

非锁相 Lorenz-Haken 方程动力学研究^{*}

具 睿[†] 张亚俊 黄洪斌 赵 环

(东南大学物理系 南京 210096)

(2003 年 10 月 17 日收到, 2003 年 11 月 18 日收到修改稿)

考虑原子的相干性和经典注入光场, 利用随机微分方程给出非锁相条件下的 Lorenz-Haken 方程, 研究失谐量、注入经典光场和原子相干性对非锁相 Lorenz-Haken 方程动力学特性的影响. 在激光运转情形, 失谐量造成光场位相的混沌, 系统在不同条件下, 出现四吸引子、双吸引子及单吸引子混沌状态, 且体系的分数维维数较锁相条件下增加. 光场失谐量、注入光场和原子相干性可抑制混沌. 在双稳态运转下, 光场位相为 π 的偶数倍或奇数倍, 使光场稳定于正值和负值, 故体系出现对称双稳态对, 但无混沌状态.

关键词: 非锁相 Lorenz-Haken 方程, 混沌, 原子相干性, 注入光场

PACC: 4265T, 0545, 4255

1. 引言

1963 年, Lorenz 给出了描写 Rayleigh-Bénard 对流运动的一阶微分方程, 并揭示了其中的混沌解^[1]. 现在该方程是描写双吸引子混沌的标准方程. 1975 年, Haken 从理论上得出, 描写单模激光器运转的麦克斯韦-布洛赫方程与 Lorenz 方程在形式上一致^[2], 在光学研究领域被称为 Lorenz-Haken 方程. 人们对 Lorenz-Haken 方程的混沌动力学进行了广泛而深入的研究^[3-10]. 最近, 我们考虑原子的相干性和注入光场, 得到锁相条件下推广的 Lorenz-Haken 方程^[11], 并证明在激光运转条件下, 原子的相干性和注入光场可以抑制混沌. 本文将此方程推广到非锁相的情形, 研究在激光和双稳态两种运转条件下, 失谐量、经典注入光场以及原子相干性对 Lorenz-Haken 方程的动力学特性的影响.

2. 理论模型与系统方程

考虑注入经典光场 ϵ_d , 二能级原子系统与腔场相互作用的哈密顿量为

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + \sum_j \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \sigma_z^j + g \sum_j \mathcal{A}(t - t_j) \times (a^\dagger \sigma_-^j + a \sigma_+^j) + i(\epsilon_d e^{-i\omega_d t} a^\dagger - a \epsilon_d^* e^{i\omega_d t}), \quad (1)$$

式中等号右端前两项分别为腔场和二能级原子的能量, $a(a^\dagger)$ 和 $\sigma_z(\sigma_\pm)$ 分别为光场及泡利算符; 第三项为光场与二能级原子的相互作用, g 为耦合常数, t_j 为原子的注入时刻, $\mathcal{A}(t - t_j)$ 为阶跃函数; 最后一项为注入经典光场与腔场的相互作用. 利用随机微分方程方法^[12, 13], 得如下非锁相的 Lorenz-Haken 方程:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma[-x + y \cos(\varphi_y - \varphi_x) + Y \cos(\varphi_Y - \varphi_x)], \\ x\dot{\varphi}_x &= \sigma[-\delta x + y \sin(\varphi_y - \varphi_x) + Y \sin(\varphi_Y - \varphi_x)], \\ \dot{y} &= 2bc' |\rho_{21}| \sin(\varphi_{21} - \varphi_y) - y \\ &\quad + [c'(\rho_{22} - \rho_{11})x - xz] \cos(\varphi_x - \varphi_y), \quad (2) \\ y\dot{\varphi}_y &= -2bc' |\rho_{21}| \cos(\varphi_{21} - \varphi_y) - \delta_{21} y \\ &\quad + [c'(\rho_{22} - \rho_{11})x - xz] \sin(\varphi_x - \varphi_y), \\ \dot{z} &= -bz + xy \cos(\varphi_x - \varphi_y), \end{aligned}$$

