

约束系统量子化中 Dirac 方法与 Faddeev-Jackiw 方法的等价性^{*}

隆正文^{1)†} 刘 波²⁾ 李子平²⁾

¹⁾ 贵州大学物理系, 贵阳 550025

²⁾ 北京工业大学应用物理系, 北京 100022

(2003 年 4 月 25 日收到, 2003 年 9 月 24 日收到修改稿)

对约束系统量子化中 Dirac 方法和 Faddeev-Jackiw 方法进行了讨论, 并对它们的运动方程、正则量子化的等价性进行证明, 找出了两种方法中约束的对应关系.

关键词: Faddeev-Jackiw 方法, Dirac 方法, 约束系统, 正则量子化

PACC: 1110E, 0420F

1. 引 言

用奇异拉氏量描述的系统称为奇异系统. 奇异系统存在着固有约束, 在物理学的许多领域里, 广泛存在着奇异系统. 粒子物理的发展表明, 描述自然界基本相互作用的电磁场、Yang-Mills 场、引力场、超对称、超引力、超弦等理论中的系统, 都是奇异系统. 因此, 研究和处理约束成为规范理论中的基本问题之一, 它在现代量子场论中, 特别是规范场和引力场的量子化中占有重要地位. 对此类系统的正则量子化的研究始于 Dirac, 他提出了 Dirac 括号以进行正则量子化. 此种方法已成功地对许多重要的系统进行量子化^[1,2], 并一直引起人们的研究兴趣^[3,4]. 但它是基于哈氏体制的, 而 Faddeev-Jackiw (FJ) 方法是基于拉氏体制的一种正则量子化方法^[5]. Barcelos-Neto 和 Wotzasek 进一步提出在 FJ 方法中也有约束时的处理办法^[6]. 由于这种方法简单, 计算量少, 不需区分初级约束与次级约束以及第一类约束和第二类约束, 几何意义明显等优点, 也没有 Dirac 猜想这样的假设, 因而自提出以来, 就引起人们极大的兴趣, 已被用于许多系统的量子化, 如 Yang-Mills 场^[6]、超对称^[7,8]、非线性 σ 模型^[9]、超引力^[10]以及超弦^[11]等许多重要的物理系统中. 在所有这些系统中, 用 FJ 方法进行量子化所得的结果与用 Dirac 方法得到的结果一致. 但在 FJ 方法中, 处理约束的方法是辛算法,

而辛算法主要是一种思想和做法, 并没有严格的数学证明. Costa 和 Girotti^[12]以及 Govaerts^[13]分别证明了辛矩阵非奇异时(即 FJ 方法中不存在约束时)FJ 方法与 Dirac 方法的等价性. 本文将讨论辛矩阵奇异时, Dirac 方法与 FJ 方法的等价性问题.

2. 动力学方程的等价性

现在对 FJ 方法^[5]作简单介绍. 设系统的一阶拉氏量为

$$L = a_i(\xi)\dot{\xi}^i - V(\xi), \quad (1)$$

其中 ξ 为辛变量, 重复指标表示求和. FJ 方法是从一阶拉氏量出发, 但这并不是一个很严格的限制. 很多物理系统是由二阶拉氏量描述的, 对此类系统可以引入辅助场来扩大位形空间, 以使二阶拉氏量转化为一阶. 通常辅助场取为正则动量, 但这并不是必须的^[6]. 将 (1) 式代入 Euler-Lagrange 运动方程, 得

$$\frac{\partial a_i \dot{\xi}^i}{\partial \xi^i} - \frac{\partial V(\xi)}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i \dot{\xi}^i}{\partial \xi^i} = 0, \quad (2)$$

即

$$f_{ij} \dot{\xi}^j = \frac{\partial V(\xi)}{\partial \xi^i}, \quad (3)$$

其中

$$f_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi^j}.$$

当辛矩阵 $f = (f_{ij})$ 非奇异时, (3) 式等价于

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10247009)及贵州省自然科学基金(批准号: 20013024)资助的课题.

