

激光脉冲作用下囚禁离子的规则与混沌运动*

李 飞 海文华†

(湖南师范大学物理系, 长沙 410081)

(2003 年 2 月 10 日收到, 2003 年 8 月 25 日收到修改稿)

研究驻波型激光脉冲作用下, 失谐量足够大时, 囚禁于 Paul 阱中的单离子系统的久期运动. 通过分析和数值计算相结合的方法, 导出系统的精确解及其描述的时间演化性质, 得到系统的规则和混沌运动轨道以及阱频很小时系统进入整体混沌的临界条件, 并提出了控制系统共振失稳的方法.

关键词: 激光脉冲, 囚禁离子, 规则与混沌运动, 精确解, 稳定性

PACC: 0545, 3280

1. 引 言

离子阱已被广泛应用于科学和技术研究的各个领域. 尤其是近年来, 离子阱作为一种强有力的工具, 被大量应用于量子逻辑操作^[1,2], 量子计算^[3,4], 量子信息^[5,6]以及量子态的制备^[7]等方面的研究, 使人们对离子阱中囚禁离子的动力学特征越来越感兴趣. 但是由于囚禁离子的运动对外加参数和初始条件有很强的敏感性, 两者的微小改变都可导致离子运动轨迹发生较大偏移, 甚至使离子产生混沌运动, 从而使其运动状态难以控制. 因此, 有必要对囚禁离子的动力学特征进行更加深入的研究.

尽管已有文献对多离子体系的动力学特征进行了深入研究^[8], 但是由于囚禁单离子系统比较简单, 相关的研究结果较多, 单离子与激光之间的相互作用更是受到了广泛关注. 当激光强度很小的时候, 激光的作用相当于对系统的微扰, 运动方程中线性项起主导作用, 离子仍作规则运动. 随着激光强度的不断增大, 非线性效应增强, 离子运动变得越来越复杂. 当激光强度增大到某一临界值时, 离子运动开始进入混沌状态^[9-11]. 对于谐振势阱中囚禁单离子的久期运动, 考虑高斯型激光脉冲的作用, 文献^[12]分别从经典和量子力学两个方面研究了离子的动力学特征, 发现离子在一定的参数范围内存在经典混沌和量子混沌的性质. 文献^[9,11]则研究了激光驻波

作用下谐振势阱中的单离子系统, 在阱频很小的条件下发现, 激光强度增大导致了离子混沌运动的出现. 本文考虑一个驻波型激光脉冲作用下的囚禁单离子系统, 如果失谐量不够大, 离子自发辐射速率比较高, 将对离子的经典运动产生明显的影响. 由于自发辐射的随机性, 对这种影响的精确描述是困难的. 为了避免这种困难, 文献^[13]考虑离子初始时处于基态, 并且失谐量足够大, 从而自发辐射的影响可以忽略. 本文考虑这种自发辐射可以忽略的情形, 通过分析和数值计算相结合的方法, 我们导出了系统的精确解, 证明了对于不同的参数, 系统运动分别是规则的和混沌的, 并讨论了电压稳定度及各种扰动对离子运动的影响. 我们发现当阱频与激光脉冲驱动频率之比为整数时, 系统因共振而失稳, 通过调节激光波矢的大小, 可以控制这种不稳定性.

2. 系统的精确解

我们考虑一个囚禁于 Paul 阱中的单离子, 该离子受到沿 x 方向的激光驻波作用. 若以 T 为时间间隔周期性地开关激光源, 可得 Rabi 频率 Ω_0 与时间的关系^[14,15]

$$\Omega_0(t) = \Omega_0^2 \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\epsilon(t-iT)^2/\sigma^2}, \quad (1)$$
$$i = 1, 2, \dots$$

当 $\sigma \rightarrow 0$ 时 (1) 式近似于一列 δ 脉冲^[14]

* 国家自然科学基金(批准号:10275023)和波谱与原子分子物理国家重点实验室(批准号:T152103)资助的课题.

† E-mail: adcve@public.cs.hn.cn; 电话: 0731-8856890.

$$\Omega_0(t)^2 = \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2 \sum_{i=1}^{\infty} \delta(t - iT). \quad (2)$$

只考虑离子在 x 轴上的久期运动, 可得其哈密顿量为^[14]

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + \frac{\hbar\sigma\sqrt{\pi}\Omega_0^2}{8\Delta} \cos(2kx) \sum_{i=1}^{\infty} \delta(t - iT), \quad (3)$$

其中 m 为离子质量, p 为离子动量, x 为离子坐标, k 为激光波矢大小, Δ 为失谐量, ω_0 是阱频, 它与加在 Paul 阱上的直流电压 U 和交流电压 $V \cos(\omega t)$ 有如下关系^[16]:

$$\omega_0 = \frac{\omega}{2} \sqrt{a + q^2/2}, \quad (4a)$$

$$a = \frac{8QU}{m(r_0^2 + 2z_0^2)\omega^2}, \quad q = \frac{4QV}{m(r_0^2 + 2z_0^2)\omega^2} \quad (4b)$$

其中 Q 为离子电量, ω 为交流电角频率, r_0 为 Paul 阱环极最小半径, z_0 为 Paul 阱两帽极间最短距离.