式中“ $\cdot$ ”表示对无量纲时间 $\tau = \Gamma_\perp t$ 微分, x, y, z, Y 分别为无量纲的腔场、原子极化、粒子数反转和注入经典光场, $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_Y$ 分别为相应位相, 原子密度算符矩阵元 $\rho_{21} = |\rho_{21}| e^{i\varphi_{21}}$, σ 和 δ_{21} 分别为腔场及原子频率与光场振荡频率的无量纲失谐量. 其他参量见文献[11]. 与通常 Lorenz-Haken 方程不同, 方程(2)可产生两种体系状态. 若 $\rho_{22} > \rho_{11}$, 则体系处于激光工作状态, 若 $\rho_{22} < \rho_{11}$, 则体系处于双稳态工作

^{*} 东南大学国家自然科学基金预研基金(批准号 9207021278)资助的课题.

[†] E-mail: R. Ju@seu.edu.cn

状态.

3. 非锁相的 Lorenz-Haken 方程的动力学特性

3.1. 失谐量的影响 ($\rho_{22} > \rho_{11}$)

取 $\sigma = 1.4253$, $b = 0.2778$, 数值研究方程 (2), 得图 1 所示结果.

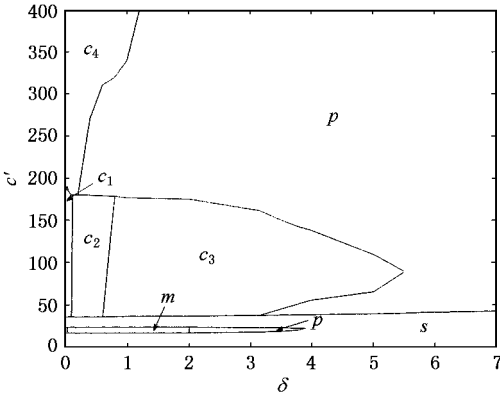


图 1 系统的状态与 $\delta (= \delta_{21})$ 和 c' 的关系图 $Y = 0, \rho_{11} = 0, c_1$ 为四混沌吸引子区域, c_2 为由四混沌吸引子到单混沌吸引子的过渡区, c_3 为单混沌吸引子区域, c_4 为等幅的混沌吸引子区域, m 为单混沌吸引子的亚稳态区域, p 为倍周期区域, s 为稳态区域, 当 $\delta > 35, 0 < c' < 400$ 时, 系统处于稳态区域

若失谐量 $\delta = \delta_{21} = 0$, 则系统处于锁相状态: $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_Y, \varphi_x = \varphi_{21} + \frac{\pi}{2}$. 混沌区域为 $c' = 37.97 - 148.0$, 且混沌相图为双 Lorenz 奇异吸引子, 见图 2. 当 $c' > 148.0$ 时, 系统进入倍周期.

当失谐量 δ 及 δ_{21} 至少有一个不为零时, 系统始终处于非锁相状态. 在一定的 c' 值范围内, 随失谐量的增大, 系统从四混沌吸引子 (c_1 区), 经由四混沌吸引子到单混沌吸引子过渡区 (c_2 区, 见后面讨论) 到单混沌吸引子 (c_3 区). 当 $0 < \delta < 0.01$ 时, 随 c' 值的增大, 系统由稳定态 (s 区), 经亚稳态 (m 区) 再经稳定态, 到四混沌吸引子态, 最后进入等幅的四混沌吸引子状态, 如图 1 所示.

