

颗粒物质中圆棒受到的静摩擦力^{*}

胡 林^{1)†} 杨 平¹⁾ 徐 亨¹⁾ 江 阳¹⁾ 须海江¹⁾ 龙 为¹⁾ 杨昌顺¹⁾ 张 弢¹⁾ 陆坤权²⁾

¹⁾ 贵州大学物理系, 贵阳 550025)

²⁾ 中国科学院物理研究所, 北京 100080)

(2002 年 8 月 7 日收到, 2002 年 9 月 18 日收到修改稿)

通过实验研究了圆棒在颗粒物质中受到的摩擦力与颗粒填充高度及棒径的关系. 观测到摩擦力随颗粒高度和棒径而增大. 用连续介质模型推导了摩擦力公式, 与实验观测基本一致. 结果表明, 摩擦力和棒径成正比; 当颗粒高度很小时, 摩擦力与颗粒高度平方成正比, 而当颗粒堆积很高时, 摩擦力与高度成正比, 即静摩擦力与接触面积成正比.

关键词: 颗粒物质, 摩擦力

PACC: 4630P, 0547

1. 引 言

近年来, 对颗粒物质的静态与动态性质的研究引起广泛兴趣^[1-4]. 例如, 颗粒中的力结构, 摩擦, 振动分离和斑图形成, 颗粒的流动特性^[2,5]与崩塌等. 但颗粒物质的一些最基本的问题还在困扰人们, 其中沙堆中的摩擦就是一个典型的例子. 有些研究认为, 水平方向颗粒层彼此之间的相对滑移同样服从一般的摩擦规律, 摩擦力 F 来源于正压力 N ^[6-8]. $F = \mu N^n$, 式中 μ 为摩擦系数; 当 $n = 1$ 时, 即摩擦力不明显的依赖于接触面. 而另一些实验指出, 颗粒物质具有不同于一般固体的性质. 因此, 有必要重新认真地研究大量颗粒集聚条件下的摩擦规律.

为解释大量颗粒堆积的粮仓中当颗粒高度足够高时, 底部压力不随高度增加而趋于饱和的所谓“粮仓效应”, Janssen^[9]提出连续介质模型, 假定竖直方向压力对粮仓壁产生横向分量, 颗粒与仓壁的摩擦力支撑了部分垂直压力, 从而给出粮仓底部竖直方向压强 $P(z)$ 与堆积高度 z 变化的公式: $P(z) = P_m[1 - \exp(-z/\lambda)]$, 式中 z 为填充高度, $\lambda = R/2\mu_w k$ 称为相关长度(其中 R 为粮仓半径, μ_w 为颗粒与壁的摩擦系数, k 为约 0.3 的常数), P_m 为饱和

时的压强. 公式表明, 当高度足够大时, 压强 $P(z)$ 趋于饱和值 P_m . 这一模型到目前仍得到广泛认可^[3]. 有人提出粉末墙 (powder-wall) 的概念^[10], 认为粉末墙接触的相互作用力不遵从一般的摩擦规律, 某些情况下, 摩擦力直接与接触面成正比, 而且, 对垂直负载相当敏感. Horvath 等^[11]通过实验研究了圆棒在沙子中提升时受到的力与沙子填充高度及堆积密度的关系. 其结论为: 在疏松沙子中, $10 < h < 25\text{cm}$ 的范围内, 力的平均值与填充高度 h 为线性关系. 这一结果有明显的局限和不合理性. 我们通过实验测量了圆棒在颗粒中受到的摩擦力随颗粒高度和棒径的关系. 结果表明, 圆棒受到的摩擦力 F 随颗粒高度 h 和棒径 D 而增大. 用连续介质模型得到摩擦力与深度 h 和棒径 D 的关系: $F = \pi D \mu_w P_m [h + \lambda(e^{-h/\lambda} - 1)]$, 与测量结果相符合.