[†] E-mail: longshc@hotmail.com

$$\dot{\xi}^i = f_{ij}^{-1} \frac{\partial V(\xi)}{\partial \xi^j}. \quad (4)$$

定义辛变量之间的广义括号(或称 FJ 括号)为

$$\{\xi^i, \xi^j\}_* = f_{ij}^{-1}, \quad (5)$$

然后将广义括号过渡到算符对易式,实现正则量子化.

对于 Dirac 方法^[14,15],由(1)式,与 ξ^i 相应的正则共轲动量为

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} = a_i(\xi). \quad (6)$$

因为 $a_i(\xi)$ 中不含 $\dot{\xi}$,从(6)式不能解出 $\dot{\xi}$,于是可得 Dirac 方法中体系的初级约束

$$\phi_i^0 = P_i - a_i(\xi) \approx 0, \quad (7)$$

其中“ $\approx$ ”表示弱等于零.

在相空间 (ξ^i, P_i) 中, ξ^i, P_i 间的基本 Poisson 括号为

$$\{\xi^i, \xi^j\} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = 0, \\ \{\xi^i, P_j\} = -\{P_j, \xi^i\} = \delta_j^i. \quad (8)$$

初级约束 ϕ_i (略去上标 0)之间的 Poisson 括号为

$$\{\phi_i, \phi_j\} = \{P_i, -a_i(\xi), P_j, -a_j(\xi)\} \\ = \frac{\partial a_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi^j} = f_{ij}. \quad (9)$$

与一阶拉氏量(1)式相应的正则哈密顿量为

$$H_c(\xi) = P_i \dot{\xi}^i - L = V(\xi). \quad (10)$$

所以体系的总哈密顿量为

$$H_T = H_c + u^i \phi_i = V(\xi) + u^i \phi_i, \quad (11)$$

其中 u^i 为与约束 ϕ_i 相应的拉氏乘子.由初级约束的自洽性条件

$$\dot{\phi}_i = \{\phi_i, H_T\} = \{\phi_i, V(\xi) + u^j \phi_j\} = 0, \quad (12)$$

可得

$$u^j f_{ij} = \frac{\partial V(\xi)}{\partial \xi^i}. \quad (13)$$

体系的正则运动方程为

$$\dot{\xi}^i = \{\xi^i, H_T\} = \{\xi^i, u^j \phi_j\} \\ = u^j \{\xi^i, P_j - a_j(\xi)\} = u^j, \quad (14a)$$

$$\dot{P}_i = \{P_i, H_T\} = \{P_i, V(\xi)\} + u^j \{P_i, -a_j\} \\ = -\frac{\partial V(\xi)}{\partial \xi^i} + u^j \frac{\partial a_j}{\partial \xi^i}. \quad (14b)$$

由(13)和(14)式,可得

$$\dot{\xi}^j f_{ij} = \frac{\partial V(\xi)}{\partial \xi^i}. \quad (15)$$

(15)式与(3)式相同.这就证明了 FJ 方法中的运动方程与 Dirac 方程一致.此时并不要求辛矩阵 (f_{ij})

可逆.

3. 约束的对应关系

当辛矩阵 (f_{ij}) 奇异时,由初级约束 ϕ_i 的自洽性条件导致的(13)式解不出所有的拉氏乘子 u^i .设辛矩阵 (f_{ij}) 的零模为 ν_α ($\alpha = 1, 2, \dots, m$),即

$$(\nu_\alpha)^T f = 0, \quad (16)$$

由(13)和(16)式,得

$$\phi_\alpha^1 = (\nu_\alpha^{(0)})^T \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{(0)}} = (\nu_\alpha^{(0)})^T_i \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{(0)i}} = 0 \\ (\alpha = 1, 2, \dots, m). \quad (17)$$

由(3)和(16)式,也有

$$\Omega_\alpha^0 = (\nu_\alpha^{(0)})^T \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{(0)}} = (\nu_\alpha^{(0)})^T_i \frac{\partial V^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{(0)i}} = 0 \\ (\alpha = 1, 2, \dots, m). \quad (18)$$

将以上各量加上上标(0),以表示各量的初始值(后面也如此).从(17)和(18)式可知, FJ 方法求得的第零级约束 $\Omega_\alpha^{(0)}$ 就是 Dirac 方法中的次级约束 ϕ_α^1 .