利用(3)式, 易得离子在阱中受到激光脉冲作用后的经典运动方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\hbar\sigma k \sqrt{\pi} \Omega_0^2}{4m\Delta} \sin(2kx) \sum_{i=1}^{\infty} \delta(t - iT), \quad (5)$$

文献[17]曾证明, 当(5)式中的 $\sin(2kx)$ 为常数时, 系统作规则运动; 当 $\sin(2kx)$ 被 x^4 取代时系统作混沌运动. 文献[12]则研究了高斯分布函数 ke^{-x^2} 取代 $\sin(2kx)$ 时系统的规则与混沌运动特征. 在这里通过(5)式的精确解来证明驻波型激光脉冲作用下的囚禁单离子也具有规则与混沌运动特征.

我们分几种情形对(5)式的解进行讨论.

情形 1 当时间 $t \neq iT$ 时(5)式因右边等于 0, 而成为著名的谐振子方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6)$$

在时间区间 $(i-1)T < t < iT$, 该谐振子方程的解众所周知, 设为

$$x = A_i \cos(\omega_0 t) + B_i \sin(\omega_0 t), \quad (7a)$$

$$\dot{x} = -\omega_0 A_i \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B_i \cos(\omega_0 t), \quad (7b)$$

A_i, B_i 为由初始条件决定的积分常数, $\sqrt{A_i^2 + B_i^2}$ 正比于离子运动振幅. (7)式表明, 当 $t \neq iT$ 时, 离子作频率为 ω_0 的周期运动. 但对于不同的时间区间, (7)式有不同的待定常数.

情形 2 当 $t = iT$ 时, 设 $x(iT) = x_i, \dot{x}(iT) = \dot{x}_i, 0 < \epsilon \ll 1$,

1) 当 $t = iT - \epsilon$ 时, 有

$$x_i = A_i \cos(\omega_0 iT) + B_i \sin(\omega_0 iT), \quad (8a)$$

$$\dot{x}_i = -\omega_0 A_i \sin(\omega_0 iT) + \omega_0 B_i \cos(\omega_0 iT). \quad (8b)$$

2) 当 $t = (i+1)T - \epsilon$ 时, 有

$$x_{i+1} = A_{i+1} \cos[\omega_0(i+1)T] + B_{i+1} \sin[\omega_0(i+1)T], \quad (9a)$$

$$\dot{x}_{i+1} = -\omega_0 A_{i+1} \sin[\omega_0(i+1)T] + \omega_0 B_{i+1} \cos[\omega_0(i+1)T], \quad (9b)$$

A_{i+1}, B_{i+1} 为由初始条件决定的待定常数. (8)式和(9)式给出了离子在受到激光脉冲作用瞬间的位置和速度. 因位置 x 连续, 由(7)式还可得到

$$x = [A_i \cos(\omega_0 t) + B_i \sin(\omega_0 t)]_{t=iT-\epsilon} = [A_{i+1} \cos(\omega_0 t) + B_{i+1} \sin(\omega_0 t)]_{t=iT+\epsilon}. \quad (10)$$

(10)式表明, 在 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 碰撞前后离子的位置相同.

下面利用文献[18, 19]提出的解积分方程的方法, 求给定 A_1 为初始坐标, $B_1 \omega_0$ 为初始速度时(5)式的精确解.

首先令(5)式右边等于 0, 得其两线性无关解

$$\Psi_1 = \sin(\omega_0 t), \quad (11a)$$

$$\Psi_2 = \Psi_1 \int \Psi_1^{-2} dt = -\frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 t). \quad (11b)$$

利用(11)式可将(5)式化为一积分方程, 在时间区间 $0 < t < iT$ 内

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin(\omega_0 t) + \Psi_2 \int_{T-\epsilon}^{iT-\epsilon} \Psi_1 \frac{\hbar k \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2}{4m\Delta} \times \sin(2kx) \sum_{n=1}^{i-1} \delta(t - nT) dt - \Psi_1 \int_{T-\epsilon}^{iT-\epsilon} \Psi_2 \times \frac{\hbar k \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2}{4m\Delta} \sin(2kx) \sum_{n=1}^{i-1} \delta(t - nT) dt. \quad (12)$$

