

一种新的模拟渗流运动的数值方法^{*}

许友生[†]

(浙江师范大学物理系, 金华 321004)

(2002 年 4 月 27 日收到 2002 年 9 月 4 日收到修改稿)

根据格子 Boltzmann 方法及相关理论, 建立了一个新的模拟渗流运动的数值模型, 所得模型没有在边界上采取相应平均措施, 同时还避免了一些非物理副产品的出现. 实例计算数值结果与精确解符合较好, 证明模型可靠.

关键词: 渗流, 格子 Boltzmann 方法, 数值模型

PACC: 4755M, 0340

1. 引言

在渗流领域, 由于其内部结构与边界条件的复杂性, 求解流体运动方程不容易. 微观理论认为多孔介质流体运动是由大量粒子运动的集结, 微观相互运动的细节并不重要, 尽管分子间相互作用方式会改变流体的某些输运特性(如粘滞性), 但只要满足基本守恒律和必要的对称性, 就不会改变宏观渗流动力学方程, 这种观点是符合李政道、杨振宁在 1952 年首次提出的格子气思想的^[1]. 而格子 Boltzmann 方法(LBM)是从格子气演化而来, 后经碰撞算子线性化和 BGK 近似理论^[2]而得到, 它的出现引起了物理学工作者的极大兴趣^[3-9]. 伴随着 LBM 的发展, 人们已开始认识到渗流是其最有竞争力的领域之一^[10], 因为边界的复杂与否, 对于格子气算法而言没有很大区别. 作者与很多研究者一样^[11,12], 将这种方法应用于多孔介质的一些渗流问题, 并取得了一定的结果^[13,14], 但用 LBM 构筑渗流运动的数值模型, 迄今少有报道. 本文采用规则的六角模型(FHP-7Bit 模型^[15])根据相关的 LBM 理论, 建立了相应的渗流数值模型, 并用实例进行了验证. 这类研究对进一步阐明渗流机理有意义.

2. 建立模型

多孔介质中的流体运动可以用以下两种尺度来

描述:

1) 单孔隙模型 流体运动符合 Navier-Stokes 方程和近似边界条件.

2) 多孔隙平均模型 流体的运动符合达西定律^[16]

$$\mathbf{V} = -\frac{K}{\mu} \nabla P, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{V}$ 为渗流速度矢量, K 为渗透率, 对于各向同性介质, K 为标量, 对各向异性介质, K 为二阶张量, μ 为流体黏度, ∇P 为压力梯度.

从物理学观点看, 多孔介质孔隙内流体的运动必须符合 Navier-Stokes 方程. 而从 LBM 出发推导宏观 Navier-Stokes 方程有很多途径, 本文采用 FHP-7bit 模型, 它是一个二维六角网格, 有 6 个速度矢量 $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) 和一个 $i = 0$ 的静止粒子, 取 $\Delta t = 1$, 分布函数和平衡分布函数分别写成 $f_i(\mathbf{x}, t)$ 和 $f_i^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)$, 则格子 Boltzmann 方程可简写为

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i, t + 1) = f_i(\mathbf{x}, t) + \Omega_i, \quad (2)$$

$$\Omega_i = -\frac{1}{\tau}(f_i - f_i^{\text{eq}}) = -\omega(f_i - f_i^{\text{eq}}), \quad (3)$$

其中 τ 和 ω 分别为弛豫时间和碰撞频率, 对(2)式作 Taylor 展开, 略去三阶以上的高次项, 得粒子分布函数 f_i 演化的微观方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla\right) f_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla\right)^2 f_i = \Omega_i \quad (4)$$

f_i 与宏观参量 ρ 和 $\mathbf{V}$ 之间满足:

$$\sum_i f_i = \rho, \quad (5)$$

^{*} 浙江省自然科学基金(批准号:100039)、浙江省教育厅资助项目(批准号:20020871)及金华市科学基金(批准号:2001-1-157)资助的课题.

[†] E-mail: XYS.001@163.com

$$\sum_i \mathbf{e}_i f_i = \rho \mathbf{V}. \tag{6}$$

引入 Knudsen 数 $\epsilon (\epsilon \ll 1)$ 对方程 (4) 进行 Chapman-Enskog 展开, 注意到当 $f_i^{(0)} = f_i^{\text{eq}}$ 时, 有 $\Omega_i^{(0)} = 0, \Omega_i^{(1)} = -\omega f_i^{(1)}$, 于是得

ϵ^1 级近似

$$(\partial_t^{(1)} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla^{(1)}) f_i^{\text{eq}} = \Omega_i^{(1)} = -\omega f_i^{(1)}. \tag{7}$$