求出第零级约束后,按照辛算法^[6],将 $\Omega_\alpha^{(0)}$ 乘以拉氏乘子(辅助场的时间导数) $\lambda_\alpha^{(0)}$,再加到一阶拉氏量(1)式的正则 1 形式部分中,并令辛势 $V^{(0)}$ 中约束强等于零,得到第一次迭代后的一阶拉氏量 $L^{(1)}$ 为

$$L^{(1)} = a_i^{(0)}(\xi^{(0)}) \dot{\xi}^{(0)i} + \Omega_\alpha^{(0)} \lambda_\alpha^{(0)} - V^{(1)}(\xi^{(0)}), \quad (19)$$

其中

$$V^{(1)}(\xi^{(0)}) = V^{(0)}(\xi^{(0)})|_{\Omega_\alpha^{(0)}=0}.$$

引入辅助场后,体系的辛变量扩充为

$$\xi^{(1)i} = \{\xi^{(0)i}, \lambda_\alpha^{(0)}\}. \quad (20)$$

$L^{(1)}$ 可写为

$$L^{(1)} = a_i^{(1)}(\xi^{(0)}) \dot{\xi}^{(1)i} - V^{(1)}(\xi^{(0)}), \quad (21)$$

其中

$$a_i^{(1)}(\xi^{(0)}) = a_i^{(0)}(\xi^{(0)}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ a_i^{(1)}(\xi^{(0)}) = \Omega_\alpha^{(0)}(\xi^{(0)}) \quad (i = n+1, \dots, n+m). \quad (22)$$

与 $L^{(1)}$ 和 $\xi^{(1)}$ 相应的运动方程为

$$f_{ij}^{(1)}(\xi^{(0)}) \dot{\xi}^{(1)j} = \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \xi^{(1)i}}, \quad (23)$$

其中第一次迭代后的辛矩阵 $f^{(1)}$ 的元素为

$$f_{ij}^{(1)}(\xi^{(0)}) = \frac{\partial a_j^{(1)}(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(1)i}} - \frac{\partial a_i^{(1)}(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(1)j}}. \quad (24)$$

如果 $f^{(1)}$ 正规,则就可以用 $f^{(1)}$ 之逆进行正则量子

化, 辛算法结束. 如果 $f^{(1)}$ 仍然奇异, 设其零模为 $\nu_{\beta}^{(1)}$ ($\xi^{(0)}$) ($\beta = 1, 2, \dots, m_1$), m_1 为 $f^{(1)}$ 的零模数. 结合运动方程 (23), 可得 FJ 方法中第 1 级约束为

$$\Omega_{\beta}^{(1)}(\xi^{(0)}) = (\nu_{\beta}^{(1)}(\xi^{(0)}))^T \frac{\partial V^{(1)}(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(1)}} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, m_1). \quad (25)$$

求出 FJ 方法中第 1 级约束后, 再按辛算法对其进行处理, 这样不断迭代下去. 直至 N 步, 这时会出现两种情况: 1) $f^{(N)}$ 正规, 辛算法停止; 2) $f^{(N)}$ 奇异, 又无新的约束出现, 这时需选规范条件. 现在讨论情况 1). 此时, FJ 方法中辛算法求得的各级约束为

$$\Omega_{\alpha}^{(0)}(\xi^{(0)}), \Omega_{\beta}^{(1)}(\xi^{(0)}), \dots, \Omega_r^{(N-1)}(\xi^{(0)}). \quad (26)$$