显见, 系统工作在非锁相状态时, 不但产生混沌的 c' 值范围变大, 而且混沌特性也有了变化. 图 1 中 c_1 区域的混沌吸引子与通常的 Lorenz 吸引子 ($\delta = \delta_{21} = 0$) 不同的是: 出现了如图 3 所示的 4 片“蝴蝶翅膀”, 即相轨迹围绕着 4 个稳定点

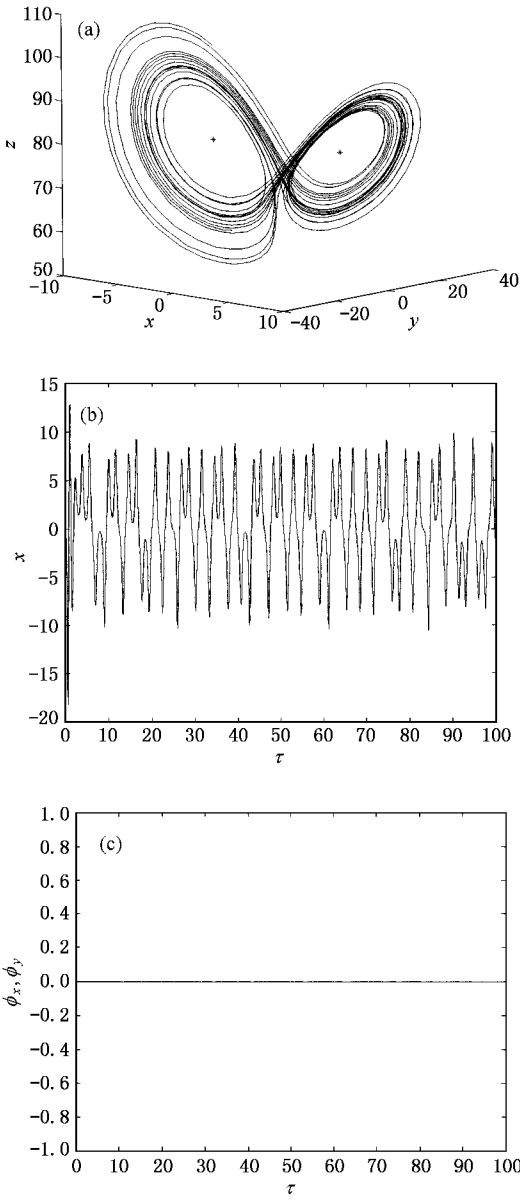


图 2 (a) 系统锁相条件的动力学相图, $\delta = \delta_{21} = 0, \rho_{11} = 0, Y = 0, c' = 80$, 双 Lorenz 奇异吸引子的两个稳定点的坐标为 $(\pm 4.6847, \pm 4.6847, 79)$ (b) 相空间在 x 轴的投影随时间 τ 的演化 (c) 光场位相与原子极化位相随时间 τ 的演化, 其 Lyapunov 维数为 2.10, 最大 Lyapunov 指数为 0.45

$$C_{1,2} = (\pm \sqrt{b[(\rho_{22} - \rho_{11})c' - 1]}, \pm \sqrt{b[(\rho_{22} - \rho_{11})c' - 1]}, (\rho_{22} - \rho_{11})c' - 1)$$

和

$$C_{3,4} = (\pm \sqrt{b[(\rho_{22} - \rho_{11})c' - 1]}, \mp \sqrt{b[(\rho_{22} - \rho_{11})c' - 1]}, (\rho_{22} - \rho_{11})c' - 1)$$

旋转,而光场位相与原子位相随时间呈随机的 π 阶跃变化,因而使原来的两个稳定点变成 4 个.在我们取的参数下,系统的 Lyapunov 维数为 3.18,最大 Lyapunov 指数为 0.63.