因(12)式中被积函数含有 δ 函数, 所以可积, 从而得到离子在 $t = iT$ 时刻的精确解

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin(\omega_0 t) - \frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0} \times \sum_{n=1}^{i-1} \frac{\hbar k \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2}{4m\Delta} \sin(\omega_0 nT) \sin(2kx_n) + \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \times \sum_{n=1}^{i-1} \frac{\hbar k \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2}{4m\Delta} \cos(\omega_0 nT) \sin(2kx_n), \quad (13)$$

式中 A_1 为初始坐标, $B_1 \omega_0$ 为初始速度. 由(7)式与(13)式相等, 并设 $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, 得 A_i, B_i 与 A_1, B_1 的关系

$$A_i = A_1 - \frac{\hbar k \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2}{4m\Delta \omega_0} \sum_{n=1}^{i-1} \sin\left(\frac{2\pi n \omega_0}{\Omega}\right) \sin(2kx_n), \quad (14a)$$

$$B_i = B_1 + \frac{\hbar k \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2}{4m\Delta\omega_0} \sum_{n=1}^{i-1} \cos\left(\frac{2\pi n\omega_0}{\Omega}\right) \sin(2kx_n), \quad (14b)$$

进而可得到 A_{i+1}, B_{i+1} 与 A_i, B_i 的关系

$$A_{i+1} = A_i - \frac{\hbar k \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2}{4m\Delta\omega_0} \sin\left(\frac{2\pi i\omega_0}{\Omega}\right) \sin(2kx_i), \quad (15a)$$

$$B_{i+1} = B_i + \frac{\hbar k \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2}{4m\Delta\omega_0} \cos\left(\frac{2\pi i\omega_0}{\Omega}\right) \sin(2kx_i). \quad (15b)$$

将 (15) 式代入 (9) 式, 并利用 (8) 式, 得 x_{i+1}, \dot{x}_{i+1} 与 x_i, \dot{x}_i 的关系

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 T) & \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 T) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 T) & \cos(\omega_0 T) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_i \\ \dot{x}_i + \frac{\hbar k \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2}{4m\Delta} \sin(2kx_i) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

(16) 式通过 iT 时刻离子的位置和速度给出了 $(i+1)T$ 时刻离子的位置和速度, 这是一个二维映射. 从给定的初始条件出发, 由 (16) 式可得任意 iT 时刻离子的状态.

3. 系统的规则与混沌运动

如果用 x_i^4 取代 (16) 式中的 $\sin(2kx_i)$ 则得文献 [17] 中讨论的系统, 它的混沌性质是我们熟知的. 我们知道, 周期函数 $\sin(2kx_i)$ 远比 x_i^4 复杂, 所以 (16) 式必然允许系统存在混沌运动. 采用国际单位 (米·千克·秒) 制, 由 (16) 式我们画出了囚禁单离子 $^9\text{Be}^+$ 在不同参数下的相轨道图. 取定 $m \approx 1.5063 \times 10^{-26}$ kg, $Q = 1.6 \times 10^{-19}$ C, $x(0) = 6.34 \times 10^{-5}$ m, $\dot{x}(0) = 5.76$ m/s, $T = 8.78 \times 10^{-7}$ s, $k = 1.22 \times 10^6$ m $^{-1}$, $\sigma = 1.26 \times 10^{-4}$ s, $\Omega_0 = 2.23 \times 10^7$ Hz, $\Delta = 8.58 \times 10^9$ Hz, 当 ω_0 的取值在 2.3767×10^5 Hz 到 2.5658×10^5 Hz 之间变化的时候, 所得图像是封闭曲线, 这表明系统作周期运动 (见图 1, 图 2). 图中坐标 x 的范围为 $-20\mu\text{m} \sim 20\mu\text{m}$, 速度的范围为 -20 m/s ~ 20 m/s. 当 ω_0 由 2.3767×10^5 Hz 慢慢减小时, 图像上的点由封闭曲线逐渐向四周扩散开来且分布是混乱的, 这表明系统由周期运动逐步过渡到了混沌运动, 其间没有突变. 我们还发现当 ω_0 由 2.5658×10^5 Hz 慢慢增大时, 也会出现这种情况. 结合上述结果与 (4) 式