共有 N 级约束. 其中因为 $f^{(0)}$ 只是 $\xi^{(0)}$ 的函数, 其零模也应只是 $\xi^{(0)}$ 的函数, $\nu_{\alpha}^{(0)} = \nu_{\alpha}^{(0)}(\xi^{(0)})$, $V^{(0)}$ 也只含 $\xi^{(0)}$. 所以, 从 (18) 式求出的第零级约束 $\Omega_{\alpha}^{(0)}$ 也只含 $\xi^{(0)}$. $\Omega_{\alpha}^{(0)} = \Omega_{\alpha}^{(0)}(\xi^{(0)})$. 由 (24) 式求出的 $f^{(1)}$ 也只含 $\xi^{(0)}$, 其零模 $\nu_{\beta}^{(1)}$ 因此也应只含 $\xi^{(0)}$.

第 N 次迭代后的辛变量集为

$$\xi^{(N)i} = \{\xi^{(0)i}, \lambda_{\alpha}^{(0)}, \lambda_{\beta}^{(1)}, \dots, \lambda_r^{(N-1)}\}, \quad (27)$$

其中 $\lambda_{\alpha}^{(i)}$ 为与第 i 级约束 $\Omega_{\alpha}^{(i)}$ 相应的辅助场, 第 N 次迭代后的一阶拉氏量 $L^{(N)}$ 为

$$\begin{aligned} L^{(N)} &= a_i^{(0)}(\xi^{(0)}) \dot{\xi}^{(0)i} + \Omega_{\alpha}^{(0)}(\xi^{(0)}) \dot{\lambda}_{\alpha}^{(0)} \\ &\quad + \Omega_{\beta}^{(1)}(\xi^{(0)}) \dot{\lambda}_{\beta}^{(1)} + \dots \\ &\quad + \Omega_r^{(N-1)}(\xi^{(0)}) \dot{\lambda}_r^{(N-1)} - V^{(N)}(\xi^{(0)}) \\ &= a_i^{(N)}(\xi^{(0)}) \dot{\xi}^{(N)i} - V^{(N)}(\xi^{(0)}), \end{aligned} \quad (28)$$

其中第 N 次迭代后的正则 1 形式的分量为

$$\begin{aligned} a_{\xi^{(0)i}}^{(N)}(\xi^{(0)}) &= a_i^{(0)}(\xi^{(0)}), \\ a_{\lambda_{\alpha}^{(0)}}^{(N)}(\xi^{(0)}) &= \Omega_{\alpha}^{(0)}(\xi^{(0)}), \\ &\dots, \\ a_{\lambda_r^{(N-1)}}^{(N)}(\xi^{(0)}) &= \Omega_r^{(N-1)}(\xi^{(0)}). \end{aligned} \quad (29)$$

第 N 次迭代后的辛矩阵 $f^{(N)}$ 的矩阵元为

$$f_{ij}^{(N)}(\xi^{(0)}) = \frac{\partial a_i^{(N)}(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(N)j}} - \frac{\partial a_j^{(N)}(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(N)i}}, \quad (30)$$

$f^{(N)}$ 正规时, 辛算法结束. 正则量子化规则为

$$[\hat{\xi}^{(N)i}, \hat{\xi}^{(N)j}] = i\hbar f_{ij}^{(N)}(\xi^{(0)})^{-1}. \quad (31)$$

第 N 次迭代后的辛变量集 $\xi^{(N)}$ 和一阶拉氏量 $L^{(N)}$ 所描述的体系等价于原来 $\xi^{(0)}$ 和 $L^{(0)}$ 所描述的体系. 这是辛算法的观点.