2. 实 验

实验及测量装置如图 1 所示. 圆筒直径为 0.14m, 高度为 0.50m, 底部有一个深度为 0.02m 带有可拆卸活动盖的凹槽. 凹槽的作用一方面是由于安装探测棒时竖直定位, 另一方面在测量过程中, 使棒在提拉移动过程中保持颗粒与棒接触的宏观高度

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 19872021), 贵州省科技厅基金(批准号: 20013024)和贵州省教育厅基金(批准号: 2001002)资助的课题.

[†] 通信联系人. E-mail: hulin53@sina.com Tel: 0851-3621576(H); 13037838399

不变.将一根铝制探测棒竖直置于圆筒底座中央的凹槽内,棒与凹槽壁的间隙为 0.001m.用直径(d)为 0.003 和 0.0004m 两种尺寸的玻璃珠洗净、干燥后,根据设定质量填入棒与圆筒间.用粒径为 0.0004m 颗粒做实验时,注入颗粒前,用外径等于圆筒直径内径等于棒径的一片塑料纸穿入棒底端,封住棒与凹槽之间的间隙,避免颗粒掉进缝隙.加入颗粒后,棒的摩擦力来源于玻璃珠作用于棒表面的力.棒顶端连接到带有弹簧的提拉系统,选择适当弹性系数的弹簧,使其在测量最大静摩擦力的作用范围内弹性系数为线性.上部是力传感器,灵敏度为 0.001g.测量前,根据需要设定棒顶部到探针之间的提拉距离,当棒上端触到探针时切断电机电源,计算机记录并显示相应的测量时间,将该时间设置为测量时间,可计算出移动距离.挂探测棒后,其重量使弹簧伸长,将此作为测量时起始位置参考点,并计录下提拉启动初始值,作数据处理时减掉该值,即可得到不包含棒重的摩擦力大小.测量时,升降系统(滑块、传感器、弹簧)带动探测棒缓慢上升,同时,拉力传感器把探测棒感受到的力转换为电压信号.经 A/D 转换输入计算机,计算机自动采集和存储数据,并显示每次测量曲线.到达设置时间(即设定提拉距离),计算机自动切断电机电源.每测完一个数据,倒出全部玻璃珠,再重复进行测量.尽量保证每次操作条件(倾注高度、颗粒下落位置、提拉启动初始值等)相同,每个实验数据均是重复测量十次的平均值,并计算平均标准误差.