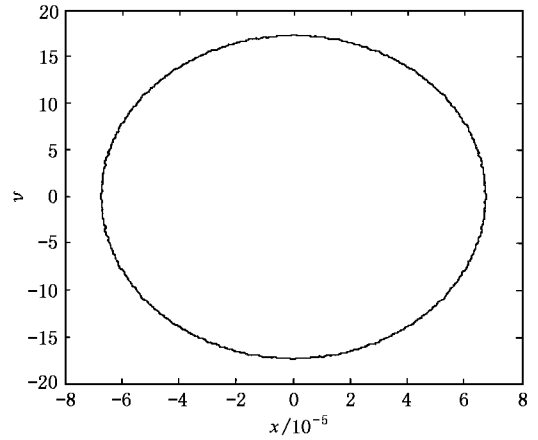


图 1 当初值和参数取 $x(0) = 6.34 \times 10^{-5}$ m, $\dot{x}(0) = 5.76$ m/s, $\omega_0 = 2.5658 \times 10^5$ Hz, $T = 8.78 \times 10^{-7}$ s, $k = 1.22 \times 10^6$ m $^{-1}$, $\sigma = 1.26 \times 10^{-4}$ s, $\Omega_0 = 2.23 \times 10^7$ Hz, $\Delta = 8.58 \times 10^9$ Hz 的时候, 图像为一条封闭曲线, 这表明系统作周期运动

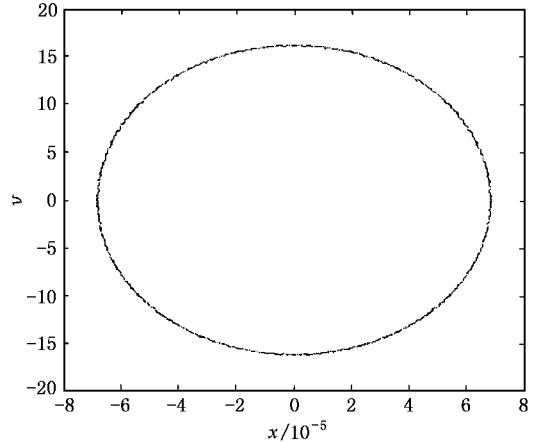


图 2 $\omega_0 = 2.3767 \times 10^5$ Hz 其他参数同图 1 情形, 图像仍为一条封闭曲线, 这表明系统仍作周期运动

我们知道, 当其他参数按上述各式取值, U, V 的取值满足如下关系

$$2.3767 \times 10^5 \text{ Hz} \leq \omega_0 \leq 2.5658 \times 10^5 \text{ Hz},$$

即

$$0.50036 \leq \sqrt{0.94157 U/\epsilon + 1.10819 \times 10^{-3} V^2/\epsilon^2} \leq 0.54017 \quad (17)$$

时, 系统保持周期运动. (17) 式中 $\epsilon = 1.0$ V. (17) 式表示一个周期运动的参数区域, 它的上下界是周期运动和混沌运动的边界. 这里, 我们取的阱参数是 $\omega = 9.5 \times 10^6$ Hz, $r_0/\sqrt{2} = z_0 = 5 \times 10^{-3}$ m, 处于典型的 Paul 阱参数范围^[20] $r_0 \approx \sqrt{2}z_0 \approx 100\mu\text{m} \sim 1\text{cm}$, $\omega/2\pi \approx 100\text{kHz} \sim 100\text{MHz}$, $|U| \approx 0 \sim 50$ V, $V \approx 100 \sim 500$ V 之

内. 取定 $\omega_0 = 2.3767 \times 10^5 \text{ Hz}$, 使 T, k, σ, Ω_0 的值逐渐增大, 图像也显示出系统由周期运动逐步过渡到了混沌运动 (见图 3, 其他参数同图 1, 图 2. 随后的图中, 凡未变的参数, 取值同前一图), 且随着 T, k, σ, Ω_0 的增大, 图像上出现了分形结构, 点的分布越来越混乱, 而且分布的区域越来越广, 由此可以看出, 系统运动的混沌程度加深了, 混沌区域也扩大了, 如图 4 ($T = 8.8 \times 10^{-7} \text{ s}, k = 1.55 \times 10^6 \text{ m}^{-1}, \sigma = 1.55 \times 10^{-4} \text{ s}, \Omega_0 = 2.55 \times 10^7 \text{ Hz}$) 和图 5 ($T = 8.82 \times 10^{-7} \text{ s}, k = 1.59 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$) 所示, 这表明随着相关参数的增大, 系统运动越来越复杂.

