

脉冲信号对介观 RLC 电路量子态的影响*

嵇英华

(江西师范大学物理系,南昌 330027)

(2002 年 2 月 27 日收到,2002 年 6 月 30 日收到修改稿)

研究了外加脉冲信号对介观 RLC 电路量子态变化的影响.结果表明:当电路参数一定时,通过控制脉冲信号参数的变化可以调节介观电路量子态变化的跃迁概率.而当脉冲信号宽度是某个最小量的整数倍时,系统的量子态保持不变.最小量的值与电路参数有关,但与脉冲信号幅度无关.电阻越大,保持系统量子态稳定的脉冲信号最小宽度则越宽.

关键词:介观 RLC 电路,脉冲信号,量子态

PACC:7335

1. 引言

当集成电路及电子器件的尺寸与电子运输的相位关联长度相当时,必须考虑电路和器件的量子效应.近年来,人们不仅讨论了无源介观电路中电荷和电流的量子效应,也讨论了外加电源对介观电路系统的量子态、电荷和电流的期望值的影响^[1-12].总之,为了较直观地描述量子信息中的核心内容——量子计算和量子计算机,人们分析了一些由一个量子门和量子电子线路组成的量子电路模型,明确地说明了如何将输入变换为输出.在这些量子电路模型中,最简单但又最重要的模型是无耗散的介观 LC 电路.实验结果已经表明,在含有介观电容器的介观 LC 电路中会出现库仑阻塞(Coulomb blockade)现象.即当一个电子穿过隧道结由一个极板到达另一个极板时,必须有一个克服库仑阻力的起始阈值电压 e/C ,而当外加电压小于起始阈值电压时,穿过隧穿结的电流为零.表明由于库仑力的作用使得介观电容器中存在库仑能隙,电子在介观电容器中的运动实际上是一个单电子隧穿过程^[13].陈斌等人在考虑了介观 LC 电路中电荷的量子效应及库仑阻塞的影响后,得出外加电压源幅度必须是量子化的^[14].本文进一步讨论了脉冲信号对介观 LC 电路量子态的影响,结果表明:在脉冲信号作用下,

要保持无耗散的介观 LC 电路系统的量子态不变,脉冲信号的宽度必须是某个最小量的整数倍,最小量的值与电路参数有关^[15].注意到一个介观电路系统总是存在耗散,因而本文着重讨论在脉冲信号作用下有耗散的介观 RLC 电路量子态的变化,耗散对保持系统量子态不变的外加脉冲信号宽度的影响.

2. 介观 RLC 电路量子态的演化

脉冲信号作用下,介观 RLC 电路的运动方程为

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = A \epsilon(0) - A \epsilon(t - \tau) \quad (1)$$

$\epsilon(t)$ 为单位阶跃函数, A 为脉冲信号的幅度,脉冲宽度为 τ . 方程(1)相当于一个受迫阻尼谐振子的运动方程, q 为电荷,相当于坐标,和电荷共轭的量为广义电流 $p = L\dot{q}$ 相当于动量.尽管存在耗散,但在考虑了电子-声子相互作用后,仍可以把 q 和 p 看作为一对满足正则对易关系的共轭算符 \hat{q}, \hat{p} ^[16], 即它们满足:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (2)$$

在 $t = 0^-$ 时,体系的哈密顿量 \hat{H}_0 为

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2L} \hat{p}^2 + \frac{R}{2L} (\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}) + \frac{1}{2C} \hat{q}^2, \quad (3)$$

引入如下变换^[17,18]:

$$\hat{U} = \exp\left(i \frac{R}{2\hbar} \hat{q}^2\right), \quad (4)$$

* 江西省自然科学基金(批准号 0212018)资助的课题.