ϵ^2 级近似

$$(\partial_t^{(2)} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla^{(2)}) f_i^{\text{eq}} + (\partial_t^{(1)} + \mathbf{e} \cdot \nabla^{(1)}) f_i^{(1)} + \frac{1}{2} (\partial_t^{(1)} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla^{(1)})^2 f_i^{\text{eq}} = \Omega_i^{(2)}. \tag{8}$$

利用方程 (5) 和 (6), 并充分考虑到碰撞时粒子守恒 ($\sum_i \Omega_i = 0$) 和动量守恒 ($\sum_i \mathbf{e}_i \Omega_i = 0$), 分别将 (7) 和 (8) 式对 i 求和, 以及乘 $\mathbf{e}_i$ 后对 i 求和, 得

ϵ^1 级方程

$$\partial_t^{(1)} \rho + \nabla^{(1)} \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \tag{9}$$

$$\partial_t^{(1)} (\rho \mathbf{V}_\alpha) + \nabla^{(1)} \cdot \pi_{\alpha\beta}^{(0)} = 0. \tag{10}$$

ϵ^2 级方程

$$\partial_t^{(2)} \rho + \nabla^{(2)} \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \tag{11}$$

$$\partial_t^{(2)} (\rho \mathbf{V}_\alpha) + \nabla_\beta^{(2)} \cdot \pi_{\alpha\beta}^{(0)} + \nabla_\beta^{(1)} \cdot (\pi_{\alpha\beta}^{(1)} + \tilde{\pi}_{\alpha\beta}^{(1)}) = 0, \tag{12}$$

其中

0 级应力张量为

$$\pi_{\alpha\beta}^{(0)} = \sum_i \mathbf{e}_{i\alpha} \mathbf{e}_{i\beta} f_i^{\text{eq}}, \tag{13}$$

1 级应力张量为

$$\pi_{\alpha\beta}^{(1)} = \sum_i \mathbf{e}_{i\alpha} \mathbf{e}_{i\beta} f_i^{(1)}, \tag{14}$$

网格尺寸效应引起的修正项 (与 $\pi_{\alpha\beta}^{(1)}$ 同级) 为

$$\tilde{\pi}_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_i \mathbf{e}_{i\alpha} \mathbf{e}_{i\beta} (\partial_t^{(1)} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla^{(1)}) f_i^{\text{eq}}. \tag{15}$$

由方程 (7) 得

$$f_i^{(1)} = -\frac{1}{\omega} (\partial_t^{(1)} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla^{(1)}) f_i^{\text{eq}}. \tag{16}$$

根据文献 [17], 确定平衡分布函数形如

$$f_i^{\text{eq}} = \frac{\rho}{3} \left(C_s^2 + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{V} + \chi \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{V}^2 - \frac{1}{2} V^2 \right), \tag{17}$$

$i = 1, 2, \dots, 6,$

$$f_i^{\text{eq}} = \rho (1 - 2C_s^2 - V^2), \quad i = 0, \tag{18}$$

其中 C_s 为声速, 于是可以导出

$$(\partial_t^{(1)} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla^{(1)}) f_i^{\text{eq}} = \frac{\rho}{3} (\mathbf{e}_{i\alpha} \mathbf{e}_{i\beta} \nabla_\alpha^{(1)} V_\beta - C_s^2 \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{e}_i \text{ 的奇次项}) \tag{19}$$

所以

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha\beta}^{(1)} + \tilde{\pi}_{\alpha\beta}^{(1)} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\omega} \right) \sum_i \mathbf{e}_{i\alpha} \mathbf{e}_{i\beta} (\partial_t^{(1)} + \mathbf{e}_i \cdot \nabla^{(1)}) f_i^{\text{eq}} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\omega} \right) [\nabla_\alpha^{(1)} (\rho V_\beta) + \nabla_\beta^{(1)} (\rho V_\alpha) \\ &\quad + (1 - 4C_s^2) \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \delta_{\alpha\beta}], \end{aligned} \tag{20}$$

$$\pi_{\alpha\beta}^{(0)} = \rho C_s^2 \delta_{\alpha\beta} + \rho V_\alpha V_\beta. \tag{21}$$

将 (20) 和 (21) 式代入 (10) 和 (12) 式, 得

$$\partial_t^{(1)} (\rho V_\alpha) + \nabla_\beta^{(1)} (\rho C_s^2 \delta_{\alpha\beta} + \rho V_\alpha V_\beta) = 0, \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \partial_t^{(2)} (\rho V_\alpha) + \nabla_\beta^{(2)} (\rho C_s^2 \delta_{\alpha\beta} + \rho V_\alpha V_\beta) - \nabla_\alpha^{(1)} \\ \times \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\omega} \right) [\nabla_\alpha^{(1)} (\rho V_\beta) + \nabla_\beta^{(1)} (\rho V_\alpha) \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - 4C_s^2) \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \delta_{\alpha\beta} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