在 Dirac 方法中 (1) 式所描述的一阶拉氏量体系存在初级约束

$$\phi_i^0 = P_i - a_i(\xi) \approx 0. \quad (32)$$

体系的总哈密顿量为

$$H_T = H_c + u^i \phi_i^0 = V(\xi) + u^i \phi_i^0, \quad (33)$$

其中 u^i 为与约束 ϕ_i^0 相应的拉氏乘子. 由初级约束 ϕ_i^0 的自洽性条件 $\dot{\phi}_i^0 = 0$, 得

$$u^i f_{ij}^{(0)} = \frac{\partial V}{\partial \xi^j}. \quad (34)$$

当辛矩阵 $f^{(0)}$ 奇异时, 由上式解不出所有的拉氏乘子 u^i , 可得出次级约束为

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha}^1(\xi^{(0)}) &= \Omega_{\alpha}^{(0)} = (\nu_{\alpha}^{(0)})^T \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^{(0)}} = 0 \\ &(\alpha = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (35)$$

可以看出, Dirac 方法中的次级约束就是 FJ 方法中的第零级约束. 根据 Dirac-Bergmann 算法, 次级约束 $\phi_{\alpha}^1(\xi^{(0)})$ 的自洽性条件又有可能导致新的次级约束

$$\begin{aligned} \phi_{\beta}^2(\xi^{(0)}) &= \dot{\phi}_{\alpha}^1(\xi^{(0)}) = \{\phi_{\alpha}^1(\xi^{(0)}), H_T\} \\ &= u^i \frac{\partial \phi_{\alpha}^1(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(0)i}} = u^i \frac{\partial \Omega_{\alpha}^{(0)}(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(0)i}} = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

由 $\phi_{\beta}^2(\xi^{(0)})$ 的自洽性条件, 又有可能导致新的次级约束. 这样 Dirac-Bergmann 算法不断进行下去. 直至 $\phi_r^{l+1}(\xi^{(0)})$ 是已求出的约束的线性组合, 即再也求不出新的约束为止. 这样, 在 Dirac 方法中求出 (1) 式描述的系统的各级约束为

$$\phi_{\alpha}^1(\xi^{(0)}), \phi_{\beta}^2(\xi^{(0)}), \dots, \phi_l^l(\xi^{(0)}). \quad (37)$$

现在证明 FJ 方法中各级约束就等于 Dirac 方法中相应的各级约束, 即

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha}^{(0)}(\xi^{(0)}) &= \phi_{\alpha}^1(\xi^{(0)}), \\ \Omega_{\beta}^{(1)}(\xi^{(0)}) &= \phi_{\beta}^2(\xi^{(0)}), \\ &\dots, \\ \Omega_r^{(N-1)}(\xi^{(0)}) &= \phi_r^l(\xi^{(0)}), \end{aligned} \quad (38)$$

且 $l = N$, 即 FJ 方法中的约束个数等于 Dirac 方法中的次级约束个数. 辛算法求出的各级约束与 Dirac-Bergmann 算法求出的相应的各级次级约束不仅相等, 两种算法的终止条件也相同. 从 (35) 式可知

$$\Omega_{\alpha}^{(0)}(\xi^{(0)}) = \phi_{\alpha}^1(\xi^{(0)}),$$

下面证明

$$\Omega_{\beta}^{(1)}(\xi^{(0)}) = \phi_{\beta}^2(\xi^{(0)}),$$

因为在方程 (13) 的 n 个方程中已经包含了 m 个不含拉氏乘子 u^i 的约束方程 (35), 所以可在方程 (13) 中令约束 $\Omega_{\alpha}^{(0)}(\xi^{(0)})$ 强等于零, 这类似于辛算法对约束的处理, 从而得到剩余的 $n - m$ 个关于 u^i 的独立方程 (外加 m 个 $\Omega_{\alpha}^{(0)}(\xi^{(0)})|_{\Omega_{\alpha}^{(0)}=0} = 0$, 即 $0 = 0$, 对 u^i 的解无影响)

$$f_{ij}^{(0)} u^j = \frac{\partial V^{(1)}(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(0)i}}. \quad (39)$$