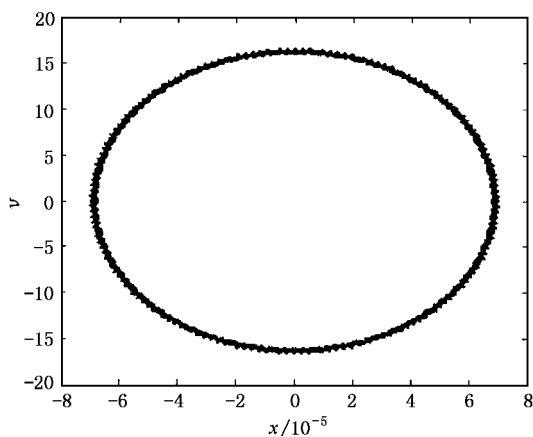


图 3 $\omega_0 = 2.3767 \times 10^5 \text{ Hz}, T = 8.79 \times 10^{-7} \text{ s}, k = 1.3 \times 10^6 \text{ m}^{-1}, \sigma = 1.3 \times 10^{-4} \text{ s}, \Omega_0 = 2.3 \times 10^7 \text{ Hz}$ 时, 图像上的点由封闭曲线逐渐向四周扩散开来且分布是混乱的, 这表明系统由周期运动逐步过渡到了混沌运动

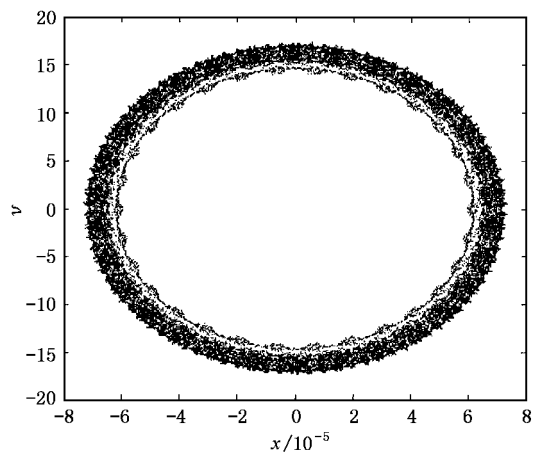


图 4 当参数取为 $T = 8.8 \times 10^{-7} \text{ s}, k = 1.55 \times 10^6 \text{ m}^{-1}, \sigma = 1.55 \times 10^{-4} \text{ s}, \Omega_0 = 2.55 \times 10^7 \text{ Hz}$ 时, 图像上开始出现明显的分形结构, 点的分布更加混乱, 范围更广, 这表明随着 T, k, σ, Ω_0 的进一步增大, 系统运动的混沌程度加深了, 混沌区域扩大了 (其他参数同前图)

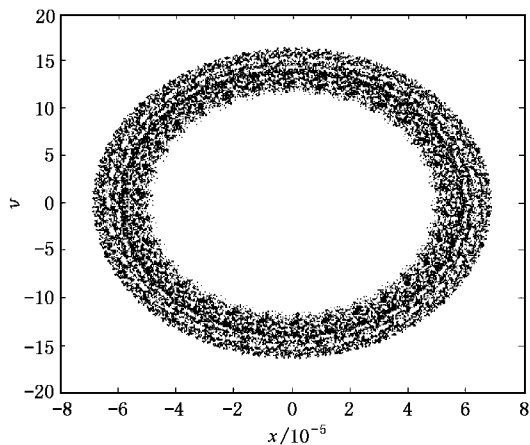


图 5 参数取为 $k = 1.59 \times 10^6 \text{ m}^{-1}, T = 8.82 \times 10^{-7} \text{ s}$ 时, 图像上的分形结构进一步扩大, 点分布的混乱程度进一步加深, 分布的范围也更广, 这表明系统运动的混沌程度进一步加深, 混沌区域也进一步扩大了 (其他参数同前图)

由于作用在 Paul 阱上的电源电压的稳定度实际上只能调到 10^{-4} V , 所以还必须考虑电压稳定度对离子运动的影响. 设 U_0, V_0 为未受扰动时的电压, ΔU 和 ΔV 为各种不可人为控制的小的扰动值. 如果 U_0, V_0 的取值在周期区域内且远离边界, 那么小的扰动 ΔU 和 ΔV 不会使离子运动脱离周期区域, 离子运动性质保持不变; 如果 U_0, V_0 的取值在混沌区域内且远离边界, 那么小的扰动 ΔU 和 ΔV 也不会使离子运动脱离混沌区域. 但是如果 U_0, V_0 取在周期区域和混沌区域交界处附近, 小的扰动可能导致系统发生在周期运动和混沌运动之间的相变. 令 $U = U_0 + \Delta U, V = V_0 + \Delta V$, 并取 $\epsilon = 1$, 代入 (17) 式得

$$0.50036 \leq \sqrt{0.94157(U_0 + \Delta U) + 1.10819 \times 10^{-3}(V_0 + \Delta V)^2} \leq 0.54017. \quad (18)$$