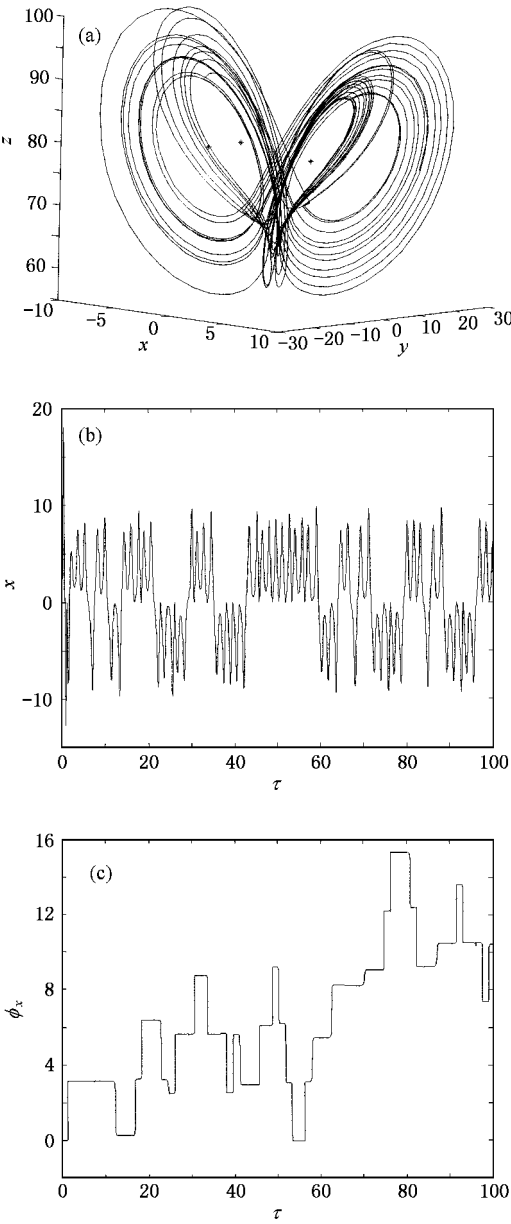


图 3 (a) 系统在非锁相条件下的动力学相图, $\delta = \delta_{21} = 10^{-9}$, $\rho_{11} = 0$, $Y = 0$, $c' = 80$, Lorenz 四混沌吸引子的 4 个稳定点的坐标为 $(\pm 4.6847, \pm 4.6847, 79)$ 和 $(\pm 4.6847, \mp 4.6847, 79)$ (b) 相空间在 x 轴的投影随时间 τ 的演化 (c) 光场位相随时间 τ 的演化

当继续增大抽运速率 c' 时,系统进入了 c_4 区域,即等幅的奇异吸引子状态.相轨迹仍围绕着 4 个稳定点旋转,只是奇异吸引子的带宽变窄了,光场位相随时间的演化仍处于混沌状态,如图 4 所示,系统

的 Lyapunov 指数为 4.40,最大 Lyapunov 维数为 4.51.

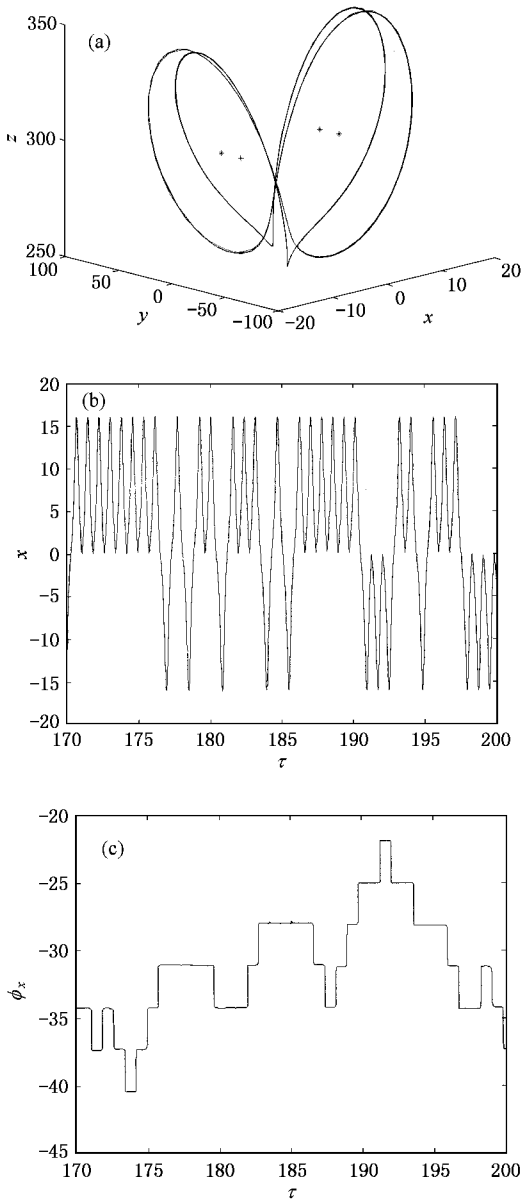


图 4 同图 3, $\delta = \delta_{21} = 10^{-6}$, $\rho_{11} = 0$, $Y = 0$, $c' = 300$ 4 个稳定点的坐标为 $(\pm 9.1138, \pm 9.1138, 299)$ 和 $(\pm 9.1138, \mp 9.1138, 299)$

