

Porras M A 1999 *Phys. Rev. A* **60** 5069

[8]

Brabec T and Krausz F 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3282

[9]

Hu W and Guo H 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 49

[10]

Durnin J, Miceli J Jr and Eberly J H 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 1499

[11]

Lu J and Greenleaf J F 1992 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectron. Freq. Control* **39** 19

[12]

Porras M A, Borghi R and Santarsiero M 2000 *Phys. Rev. E* **62** 5729

[13]

Liu Z Y and Fan D Y 1998 *J. Mod. Opt.* **45** 17

[14]

Agrawal G P 1995 *Nonlinear Fiber Optics* 2nd ed (San Diego :Academic)

Numerical study of the spatially induced group velocity dispersion^{*}

Hu Wei Lu Guang-Shan Yang Zhen-Jun Guo Hong Liu Cheng-Yi

(Laboratory of Light Transmission Optics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

(Received 2 May 2002; revised manuscript received 9 August 2002)

Abstract

We have studied, by numerical simulations, the spatially-induced group velocity dispersion in the propagation of ultrashort-pulsed Bessel beams in free space. The simulation results have confirmed the existence of the spatially-induced dispersions in the propagation of a truncated Bessel beam which can be constructed in practice. It is shown that the spatially-induced dispersion is observed when the diffraction length of truncated Bessel beams is longer than the dispersion length of spatially-induced group velocity dispersion.

Keywords : pulsed light beam, spatiotemporal coupling, spatially induced group velocity dispersion

PACC : 4255B, 4280W

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60278013), the Team Project of the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 20003061), the Fok Ying Tung Education Foundation (Grant No. 81058), and the National High Technology Development Program of China.