由 (18) 式知道, 对于不同的 U_0, V_0 值, 周期运动所允许的扰动 ΔU 和 ΔV 是不同的. 为了讨论的方便, 假设 $\Delta U = \Delta V$. 例如, 当 $U_0 = -18.1238 \text{ V}, V_0 = 125 \text{ V}$ 时, 代入 (17) 式, 所得值满足该式且接近下界, 此时若 $\Delta U = \Delta V = -0.0002 \text{ V}$, 代入 (18) 式, 所得值等于下界, 当 $|\Delta U| = |\Delta V| > 0.0002$ 时, 代入 (18) 式, 所得值小于下界, 可以使离子脱离稳定区域. 当 $U_0 = -34.0678 \text{ V}, V_0 = 170.7853 \text{ V}$ 时, 代入 (17) 式, 所得值满足 (17) 式但离下界较远, 此时必须使 $\Delta U = \Delta V = -0.0033 \text{ V}$, 代入 (18) 式, 所得值

才小于下界. 因此, 当 U_0, V_0 取上述值时, 电压的扰动就必须较大才可能使离子脱离周期区域.

现在, 假定 $\Delta U = \Delta V = \pm 10^{-4} \text{ V}$ 在电源电压的稳定度的量级, 代入(18)式得电压取值必须满足的关系

$$\begin{aligned} & 0.50036 \\ & \leq \sqrt{0.94157(U_0 \pm 10^{-4}) + 1.10819(V_0 \pm 10^{-4})^2} \\ & \leq 0.54017, \end{aligned} \quad (19)$$

电压取值在此范围时, 离子才能保持周期运动.

现在, 对包含在(16)式中的一个简单情形来进行讨论. 当阱频 ω_0 很小时, 离子处于弱囚禁状态, (5)式中正比于 ω_0^2 的项可看作微扰. 在这种情形, 文献[9, 11]曾得到离子与激光驻波相互作用的混沌性质. 调节加在势阱上的直流电压 U 和交流电压 $V \cos(\omega t)$, 可使 ω_0 很小, 此时, 在零级近似下, 可认为(16)式中 $\omega_0 \rightarrow 0$, 得

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ \dot{x}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ \dot{x}_i + \frac{\hbar k \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2}{4m\Delta} \sin(2kx_i) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

此即周期受击转子的相空间映射关系. 令 $I = \dot{x} T$, 代入(20)式得

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\hbar k \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2}{4m\Delta} \sin(2kx_i) + I_i, \quad (21a)$$

$$I_{i+1} = I_i + \frac{\hbar k \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2}{4m\Delta} \sin(2kx_i). \quad (21b)$$

再令 $C = \frac{\hbar k \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2}{4m\Delta}$, 代入(21)式得

$$x_{i+1} = x_i + C \sin(2kx_i) + I_i, \quad (22a)$$

$$I_{i+1} = I_i + C \sin(2kx_i). \quad (22b)$$

(22)式表示的是一种标准映射, 由文献[21—23]对标准映射的动力学性质进行的详细讨论得知, 当 C 很小时, 离子主要作规则运动. 调节开关激光源的时间间隔 T 和激光波矢大小 k , 使 C 逐渐增大, 系统的 KAM 环面^[21—23]将先后破裂. 当 $C > 0.97$, 即

$$Tk > 0.97 \times \frac{4m\Delta}{\hbar \sigma \Omega_0^2 \sqrt{\pi}} \quad (23)$$

时, 离子运动进入整体混沌状态. 显然, 参数 T, k, σ, Ω_0 的增大将导致 C 的增大和混沌的产生, 这与图 1 至图 5 所示数值计算的结论一致. (23)式即为弱囚禁离子在激光驻波脉冲作用下进入整体混沌状态的参数条件.

4. 共振失稳与不稳定性控制

上面讨论了系统的规则与混沌运动. 本节将证明, 当调节加在势阱上的直流和交流电压, 使 $\omega_0/\Omega = N$, N 为整数时, 系统将发生共振, 从而失去其稳定性. 对于文献[17]中用 x^4 取代 $\sin(2kx_i)$ 讨论的共振失稳, 在条件 $\omega_0/\Omega = N$ 下系统的不稳定性是不可控制的. 而对于(16)式描述的运动, 将证明共振导致的失稳可以被控制.