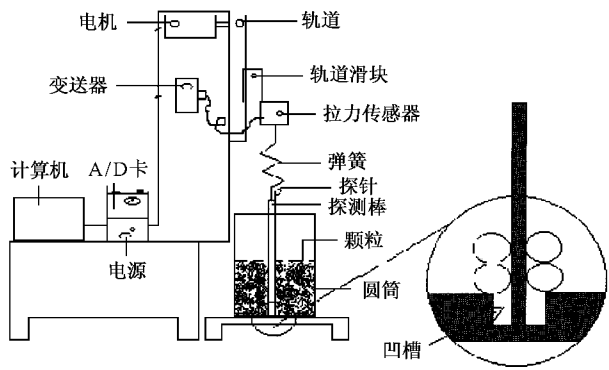


图 1 颗粒沙堆中摩擦力测量装置图

3. 结果与讨论

用一根直径为 $D = 0.01\text{m}$ 的圆棒放入直径为

0.14m 的有机玻璃容器中央,将粒径 $d = 0.0004\text{m}$ 的玻璃珠慢慢注入容器内,填充至所需高度 h . h 值从 0.06 到 0.44m,每次间隔 0.02m.在每个高度 h 值时,启动升降系统,在达到棒与颗粒间最大静摩擦力前,棒的位置保持不变,弹簧却逐渐伸长,这时可记录力与提拉距离关系曲线.当棒突然移动时,则达到最大静摩擦力值.以后就可得到每个高度 h 值所对应的最大静摩擦力.图 2 所示为填充高度为 0.31m 时的力随提拉距离的关系.横坐标为提拉距离 x ,纵坐标为力 F .可以看出,提拉开始的前一段,力随提拉距离增加而线性增大,到达某一位置时,棒突然移动,对应的力为最大静摩擦力,随即测量得的力突然减小,表明此后为滑动摩擦力.对不同高度进行同样的测量,就可得到每个高度 h 值所对应的最大静摩擦力.图 3 表示最大静摩擦力随高度变化关系.图 3 中数据点是 10 次测量平均值,横坐标为填充高度 h ,纵坐标为最大静摩擦力的平均值(下称静摩擦力).可以看出,静摩擦力随高度增加而增大,并非线性关系,这个结果与 Horvath 等的实验不相符.为了考察不同棒径对摩擦力随高度变化关系的影响,我们测量了 3 种不同直径(分别为 0.01, 0.02 和 0.03m)的棒在 $d = 0.0004\text{m}$ 颗粒中摩擦力随高度变化关系,结果示于图 3 插图.从图 3 插图可看出,摩擦力随棒径线性增大.将摩擦力与棒径之比 F/D 随高度变化的关系绘于图 4,得到 F/D 与高度 h 关系测量点均在一条曲线上,即 F 与 D 成正比.这将在后面的分析中进一步讨论.

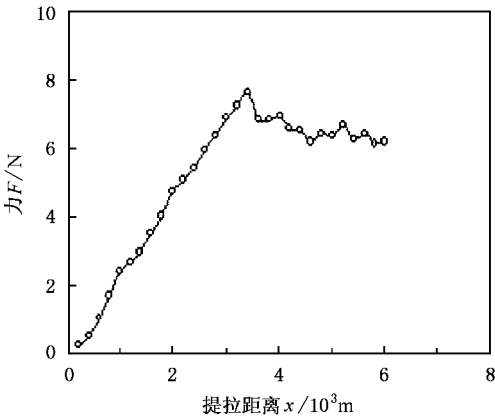


图 2 棒径为 $D = 0.01\text{m}$ 填充高度为 $h = 0.31\text{m}$ 时的力 F 随提拉距离 x 的关系

我们来分析实验得到的静摩擦力随高度变化关系的机理.从前面的粮仓效应 Janssen 连续介质模型

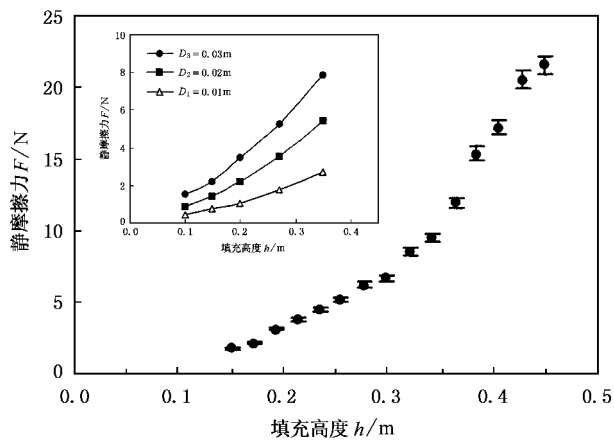


图3 最大静摩擦力随高度变化关系($D=0.01\text{m}$, $d=0.0004\text{m}$) , 插图为3种不同直径棒在颗粒中摩擦力随高度变化的关系