现在拉氏乘子由 (36) 和 (39) 式共同确定. 构造一矢量

$$u^{(1)} = (u^1 u^2 \dots u^n 0)^T, \quad (40)$$

其中 0 为有 m 个零元素的行矢. 利用第一次迭代后的辛矩阵 $f^{(1)}$ 的矩阵表达式, 可将 (36) 和 (39) 式联立写成矩阵形式

$$\begin{aligned} f^{(1)} u^{(1)} &= \begin{pmatrix} f_{ij}^{(0)} u^j \\ -\frac{\partial \Omega_{\alpha}^{(0)}}{\partial \xi^{(0)i}} u^i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V^{(1)}(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(0)i}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial V^{(1)}(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(1)}}. \end{aligned} \quad (41)$$

当 $f^{(1)}$ 可逆时, $u^{(1)}$ 可以由上式解出, 从而解出所有的拉氏乘子 u^i . 但当 $f^{(1)}$ 仍为奇异时, 从上式并不能解出所有的拉氏乘子 u^i . 设 $f^{(1)}$ 的零模为 $\nu_{\beta}^{(1)}(\xi^{(0)})$ ($\beta = 1, 2, \dots, m_1$), m_1 为 $f^{(1)}$ 的零模数, 结合方程 (41), 可得 Dirac 方法中系统的新的次级约束为

$$\begin{aligned} \phi_{\beta}^2(\xi^{(0)}) &= (\nu_{\beta}^{(1)})^T \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \xi^{(1)}} = 0 \\ (\beta &= 1, 2, \dots, m_1), \end{aligned} \quad (42)$$

这正是 FJ 方法中第 1 级约束 (25) 式. 于是证明了

$$\phi_{\beta}^2(\xi^{(0)}) = \Omega_{\beta}^{(1)}(\xi^{(0)}).$$

由约束的自洽性条件, 有

$$\begin{aligned} \phi_{\gamma}^3 &= \dot{\phi}_{\beta}^2 = \{\phi_{\beta}^2(\xi^{(0)}), H_T\} = u^i \frac{\partial \phi_{\beta}^2(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(0)i}} \\ &= u^i \frac{\partial \Omega_{\beta}^{(1)}(\xi^{(0)})}{\partial \xi^{(0)i}} = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

我们又有可构造一新的矢量 $u^{(2)}$ 为

$$u^{(2)} = (u^{(1)} \ 0)^T, \quad (44)$$

其中 0 为一有 m_1 个零元素的行矢, m_1 为约束

$\Omega_{\beta}^{(1)}(\xi^{(0)})$ 的个数. 利用第二次迭代后的辛矩阵 $f^{(2)}$ 的矩阵表达式, 类似于

$$\phi_{\beta}^2(\xi^{(0)}) = \Omega_{\beta}^{(1)}(\xi^{(0)})$$

的证明, 同样可以证明

$$\phi_{\gamma}^3(\xi^{(0)}) = \Omega_{\gamma}^{(2)}(\xi^{(0)}).$$

如此不断继续下去, 就可以证明 FJ 方法中的各级约束等于 Dirac 方法中相应的各级次级约束. 直至辛矩阵 $f^{(N)}$ 正规时, FJ 方法中求不出新的约束, 同时 Dirac 方法中所有的拉氏乘子 u^i 都可解出, 也不会导致新的次级约束. 辛算法与 Dirac-Bergmann 算法同时结束.

由以上的证明可知, FJ 方法中各级约束是系统的运动方程导致的约束, 是 Lagrange 约束, 而 Dirac 方法中初级约束是由拉氏体制转换到哈氏体制过程中出现的, 是体制原因导致的约束. Dirac 方法中次级约束才是系统真正的约束, 即由系统的运动方程导致的约束. 辛算法与 Dirac-Bergmann 算法有着类似的更为深刻的本质.