当失谐量 $\delta > 0.1$ 时,系统进入了 c_2 区域,即由四混沌吸引子到单混沌吸引子的过渡区.在该区域内,混沌吸引子的相图如图 5 所示,4 个混沌吸引子逐渐变为两个,最终变为单混沌吸引子,其光场位相随时间的变化呈 π 阶跃.

当失谐量 $\delta > 0.8$ 时,系统进入 c_3 区域,即单混沌吸引子状态,其相图如图 6 所示.相轨迹局限于以稳定点为中心的一个带内,但是轨道不相交,其光场振幅随时间的变化为无规则的尖峰序列,光场位相

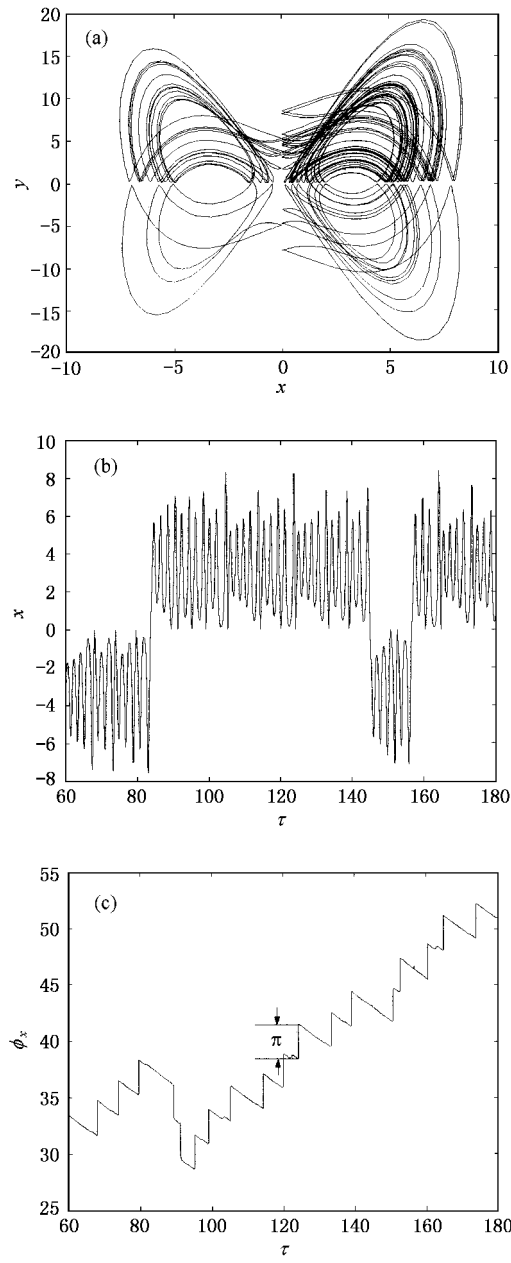


图5 同图3 $\delta = \delta_{21} = 0.2$, $\rho_{11} = 0$, $Y = 0$, $c' = 50$

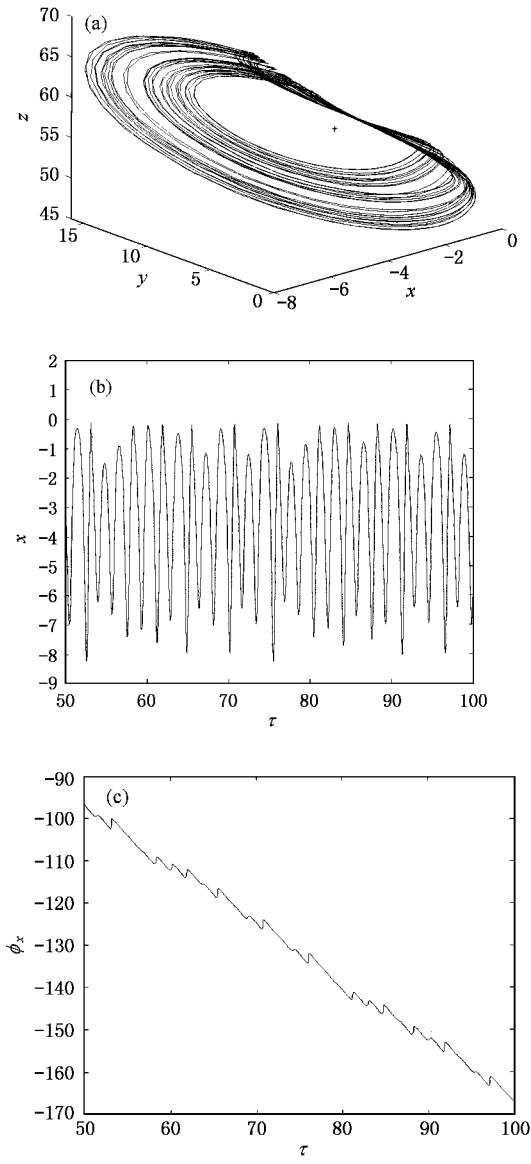


图6 同图3 $\delta = \delta_{21} = 2$, $\rho_{11} = 0$, $Y = 0$, $c' = 60$ 稳定点的坐标为 $(-4.0485, 4.0485, 59)$ 其 Lyapunov 维数为 3.02 , 最大 Lyapunov 指数为 0.13

随时间的变化为 π 阶跃. 单混沌吸引子的吸引中心是前面 4 个稳定点之一, 并由初值决定.