利用算符关系式

$$e^{\lambda \hat{A}} \hat{B} e^{-\lambda \hat{A}} = \hat{B} + \lambda [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2} \lambda^2 [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots,$$

能够得到经过变换后的哈密顿量 \tilde{H}_0 为

$$\tilde{H}_0 = \frac{1}{2L} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} L \omega^2 \hat{q}^2,$$

其中

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}.$$

进一步记 \tilde{H}_0 的本征函数为 $\Psi_n(q)$, 并设 $t = 0^-$ 时,

介观 RLC 电路处于 \tilde{H}_0 本征函数的基态

$$\Psi_0(q) = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\pi}} \exp\left(-i \frac{R}{2\hbar} q^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha^2 q^2\right), \quad (5)$$

其中 $\alpha^2 = L\omega\hbar^{-1}$. 在 $t = 0^+$ 时刻, 幅度为 A 、宽度为 τ 的脉冲信号作用于介观 RLC 电路, 则在脉冲信号作用期间, 体系的哈密顿量 \hat{H} 为

$$\hat{H} = \frac{1}{2L} \hat{p}^2 + \frac{R}{2L} (\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}) + \frac{1}{2C} \hat{q}^2 - \hat{q}A. \quad (6)$$

类似地, 对哈密顿量 \hat{H} 作 (4) 式给定的 \hat{U} 变换, 可得

$$\tilde{H} = \frac{1}{2L} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} L \omega^2 \hat{q}^2 - \hat{q}A.$$

上式相当于一个受迫量子谐振子. 设相应 \tilde{H} 的本征函数为 $\Phi_n(q)$ 则易得

$$\Phi_n(q) = D_q(q_0) \Psi_n(q) = \Psi_n(q - q_0), \quad (7)$$

其中平移算符 $D_q(q_0) = \exp\left(-q_0 \frac{d}{dq}\right)$, $q_0 = \frac{A}{L\omega^2}$. 引入湮没算符和产生算符 a, a^+ :

$$a = \sqrt{\frac{L\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} + i \frac{1}{L\omega} \hat{p} \right), \quad (8)$$

$$a^+ = \sqrt{\frac{L\omega}{2\hbar}} \left(\hat{q} - i \frac{1}{L\omega} \hat{p} \right). \quad (9)$$

对于 \tilde{H}_0 和 \tilde{H} 的本征态 $\Psi_n(q)$ 和 $\Phi_n(q)$, 分别有

$$(a^+)^n \Psi_0(q) = \sqrt{n!} \Psi_n(q), \quad (10)$$

$$(a^+ - \beta_0)^n \Phi_0(q) = \sqrt{n!} \Phi_n(q), \quad (11)$$

其中 $\beta_0 = q_0 \sqrt{\frac{L\omega}{2\hbar}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha q_0$. 根据文献 [15] 的结果, 可得在脉冲信号作用完后的瞬间, 有耗散的介观 RLC 电路系统所处的量子态 $\Psi(q, \tau)$ 为

$$\Psi(q, \tau) = \exp\left(-\frac{1}{2} \beta_0^2\right) \exp(i\delta(\tau)) \times \sum_n \frac{[-\beta(\tau)]^n}{\sqrt{n!}} \Phi_n(q), \quad (12)$$

$\Psi(q, \tau)$ 也可以表示为

$$\Psi(q, \tau) = \exp(i\delta(\tau)) \exp[\beta_0[\beta(\tau) - \beta_0]] \times \sum_n \frac{[\beta_0 - \beta(\tau)]^n}{\sqrt{n!}} \Psi_n(q), \quad (13)$$

其中

$$\delta(t) = \frac{1}{2\hbar} L \omega^2 q_0^2 t - \frac{1}{2} \omega t,$$

$$\beta(t) = \beta_0 \exp(-i\omega t).$$

当 $t = \tau$ 时, 可得

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\hbar} L \omega^2 q_0^2 \tau - \frac{1}{2} \omega \tau,$$

$$\beta(\tau) = \beta_0 \exp(-i\omega \tau).$$

同样, 能得到在一个脉冲信号作用完后, 下一个脉冲信号到来之前体系所处的量子态 $\Psi(q, t - \tau)$.

$$\Psi(q, t - \tau) = \sum_n C'_n \Psi_n(q) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} E_n^0(t - \tau)\right], \quad (14)$$

其中

$$E_n^0 = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega,$$

$$C'_n = \Psi_n(q) | \Psi(q, \tau)$$

$$= \exp(i\delta(\tau)) \exp[\beta_0[\beta(\tau) - \beta_0]] \frac{[\beta_0 - \beta(\tau)]^n}{\sqrt{n!}}. \quad (15)$$