将 $\omega_0/\Omega = N$ 代入(14)式得

$$A_i = A_1, \quad (24a)$$

$$B_i = B_1 + \frac{\hbar k \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2}{4m\Delta \omega_0} \sum_{n=1}^{i-1} \cos(2nN\pi) \sin(2kx_n). \quad (24b)$$

再将(24a)及 $\omega_0/\Omega = N$ 和 $\Omega = 2\pi/T$ 代入(8a)得

$$x_i = A_i = A_1, \quad (25)$$

已知 A_1 为 $t=0$ 时离子的位置, $B_1 \omega_0$ 为 $t=0$ 时离子的速度, 有

$$x_i = A_i = A_1 = x(0). \quad (26)$$

将(26)式代入(24b)式得

$$B_i = B_1 + \frac{\hbar k \sigma \sqrt{\pi} \Omega_0^2}{4m\Delta \omega_0} \sum_{n=1}^{i-1} \cos(2nN\pi) \sin(2kA_1). \quad (27)$$

由(27)式和图 6 知道, B_i 随着撞击次数 i 的增大(即时间 t 的增大)而增大, 从而使离子运动振幅也越来越大, 系统出现共振, 必然失去稳定性. 随着振幅的

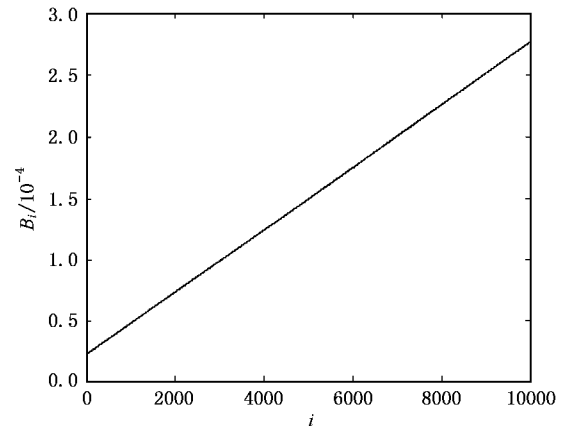


图 6 当 $\omega_0/\Omega = N$, N 为整数时, 随着撞击次数 i 的增大, 即随着时间 t 的增大, B_i 不断增大, 从而使系统出现共振失稳现象(参数取值为 $B_1 = 2.24496 \times 10^{-5} \text{ m}$, $A_1 = 6.34 \times 10^{-6} \text{ m}$, 其他参数同图 1)

不断增大,最终将使离子丢失.

为防止离子丢失,必须控制共振失稳,即必须使 B_i 不随着撞击次数 i 的增大(即时间 t 的增大)而增大.通过调节激光波矢大小 k ,使

$$kA_1 = n\pi, \quad (28)$$

我们就可以达到目的.把(28)式代入(27)式有

$$B_i = B_1, \quad (29)$$

于是得

$$\sqrt{A_i^2 + B_i^2} = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \text{定值}. \quad (30)$$

而 $\sqrt{A_i^2 + B_i^2}$ 正比于离子运动振幅,当(30)式被满足后,激光的作用将不再增加离子能量,离子运动振幅也就不再随着撞击次数 i 的增大(即时间 t 的增大)而增大,从而实现了对不稳定性的控制.虽然初始条件 $x(0) = A_1 = n\pi/k$ 在实际中难以控制,但总可以通过反复调节激光波矢大小 k ,使(28)式得以满足.此时离子的位置和速度为

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin(\omega_0 t), \quad (31a)$$

$$\dot{x} = -\omega_0 A_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B_1 \cos(\omega_0 t). \quad (31b)$$

(31)式描述的是离子运动振幅恒定的周期运动.如果 A_1, B_1 都很小,离子将作微振动,可近似地看作静止于阱中,从而可长时间地观测.

5. 结 论

考虑驻波型激光脉冲作用下囚禁于 Paul 阱中的单离子系统,通过分析和数值计算,得出了系统的精确解.由这个精确解我们发现,在不同的参数范围内,离子运动分别是规则的和混沌的.在阱频很小的情况下,离子运动可用标准映射来描述.我们得到离子运动进入整体混沌状态的条件,通过调节激光脉冲周期和激光波矢大小拟合该条件,可使离子运动由规则状态进入混沌状态.我们还发现,共振可引起离子运动的不稳定性,但通过调节激光波矢的大小,可以控制这种不稳定性,从而实现了对离子的稳定囚禁.

此外,我们研究了电压稳定度及各种扰动对离子运动的影响,给出了电压扰动对运动影响的估计式.结果表明,如果电压的取值在周期区域内且远离边界,那么小的扰动不会使离子运动脱离周期区域,离子运动性质保持不变;如果电压的取值在混沌区域内且远离边界,那么小的扰动也不会使离子运动脱离混沌区域.但是如果参数取在周期区域和混沌区域交界处附近,小的扰动可能导致系统发生在周期运动和混沌运动之间的相变.