当失谐量 $\delta > 5.5$ 时, 系统处于 p 区, 即倍周期区域, 如图 7 所示. 当失谐量 $\delta > 35$ 系统处于稳定点. 说明当失谐量过大时, 系统的混沌状态被抑制.

3.2. 注入经典光场的影响

系统处于非锁相时, 若 $\rho_{11} > \rho_{22}$, 由于光场位相 φ_x 随时间的演化趋于不同的稳定值, 当稳定值为 π 的偶数倍时, 光场 x 的稳定值为正; 当 φ_x 稳定值为

π 的奇数倍时, 光场 x 的稳定值为负. 故在双稳态情形下, 体系出现对称的双稳态对, 如图 8 所示. 在双稳态运转条件下, 系统无混沌效应.

若 $\rho_{11} = 0$, 在锁相条件下, δ 或 Y 可抑制混沌. 如当 $c' = 100$ 时, $\delta = \delta_{21} = 0$, $Y = 0.9$ 时可抑制混沌; $\delta = \delta_{21} = 1$, $Y = 1.8$ 时抑制混沌; 而 $\delta = \delta_{21} = 5$, $Y = 3.0$ 时抑制混沌. 在图 1 中 c_1, c_2, c_3 混沌区域, 注入光场抑制混沌的临界值随失谐量的增大而增大.