对上述两式求和, 即可得到格子 Boltzmann 形式的 Navier-Stokes 方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t} + (\rho \mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \\ = -\nabla P - \eta \nabla^2 \mathbf{V} + \left(\xi + \frac{D-2}{D} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}), \end{aligned} \tag{24}$$

其中 $\eta = \frac{2\tau-1}{8} \rho$ 为剪切粘滞系数, $\xi = \frac{4\tau-1}{8} (1 - 2C_s^2)$ 为体粘滞系数, D 为维数. 顺便同样可以用更简单的步骤得到格子 Boltzmann 形式的连续方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0. \tag{25}$$

对于渗流, 形如 (24) 式的 Navier-Stokes 方程需要作如下变更:

1) 渗流与普通流体流动的粘性力有所区别, 渗流中粘性力与渗透力成反比, 因此, 需要用 $\eta \frac{V}{K}$ (K 为渗透率) 来代替方程 (24) 中的 $\eta \nabla^2 \mathbf{V}$ [16].

2) 根据 Dupuit-Forchheimer 关系式 [16], 方程 (24) 中的 $\mathbf{V}$ 也可以用 $\frac{V}{\Phi}$ (Φ 为孔隙度) 来表示.

3) 根据 Beck 理论 [16], 渗流方程中不应包含迁移加速度项 $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$, 因为这一项的存在使微分方程中对空间导数阶数提高, 这与滑移边界条件不符合, 因此, 对于一般速度下的非稳态渗流, 应去掉该项.

综合 1) 2) 3) 三点, 由 (24) 式得到多孔介质内流体运动方程的格子 Boltzmann 形式为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t} = -\nabla P - \eta \frac{V}{K} + \frac{1}{\Phi} \\ \times \left(\xi + \frac{D-2}{D} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}), \end{aligned} \tag{26}$$

其中惯性项 $\frac{1}{\Phi} \frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t}$, 根据渗流理论 [16], 还存在矛盾

盾,应该用 $\frac{1}{\Phi}C_a \cdot \frac{\partial(\rho V)}{\partial t}$ 来代替 C_a 称为加速度系数张量.于是得到非稳态渗流运动方程的一般形式为

$$\frac{1}{\Phi}C_a \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} = -\nabla P - \eta \frac{V}{K} + \frac{1}{\Phi} \times \left(\xi + \frac{D-2}{D}\eta \right) \nabla(\nabla \cdot V). \quad (27)$$

对于稳态渗流(27)式中惯性项当然为零,进一步得到稳态渗流运动方程为

$$\nabla P = -\eta \frac{V}{K} + \frac{1}{\Phi} \left(\xi + \frac{D-2}{D}\eta \right) \nabla(\nabla \cdot V). \quad (28)$$

对于无源稳态渗流, $\nabla \cdot V = 0$ (28)式演化为著名的 Darcy 方程:

$$V = -\frac{K}{\eta} \nabla P. \quad (29)$$

这是很有意义的.同理,从(25)式所示连续方程可以演化出渗流连续方程:

$$\frac{\partial(\rho \Phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0. \quad (30)$$

至此,完成了从格子 Boltzmann 方程出发到渗流运动方程的还原推导过程.整个过程没有采取平均措施,也没有非物理副产品的出现.精确度达到 (ϵ^3) .

3. 例子与结论

为了验证用方程(2)(3)(5)(6)(17)(18)来模拟渗流运动方程(27)(28)(29)(30)的可靠性,我们引入一个无限长多孔介质柱中溶质运输模型^[18]

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D^1 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \pm V \frac{\partial C}{\partial x}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (31)$$

一起配置成跟踪多孔介质溶质浓度的分布过程.(31)式中 C 为溶质浓度, D^1 为水动力弥散系数, $D^1 = \alpha_L |V| + D^*$, α_L 为弥散度, D^* 为水中扩散系数, x 为流体渗流方向坐标.

选定初始条件, $t=0$ 时

$$\begin{aligned} -\infty < x < 0, \quad C &= C_0, \\ 0 \leq x < +\infty, \quad C &= C_1. \end{aligned} \quad (32)$$

边界条件为

$$\begin{aligned} t > 0, \quad x = \pm \infty, \quad \frac{\partial C}{\partial x} &= 0, \\ X = +\infty, \quad C &= C_1, \\ X = -\infty, \quad C &= C_0. \end{aligned} \quad (33)$$

同时选取: $\Phi = 0.01$, $K = 1.24 \times 10^{-6} \text{ m}^2$, $D^* = 1.38 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{d}$, $\alpha_L = 0.5\text{m}$, $\rho = 0.890\text{kg}/\text{m}^3$, $\epsilon = 0.01$, $\tau = 2000$.经过相应的数值计算后,部分结果如表1所示.表1中 $t = 10^4 \text{ d}$, 10^5 d , 10^6 d 之间数值相互符合得较好,说明数值结果可信.将数值解与 Laplace 变换解同时示于图1,比较后发现两者符合也较好,说明数值模型可靠,值得在研究渗流时推广.