(14) 式表示介观 RLC 电路经过幅度为 A 、宽度为 τ 的脉冲信号作用后, 由初态 $\Psi_0(q)$ 演化到量子态 $\Psi(q, t - \tau)$, 它是 \tilde{H}_0 的能量本征态函数 $\Psi_n(q)$ 的叠加. 将 $\delta(\tau)$ 和 $\beta(\tau)$ 代入 (15) 式, 可得介观 RLC 电路在脉冲信号作用后处于某个能量本征态 $\Psi_n(q)$ 的概率:

$$|C'_n|^2 = \frac{1}{n!} \left(2\beta_0 \sin \frac{\omega\tau}{2}\right)^{2n} \exp\left\{-\left(2\beta_0 \sin \frac{\omega\tau}{2}\right)^2\right\}. \quad (16)$$

(16) 式表明, 脉冲信号作用后, 系统处于某个能量本征态 $\Psi_n(q)$ 的概率由电路参数和外加脉冲信号参数 (宽度、幅度) 共同决定. 当电路参数确定后, 通过控制、调节脉冲信号参数, 可以控制量子态出现的概率.

3. 隧穿过程

现有的实验结果已表明电子在介观隧道结中的运动实际上是一个单电子隧穿过程. 由于电荷间的

库仑力相互作用,一个电子通过隧道结由一个极板到达另一个极板时,必须有一个克服库仑阻力的起始阈值电压;当外加电压小于起始阈值电压时,穿过隧道结的电流为零,出现库仑阻塞现象.文献[14, 19]的研究结果指出:介观电容器相当于一个隧道结,因而在无耗散的介观 LC 电路同样存在库仑阻塞现象.起始阈值电压和电路中的库仑能隙相对应,其值为

$$V_T^0 = \frac{e}{C},$$

e 为电子的电量, C 为电容器的电容.类似地,在有耗散的介观 RLC 电路,同样存在库仑阻塞现象.根据文献[14, 19]对介观 LC 电路的研究结果,利用方程(3)和(4),不难得出有耗散的介观 RLC 电路对应的起始阈值电压为

$$V_T = e \left(\frac{R^2}{L} - \frac{1}{C} \right).$$

一定情形下,电阻越大,起始的阈值电压越大,库仑阻塞现象越明显,与实验结果一致^[20].

若外加电压源电压的取值大于起始的阈值电压,并假设介观 RLC 电路在脉冲信号作用后系统恰好处于能量本征态 $\Psi_n(q)$,则根据量子力学原理,由(16)式应有

$$|C_n'|^2 = 1,$$

因此

$$n \exp \left\{ \left(2\beta_0 \sin \frac{\omega\tau}{2} \right)^2 \right\} = \left(2\beta_0 \sin \frac{\omega\tau}{2} \right)^{2n}. \quad (17)$$

方程(17)仅当 $n=0$ 时才有惟一的解,体系此时处于能量的基态 $\Psi_0(q)$,而 $\Psi_0(q)$ 正是体系的初态,表明这时介观 RLC 电路实际上是保持初态 $\Psi_0(q)$ 不变.由(17)式可知,此时仅当脉冲信号宽度的取值为

$$\tau = k \frac{2\pi}{\omega} \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (18)$$

才能够维持体系初态不变.

4. 讨 论

(18)式表明在脉冲信号作用后为了保持系统的

量子态不变,外加脉冲信号宽度只能取某些分立值.若脉冲信号宽度 τ 的取值不满足(18)式,则在脉冲信号作用后,下一个脉冲到来之前系统处于 $\Psi(q, t - \tau)$; $\Psi(q, t - \tau)$ 是本征态 $\Psi_n(q)$ 的叠加,实际上有许多末态,处于某个能量本征态 $\Psi_n(q)$ 的概率则由(16)式确定.表明在脉冲信号作用后,介观电路体系由初态 $\Psi_0(q)$ 将以不同的概率跃迁到某一激发态 $\Psi_n(q)$,因而此时系统的量子态难于确定,使得在随后的脉冲信号作用下,系统的量子态呈现复杂的演变.这对于量子信息的保持极为不利.

如果电路参数和外加脉冲信号宽度满足(18)式给定的约束条件,则系统的量子态维持初态不变.此时,脉冲信号幅度(取值大于相应的起始阈值电压)对维持系统的量子态没有任何影响.将 $\omega^2 = (LC)^{-1} - R^2 L^{-2}$ 代入(18)式,可得

$$\tau = \frac{2\pi k}{\omega_0 \sqrt{1 - \omega_0^2 R^2 C^2}},$$

$\omega_0^2 = (LC)^{-1}$, $\mu_T = RC$ 代表响应的特征时间,在物理上实际上反映了隧道电子与极板上的电荷有一个相互作用的过程.显然,在欠阻尼条件下,当 $k=1$ 且电容 C 和电感 L 一定时,电阻越小,为维持系统的量子态不变,外加脉冲信号宽度越窄;电阻越大,外加脉冲信号宽度越宽.这表明在一定条件下,增加电路中的电阻,有利于系统的量子态稳定.