3.3. 原子相干性的影响

因原子的相干性可使原子产生关联辐射^[7], 所

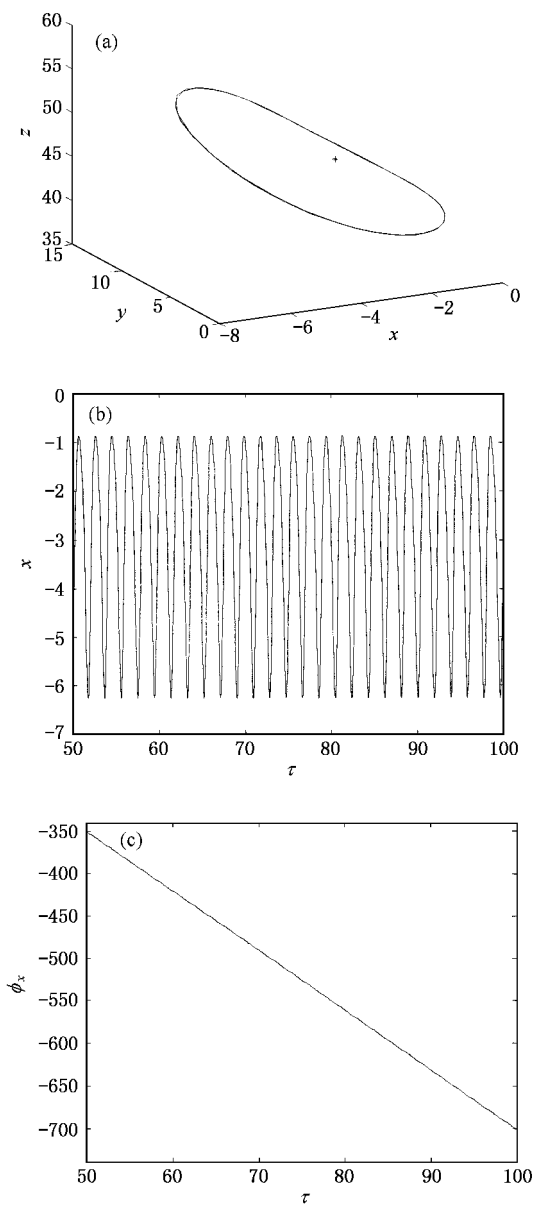


图 7 同图 3 $\delta = \delta_{21} = 6.5$, $\rho_{11} = 0$, $Y = 0$, $c' = 50$ 稳定点的坐标为 $(-3.6895 \ 3.6895 \ 49)$

以原子的相干性可以抑制混沌.图 9 给出 $c' = 100$, $Y = 0$ 及 $\varphi_{21} = \pi/2$ 时,在不同的失谐量下 $\lambda_{\max}-\rho_{11}$ 曲线.由图 9 知 $0 \leq \delta \leq 1$, $\rho_{11} < 0.062$ ($\rho_{21} = 0.2412$) 时 , $\lambda_{\max} > 0$ 而 $\rho_{11} > 0.062$ 时 , $\lambda_{\max} < 0$,即抑制混沌 ; $\delta > 1$ 时 , $\lambda_{\max}$ 与失谐量及原子相干性没有明显的依赖关系.但当 $\rho_{11} \geq 0.5$ 时 ,无论失谐量为何值 ,均无混沌产生 .

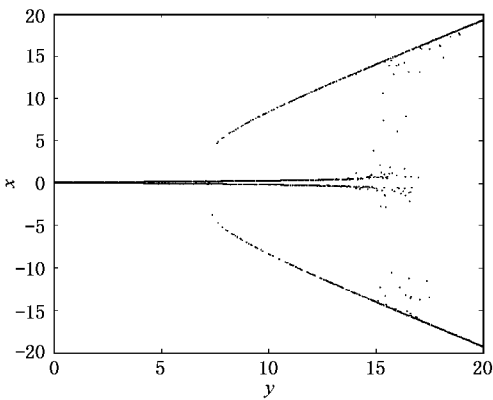


图 8 非锁相的双稳态曲线 $\delta = \delta_{21} = 10^{-3}$, $\rho_{11} = 1$, $\varphi_d = 0$, $c' = 50$

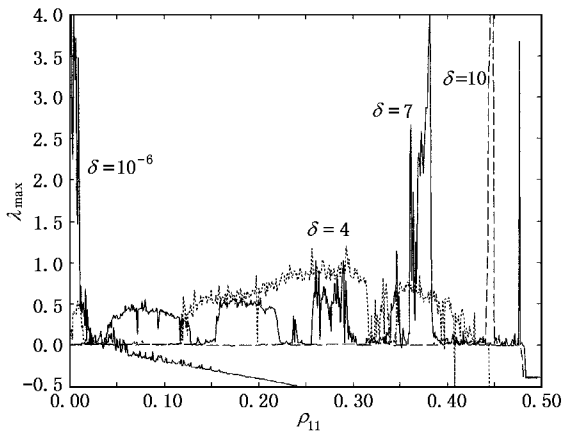


图 9 $\lambda_{\max}-\rho_{11}$ 曲线 $c' = 100$, $|\rho_{21}| = \sqrt{\rho_{11} \rho_{22}}$, $\varphi_{21} = \pi/2$, $Y = 0$