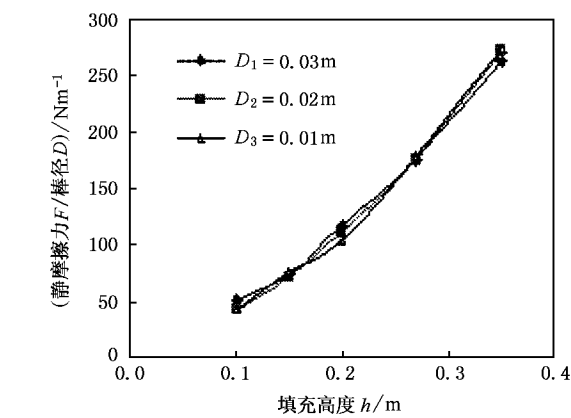


图4 3种不同直径棒在 $d=0.0004\text{m}$ 颗粒中摩擦力与棒径之比随高度变化的关系

的压强公式出发,可以认为在高度 z 处垂直于棒的正压力 $p_{\perp}(z)$ 正比于颗粒的竖直方向的压力 $p(z)$, 即 $p_{\perp}(z)=\alpha p(z)$, α 为比例系数,并认为不同高度时 α 值相同.图5给出圆棒在颗粒中受力的示意图.圆棒表面 dz 区域受到的正压力为 $\pi D p_{\perp}(z) dz$, 其中 D 为圆棒直径.若颗粒与圆棒的摩擦系数为 μ , 则圆棒在深度为 h 的颗粒中受到的摩擦力应为

$$F = \int_0^h \pi D \mu p_{\perp}(z) dz = \int_0^h \pi D \mu \alpha p_m [1 - e^{-z/\lambda}] dz \\ = \pi D \mu \alpha p_m [h + \lambda(e^{-h/\lambda} - 1)]. \quad (1)$$

式中 λ 如前所述为 $R/2\mu_w k$, 一般情况下 $\lambda \approx (3\sim 4)R$, R 为圆筒半径.即圆棒在颗粒中受到的摩擦力随颗粒深度 h 而增大,遵从(1)式所示 F 与 h 的关系变化.这与图3所示实验测量曲线趋势相一致.而

且圆棒受到的摩擦力与其直径 D 成正比,图4所示的测量结果已清楚表明.

由(1)式可知,当 $h \ll \lambda$ 时,

$$F \approx 0.5 Ah^2 / \lambda = 0.5 \pi D \mu \alpha p_m h^2 / \lambda; \quad (2)$$

当 $h \gg \lambda$ 时,

$$F \approx A(h - \lambda) = \pi D \mu \alpha p_m (h - \lambda). \quad (3)$$

(2)和(3)式表明,当颗粒堆积不太高时, F 与 Dh^2 成正比;而当颗粒堆积很高时, F 与 Dh 成正比.

以上结果告诉我们,从颗粒(如沙)中拔一根棒所需的力的大小与它所埋入的深度及棒的直径有关.当棒在颗粒中插得很深时,拔出它所需的力近似与棒和颗粒的接触面积成正比,即颗粒物质中静摩擦力与接触面积成正比.在我们的讨论中,与容器和圆棒直径相比,所用颗粒尺寸很小,将颗粒作为连续介质处理,没有考虑颗粒尺寸的影响.同时,所用圆棒直径与容器直径之比很小,实验结果对容器的尺寸并不敏感,这由图4所示圆棒直径大小不影响观测到的规律而得到证明.我们实验所用的是圆棒,对其他形状的棒(如方形棒),处理的方法和结果也应类似.颗粒堆积的密度对测量的摩擦力影响很大,我们在实验中尽量注意保持相同.对于颗粒的堆积密度如何影响摩擦力这一问题,我们将开展进一步研究.