4. 广义括号与 Dirac 括号的等价性

当辛矩阵 $f^{(N)}$ 正规时, 求解 Dirac 方法中各级约束间的 Poisson 括号组成的矩阵, $\Delta = (\{\phi_i, \phi_j\})$, 其中

$$\phi_i = (\phi_i^0, \phi_{\alpha}^1(\xi^{(0)}), \phi_{\beta}^2(\xi^{(0)}), \dots, \phi_r^l(\xi^{(0)})). \quad (45)$$

利用 (9) 和 (38) 式, 得

$$\Delta = \begin{pmatrix} f_{ij}^{(0)} & -\frac{\partial \phi_{\alpha}^1}{\partial \xi^{(0)i}} & \dots & -\frac{\partial \phi_r^l}{\partial \xi^{(0)i}} \\ \frac{\partial \phi_{\alpha}^1}{\partial \xi^{(0)j}} & & & \\ \dots & & 0 & \\ \frac{\partial \phi_r^l}{\partial \xi^{(0)j}} & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{ij}^{(0)} & -\frac{\partial \Omega_{\alpha}^{(0)}}{\partial \xi^{(0)i}} & \dots & -\frac{\partial \Omega_r^{(N-1)}}{\partial \xi^{(0)i}} \\ \frac{\partial \Omega_{\alpha}^{(0)}}{\partial \xi^{(0)j}} & & & \\ \dots & & 0 & \\ \frac{\partial \Omega_r^{(N-1)}}{\partial \xi^{(0)j}} & & & \end{pmatrix}. \quad (46)$$

而由 (30) 式可知 $f^{(N)}$ 为

$$f^{(N)} = \begin{pmatrix} f_{ij}^{(0)} & -\frac{\partial \Omega_a^{(0)}}{\partial \xi^{(0)i}} & \cdots & -\frac{\partial \Omega_r^{(N-1)}}{\partial \xi^{(0)i}} \\ \frac{\partial \Omega_a^{(0)}}{\partial \xi^{(0)j}} & & & \\ \cdots & & 0 & \\ \frac{\partial \Omega_r^{(N-1)}}{\partial \xi^{(0)j}} & & & \end{pmatrix}. \quad (47)$$

比较(46)与(47)式,可知 $\Delta^{-1} = (f^{(N)})^{-1}$, 因而 Dirac 方法中各级约束为第二类约束. 对只含第二类约束的系统,可引入 Dirac 括号

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \phi_i\} \Delta_{ij}^{-1} \{\phi_j, G\}, \quad (48)$$

其中 i, j 指标取遍所有的约束. 辛变量 $\xi^{(0)i}$ 之间的 Dirac 括号为

$$\begin{aligned} \{\xi^{(0)i}, \xi^{(0)j}\}_D &= -\{\xi^{(0)i}, \phi_k^0\} \Delta_{kl}^{-1} \{\phi_l^0, \xi^{(0)j}\} \\ &= \Delta_{ij}^{-1} = (f^{(N)})_{ij} \\ &= \{\xi^{(0)i}, \xi^{(0)j}\}_*. \end{aligned} \quad (49)$$

于是证明了辛变量之间的广义括号和 Dirac 括号等价, 因而两者的正则量子化规则也相同, 但用辛方法更简单.

当辛矩阵 $f^{(N)}$ 奇异时, 且所有的第 N 级约束 $\Omega_\rho^{(N)} \equiv 0$, 需对每一个恒等于零的约束引入规范条件 $\Lambda_\rho(\xi^{(0)}) = 0$, 规范条件应满足

$$\det f^{(N+1)} = \det \begin{pmatrix} f_{ij}^{(N)} & -\frac{\partial \Lambda_\rho}{\partial \xi^{(0)i}} \\ \frac{\partial \Lambda_\rho}{\partial \xi^{(0)j}} & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (50)$$

然后再用 $f^{(N+1)}$ 的逆进行 FJ 正则量子化.