4. 结 论

光场以及原子的失谐量引起了系统的非锁相 , 在一定条件下 ,光场及原子极化位相随时间呈 π 阶跃变化 ,系统的混沌行为除锁相条件下的双混沌吸引子外 ,还有由非锁相条件引起的四混沌及单混沌吸引子 ,除有倍周期外 ,还有周期运动.同时 ,非锁相还增大了混沌的分数维维数.在一定条件下 ,注入光场 Y 、失谐量 δ (δ_{21})和原子相干性 $|\rho_{21}|$ 可抑制混沌.在物理上这是由于注入相干性和大失谐造成的弱原子-光场作用引起的.

在非锁相的双稳态情况下 ,没有观察到混沌现象 ,双稳态是以 $x = 0$ 为对称的双双稳态 .

- [1] Lorenz E N 1963 *J. At. Sci.* **20** 130
- [2] Haken H 1975 *Phys. Lett. A* **53** 77
- [3] Weiss C O 1991 *Dynamics of Lasers*(VCH Weinheim)
- [4] Tomás M J , Roldán E , de Valcárcel G J and Vilaseca R 1995 *Opt. Commun.* **114** 111
- [5] van Tartwijk G H M *et al* 1997 *Opt. Commun.* **133** 565
- [6] Yu J Z , Su N and Vincent T L 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 397(in Chinese) 余建祖、苏楠、Vincent T L 1998 物理学报 **47** 397]
- [7] Hua C C and Lu Q S 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 408 (in Chinese) [化存才、陆启韶 1999 物理学报 **48** 408]
- [8] Tang G N , Luo X S and Kong L J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 30(in Chinese) 唐国宁、罗晓曙、孔令江 2000 物理学报 **49** 30]
- [9] Guan X P , Peng H P , Li L X and Wang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 26(in Chinese) 关新平、彭海朋、李丽香、王益群 2001 物理学报 **50** 26]
- [10] Song L P , Guo Q Z and Tan W H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 119(in Chinese) 宋立平、郭奇志、谭维翰 2004 物理学报 **53** 119]
- [11] Deng X L , Ma H Q , Chen B D and Huang H B 2001 *Phys. Lett. A* **290** 77
- [12] Benkert C and Scully M O 1990 *Phys. Rev. A* **42** 2817
- [13] Benkert C *et al* 1990 *Phys. Rev. A* **41** 2756

Dynamics of nonphase-locking Lorenz-Haken equation^{*}

Ju Rui Zhang Ya-Jun Huang Hong-Bin Zhao Huan

(Department of Physics , Southeast University , Nanjing 210096 , China)

(Received 17 October 2003 ; revised manuscript received 18 November 2003)

Abstract

Considering the atomic coherences and injected classical field , we derived the nonphase-locking Lorenz-Haken equation by using the technique of stochastic differential equations. The effects of detuning , injected field and the atomic coherence on the dynamical characteristics of this equation is then numerically studied. The results show that in laser working situations , the detuning can result in chaotic behaviors of the light phase. Under different conditions , the system can generate four attractors , double attractors and single attractor , and the fractal dimension of the system is larger than that of the locking-phase system. The optical detuning , injected field and atomic coherence can inhibit the chaos of the cavity field. In the optical bistability regions , we obtain symmetric bistability pair , but never find the chaotic attractors.

Keywords : nonphase-locking Lorenz-Haken equation , chaos , atomic coherence , injected field

PACC : 4265T , 0545 , 4255

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Southeast University , China(Grant No.9207021278).