- [1] Protsenko I E, Reymond G, Schlosser N and Grangier P 2002 *Phys. Rev. A* **66** 062306
- [2] Sasura M and Buzek V 2001 *Phys. Rev. A* **64** 012305
- [3] Pachos J and Walther H 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 187903
- [4] Jonathan D, Plenio M B and Knight P L 2000 *Phys. Rev. A* **62** 042307
- [5] Steane A, Roos C F, Stevens D, Mundt A, Leibfried D, Schmidt-Kaler F and Blatt R 2000 *Phys. Rev. A* **62** 042305
- [6] Nägerl H C, Leibfried D, Rohde H, Thalhammer G, Eschner J, Schmidt-Kaler F and Blatt R 1999 *Phys. Rev. A* **60** 145
- [7] Feng M and Wang X G 2002 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **4** 283
- Feng M *et al* 1998 *Acta Phys. Sin. (Overseas)* **7** 488
- Wu Y and Yang X 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3086
- [8] Shi L, Duan Y W, Feng M, Zhu X W and Fang X M 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1248 (in Chinese) [施 磊、段宜武、冯 芒、朱熙文、方细明 1998 物理学报 **47** 1248]

- Gao K L, Yan M, Luo X L, Zhu X W, Huang G L, Li J M, Shi L 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 43 (in Chinese) [高克林、颜 学立、朱熙文、黄贵龙、李交美、施 磊 1995 物理学报 **44** 43]
- [9] Hai W H *et al* 1998 *J. Phys. A* **31** 2991
- Hai W H *et al* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2117 (in Chinese) [海文华等 1997 物理学报 **46** 2117]
- Hai W H, Feng M, Zhu X W, Shi L, Gao K L and Fang X M 1999 *J. Phys. A* **32** 8265
- [10] Berman G P *et al* 2000 *Phys. Rev. A* **61** 023403
- [11] Chacón R and Cirac J I 1995 *Phys. Rev. A* **51** 4900
- [12] Scott A G, Holmes C A and Milburn G J 1999 *Phys. Rev. A* **61** 013401
- [13] Ghafar M E, Torma P, Savichev V, Mayr E, Zeiler A and Schleich W P 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 4181
- [14] Gardiner S A *et al* 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4790
- [15] Gardiner S A, Jaksch D, Dum R, Cirac J I and Zoller 2000 *Phys. Rev. A* **62** 023612

- [16] Shi L 1999 *Doctorate Thesis* (Wuhan Institute of Physics and Mathematics , Chinese Academy of Sciences) p2 (in Chinese) [施磊 1999 博士学位论文(中科院武汉物理与数学所) 第 2 页]
- [17] Neil R S 1990 *Chaotic dynamics of nonlinear systems* (New York : John Wiley & Sons) p4
- [18] Hai W H , Feng M , Zhu X W , Shi L , Gao K L and Fang X M 2000 *Phys. Rev. A* **61** 052105
Hai W H , Zhu X W , Feng M , Shi L , Gao K L and Fang X M 2001 *J. Phys. A* **34** L79
- [19] Hai W , Huang S and Gao K 2003 *J. Phys. B* **36** 3055
Hai W H *et al* 2000 *Chin. Phys. J.* **9** 175
- [20] Leibfried D , Blatt R , Monroe C and Wineland D 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 281
- [21] Chirikov J H 1979 *Phys. Rep.* **52** 263
- [22] Green J M 1979 *J. Math. Phys.* **20** 1183
- [23] Mackay R S , Meiss J D and Percival I C 1984 *Physica D* **13** 55
Mackay R S , Meiss J D and Percival I C 1987 *Physica D* **27** 1

Regular and chaotic motions of a single trapped ion interacting with standing laser pulses^{*}

Li Fei Hai Wen-Hua[†]

(Department of Physics , Hunan Normal University , Changsha 410081 , China)

(Received 10 February 2003 ; revised manuscript received 25 August 2003)

Abstract

We have studied the secular motion of a single ion stored in a Paul trap and subjected to a sequence of standing laser pulses. Through theoretical analyses and numerical calculations , we obtain an exact solution of the classical motion equation that describes time evolution of the system. By using the exact solution we have investigated regular and chaotic motions of the system. For a weakly trapped ion with small confining frequency , a critical condition under which the system goes into global chaos is found. The loss of stability caused by resonance is shown and a method for controlling the instability is established.

Keywords : laser pulses , trapped ion , regular and chaotic motion , exact solution , stability

PACC : 0545 , 3280

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 10275023) and the National Key Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics of China(Grant No.T152103).

[†]E-mail :adeve@public.cs.hn.cn ,Tel 0731-8856890.