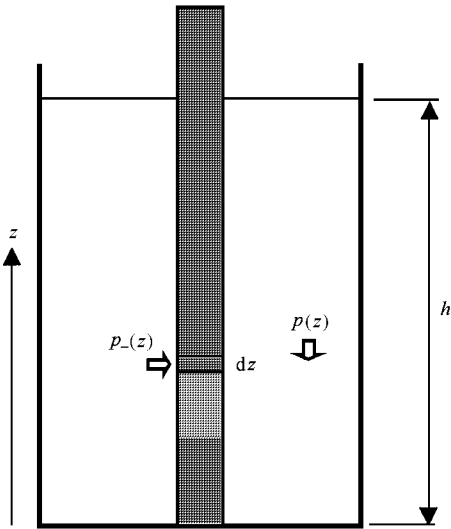


图5 圆棒在颗粒中受力的示意图

3. 结 论

通过提拉颗粒中圆棒,测量了颗粒填充高度及

棒径对摩擦力的影响. 结果表明, 圆棒在颗粒中受到的摩擦力 F 随颗粒深度 h 和棒径 D 而增大. 用连续介质模型推导了摩擦力与深度 h 和棒径 D 的关系, 得到 $F = \pi D \mu \alpha p_m [h + \lambda (e^{-h/\lambda} - 1)]$, 与测量结果基本一致. 当 h 很小时, F 与 Dh^2 成正比, 而当颗粒堆积很高时, F 与 Dh 成正比. 这说明, 从颗粒(如沙)

中拔一根棒所需的力的大小与它所埋入的深度及棒的直径有关. 当棒在颗粒中插得很深时, 所需的力近似与棒和颗粒的接触面积成正比, 即颗粒物质中静摩擦力与接触面积成正比. 此研究使我们进一步认识了颗粒物质的摩擦力特性, 也利于理解技术和工程上相关问题.

- [1] Jaeger H M, Nagel S R and Behringer R P 1996 *Rev. Mod. Phys.* **68** 1259
- [2] Kadanoff L P 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 435
- [3] de Gennes P G 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 374
- [4] Trappe V, Prasad V, Cipelletti L, Serge P N and Weitz D A 2001 *Nature* **411** 772
- [5] Bao D S, Zhang X S, Xu G L, Pan Z Q, Tang X W and Lu K Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 401 (in Chinese) 鲍德松、张训生、徐光磊、潘正权、唐孝威、陆坤权 2003 物理学报 **52** 401
- [6] Bowden F P and Tabor D 1964 *The Friction and Lubrication of Solids* (London: Oxford Univ. Press)
- [7] Rabinowicz E 1965 *Friction and Wear of Materials* (New York: Wiley)
- [8] Heslot F *et al* 1994 *Phys. Rev. E* **49** 4973
- [9] Janssen H A 1895 *Z. Ver. Dt. Ing.* **39** 1045
- [10] Briscoe B J 1991 in *Physics of Granular Media* edited by D Bideau and J Dodds (New York: Nova science) p143
- [11] Horvath V K, Janosi I M and Vella P J 1996 *Phys. Rev. E* **54** 2005

The static friction force on a rod immersed in granular matter^{*}

Hu Lin¹⁾ Yang Ping¹⁾ Xu Ting¹⁾ Jiang Yang¹⁾ Xu Hai-Jiang¹⁾ Long Wei¹⁾ Yang Chang-Shun¹⁾
Zhang Tao¹⁾ Lu Kun-Quan²⁾

¹⁾ Department of Physics, Guizhou University, Guiyang 550025, China

²⁾ Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China

(Received 7 August 2002; revised manuscript received 18 September 2002)

Abstract

The dependence of the static friction force exerted on a rod immersed in granular matter on the filling height of granules and the diameter of the rod is studied experimentally. It is observed that the friction force increases with the filling height of granules and increasing diameter of the rod. A model based on the continuous media is given, which can explain the observed results. It is demonstrated that the friction force is proportional to the diameter of the rod and the square of the filling height in the case of shallow granules, while it is a linear function of the filling height in the case of very deep granules, i.e. the friction force is proportional to the area of the interface between the rod and granules.

Keywords: granular matter, friction force

PACC: 4630P, 0547

^{*} Project supported by National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19872021), by the Science Foundation of Science and Technology Bureau (Grant No. 20013024) and Science Foundation of Education Bureau of Guizhou Province, China (Grant No. 2001002).