表1 沿无限长多孔介质柱中溶质浓度的分布

$A(x,t) \backslash x(m)$ t 时间步/d	-3	-2	-1	0	1	2	3
10^4	0.9918	0.9712	0.8479	0.5001	0.1639	0.0244	0.0058
10^5	0.9971	0.9727	0.8450	0.5000	0.1665	0.0263	0.0059
10^6	0.9978	0.9724	0.8450	0.5000	0.1664	0.0262	0.0058

注: $A(x,t) = (C(x,t) - C_0) / (C_1 - C_0)$.

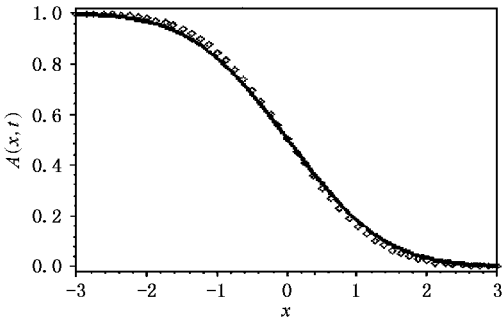


图1 无限长多孔介质柱中溶质浓度分布曲线 ——为 Laplace 变换解,□为格子 Boltzmann 模型数值解

[1] Lee T D and Yang C N 1952 *Phys. Rev.* **87** 410

[2] Bhatnagar P , Gross E P and Krook M K 1954 *Phys. Rev.* **94** 515

[3] Yu H D and Zhao K H 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1470(in Chinese)
[俞慧丹、赵凯华 1999 物理学报 **48** 1470]

[4] Li H B et al 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 392(in Chinese) 李华兵等 2000 物理学报 **49** 392]

[5] Li H B et al 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 837(in Chinese) 李华兵等 2001 物理学报 **50** 837]

[6] Feng S D and Michihisa T 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1006(in Chinese) 冯士德、鸟原道久 2001 物理学报 **50** 1006]

[7] Feng S D , Zhang Q and Ren R C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1207(in Chinese) 冯士德、张 琼、任荣彩 2001 物理学报 **50** 1207]

[8] Feng S D *et al* 2001 *Chin . Phys .* **10** 587

[9] Feng S D *et al* 2001 *Chin . Phys .* **10** 1103

[10] Rothman D H and Keller J M 1988 *J . Stat . Phys .* **52** 1119

[11] Rothman D H 1988 *Geophysics* **33** 509

[12] Rothman D H 1990 *J . Geophys . Res .* **95** 8662

[13] Xu Y S , Liu C Q and Yu H D 2002 *Appl . Math . Mech .* **23** 359

[14] Xu Y S and Xu X Z 2002 *Chin . Phys .* **11** 583

[15] Frish U *et al* 1987 *Copmlex . Syst .* **1** 649

[16] Kong X Y 1999 *Advanced Mechaics of Fluids in Porous Media*
(Hefei : Press of University of Science and Technology of China) p37
and 39(in Chinese) 孔祥言 1999 高等渗流力学(合肥 : 中国科
学技术大学出版社)第 37 和 39 页]

[17] Chen H D , Chen S Y and Matthaeus H 1992 *Phys . Rev . A* **45** 5539

[18] Jacob B 1972 *Dynamics of Fluids in Porous Media*(New York :
Elsevier Press)p492

A new numerical method for simulating fluid flow through porous media^{*}

Xu You-Sheng

(Department of Physics , Zhejiang Normal University , Jinhua 321004 , China)
(Received 27 April 2002 ; revised manuscript received 4 September 2002)

Abstract

A new numerical method is developed for simulating fluid flow through the porous media based on the lattice Boltzmann method.No measure is adopted on the boundary ,and no nonphysical by-product is produced at the same time.The numerical result also agrees well with the exact solution , therefore the model is considered to be reliable.

Keywords : flow through porous media , lattice Boltzmann method , numerical model

PACC : 4755M , 0340

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province ,China(Grant No.100039) , the Foundation of Zhejiang Education Bureau , China (Grant No.20020871) , and the Science Foundation of Jinhua , Zhejiang Province , China(Grant No.2001-1-157).

[†] E-mail :XYS.001@163.com