在 Dirac 方法中, 由(46)和(47)式, 有

$$\det |\{\phi_i, \phi_j\}| = \det \Delta = \det f^{(N)} = 0, \quad (51)$$

这表明不是所有的约束都是第二类约束. 设 Δ 的零模为 ν'_ρ ($\rho = 1, 2, \dots, m_\rho$), m_ρ 为 Δ 或 $f^{(N)}$ 的零模个数, 则所有约束 ϕ_i 可线性组合成第一类约束 $\phi_i(\nu'_\rho)_i$. 对每一个第一类约束 $\phi_i(\nu'_\rho)_i$ ($\rho = 1, 2, \dots, m_\rho$) 也引入规范条件 $\Lambda_\rho(\xi^{(0)}) = 0$, 此时体系的所有约束(包括规范条件)为

$$\phi'_i = (\phi_i, \Lambda_\rho). \quad (52)$$

在 Dirac 方法中规范条件应满足

$$\begin{aligned} \det |\{\phi'_i, \phi'_j\}| &= \det \begin{pmatrix} \Delta_{ij} & -\frac{\partial \Lambda_\rho}{\partial \xi^{(0)i}} \\ \frac{\partial \Lambda_\rho}{\partial \xi^{(0)j}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det f^{(N+1)} \neq 0. \end{aligned} \quad (53)$$

这个要求与 FJ 方法的要求(50)式一致. 引入规范条件后 $f^{(N+1)} \neq 0$, 又变为第一种情况. 而第一种情况, 本文已证明这两种方法等价.

5. 结 论

本文已对 FJ 和 Dirac 方法的等价性进行了证明. FJ 方法计算量少, 不需区分初级约束与次级约束以及第一类约束和第二类约束, 几何意义明显, 也没有 Dirac 猜想这样的假设. 它进行量子化只需对矩阵求逆. 因而用它来对约束系统进行量子化可以避免 Dirac 方法的一些缺陷.

[1] Miao Y G 1993 *Acta Phys. Sin.* **42** 536 [in Chinese] [缪炎刚 1993 物理学报 **42** 536]

[2] Li Z P 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 1601 [in Chinese] [李子平 1996 物理学报 **45** 1601]

[3] Li A M, Jiang J H and Li Z P 2003 *Chin. Phys.* **12** 467

[4] Li A M, Zhang X P and Li Z P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1057 [in Chinese] [李爱民、张晓沛、李子平 2003 物理学报 **52** 1057]

[5] Faddeev L and Jackiw R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1692

[6] Barcelos-Neto J and Wotzasek C 1992 *Int. J. Mod. Phys. A* **7** 4981

[7] Barcelos-Neto J and Cheb-Terrb E S 1992 *Z. Phys. C* **45** 133

[8] Kulsbreshtha D S and Muller-Kirsten H J W 1991 *Phys. Rev. D* **43** 3376

[9] Foussats A et al 1997 *Int. J. Theor. Phys.* **36** 2923

[10] Foussats A et al 1997 *Int. J. Theor. Phys.* **36** 55

[11] Long Z W and Jing J 2003 *Phys. Lett. B* **560** 128

[12] Costa M E V and Girotti H O 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1771

[13] Govaerts J 1990 *Int. J. Mod. Phys. A* **5** 3625

[14] Dirac P A M 1964 *Lecture Notes on Quantum Mechanics* (New York: Yeshiva University)

[15] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetry Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) 314 [in Chinese] [李子平, 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京:北京工业大学出版社)第 314 页]

Equivalence of the Dirac method and the Faddeev-Jackiw method in the quantization of constrained systems^{*}

Long Zheng-Wen^{1)†} Liu Bo²⁾ Li Zi-Ping²⁾

¹⁾*(Department of Physics , Guizhou University , Guiyang 550025 , China)*

²⁾*(Department of Applied Physics Beijing Polytechnic University , Beijing 100022 , China)*

(Received 25 April 2003 ; revised manuscript received 24 September 2003)

Abstract

We have discussed the Dirac method and Faddeev-Jackiw method in the quantization of constrained systems. The equivalence of motion equation and canonical quantization in the two methods has been proved , and also the correspondence relation of constraints found.

Keywords : Faddeev-Jackiw method , dirac method , constrained systems , canonical quantization

PACC : 1110E , 0420F

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.10247009) , and the Natural Science Foundation of Guizhou Province , China (Grant No.20013024) .

[†] E-mail : longshc@hotmail.com