在量子通信技术中,利用含隧道结的介观电子线路能够进行量子信息处理.但当为了有效地传输信号和量子信息的保存而需要保持该量子体系的量子态不变时,通过它的脉冲信号宽度是有限制的.脉冲信号的宽度和电路参数之间要满足一定的约束关系,此时,只要脉冲信号的幅度能够克服库仑阻力引起的起始阈值电压,对脉冲信号幅度没有其他限制.相比于无耗散的介观 LC 电路,在有耗散的介观 RLC 电路中,由于电阻的存在,保持系统量子态稳定的脉冲信号宽度更宽.

- [1] Li Y Q and Chen B 1996 *Phys. Rev. B* **53** 4027
- [2] Li Y Q and Chen B 1998 *Commun. Theor. Phys.* **29** 139
- [3] Wang J S and Sun C Y 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2007 (in Chinese)
[王继锁、孙长勇 1997 物理学报 **46** 2007]
- [4] Wang J S, Han B C and Sun C Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1187
(in Chinese) [王继锁、韩保存、孙长勇 1998 物理学报 **47** 1187]
- [5] Ling R L 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2343 (in Chinese) [凌瑞良 1998 物理学报 **48** 2343]
- [6] Wang J S, Feng J and Zhan M S 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 299 (in Chinese) [王继锁、冯 健、詹明生 2001 物理学报 **50** 299]
- [7] Long C Y and Liu B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1011 (in Chinese)
[龙超云、刘 波 2001 物理学报 **50** 1011]
- [8] Fan H Y and Liang X T 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 174
- [9] Liang X T and Fan H Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 486
- [10] Gu Y J 2001 *Chin. Phys.* **10** 490
- [11] Wang X G and Pan S H 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 171
- [12] Lei M S, Ji Y H and Xie F S 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 163
- [13] Ji Y H, Rao J P and Lei M S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 395 (in Chinese) [嵇英华、饶建平、雷敏生 2002 物理学报 **51** 395]
- [14] Chen B *et al* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 129 (in Chinese) [陈 斌等 1997 物理学报 **46** 129]
- [15] Ji Y H *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1064 (in Chinese) [嵇英华等 物理学报 **50** 1064]
- [16] Ji Y H, Lei M S and Ouyang C Y 2002 *Chin. Phys.* **11** 163
- [17] Wang J S, Liu T K and Zhan M S 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 528
- [18] Long C Y, Liu B and Wang X F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 159 (in Chinese) [龙超云、刘 波、王心福 2002 物理学报 **51** 159]
- [19] Ji Y H *et al* 2002 *Chin. Phys.* **11** 720
- [20] Wang C and Bai C L 1998 *Electron Tunneling Effect in Surface Sciences* (Wuhan : Huazhong Normal University Press) p 83 (in Chinese)
[王 琛、白春礼 1998 表面科学中的电子隧道效应(武汉 : 华中师范大学出版社) 第 83 页]

Influences of an external pulse on the quantum state of a mesoscopic RLC circuit *

Ji Ying-Hua

(Department of Physics , Jiangxi Normal University , Nanchang 330027 , China)

(Received 27 February 2002 ; revised manuscript received 30 June 2002)

Abstract

In this paper , the influences of an external pulse on the variation of the quantum state of a mesoscopic RLC circuit are investigated emphatically . Our research result indicates that the transition probabilities of the variation of the quantum state are adjusted by controlling the variation of the pulse parameters when the parameters of the mesoscopic circuit are constant . We point out that the quantum state of a system is stable when the width of the pulse is equal to the integral times of the minimum fixed value . The minimum fixed value is not related to the altitude of pulse but the circuit parameters . The larger the resistance , the wider the minimum fixed width of the external pulse .

Keywords : mesoscopic RLC circuit , pulse signal , quantum state

PACC : 7335

* Project supported by the Natural Science Foundation of Jiangxi Province , China (Grant No. 0212018).