第 53 卷 第 8 期 2004 年 8 月
1000-3290/2004/53(08)/2424-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.8, August, 2004


# 弹性细杆平衡的动态稳定性

刘延柱[1)] 薛 纭[2)] 陈立群[2)]

[1)](上海交通大学工程力学系,上海 200030)

[2)](上海大学力学系,上海 200072)

(2003 年 6 月 30 日收到;2003 年 11 月 18 日收到修改稿)

从动力学观点讨论弹性细杆的平衡稳定性问题.建立了弹性杆的动力学方程,导出了杆的弯扭度与截面角速度之间的运动学关系式.对具有弧坐标 $s$ 和时间 $t$ 双重自变量的离散动力系统扩充了 Lyapunov 稳定性定义.以具有初扭率的非圆截面直杆的平衡稳定性为例,应用一次近似方法证明了当静力学意义下的稳定性条件得到满足时,动力学意义下的稳定性条件必同时满足.

**关键词**:弹性杆动力学方程,Kirchhoff 理论,Lyapunov 稳定性

**PACC**:0320,0340D

## 1. 引 言

弹性细杆静力学的非线性理论建立在 Kirchhoff 理论的基础上.1859 年 Kirchhoff[1] 利用弹性杆的平衡微分方程与刚体定点转动的 Euler-Poisson 方程在数学形式上的相似性,提出将时间变量 $t$ 改为弧坐标 $s$,使动力学的理论和方法,包括 Lyapunov 运动稳定性理论应用于弹性杆静力学[2].20 世纪 70 年代以来,由于弹性杆作为 DNA 力学模型在分子生物学领域内研究工作的兴起,使 Kirchhoff 理论重新引起注意[3—5].已发表的大多数文献中,关于弹性杆平衡稳定性问题的讨论均建立在 Kirchhoff 理论基础上,即限于静力学范畴以内[6—8].静力学意义的稳定性概念是指在同样的受力条件下,杆的受扰挠性线的几何形态与未扰挠性线是否接近.由于无时间变量参与,不可能根据挠性线变化的时间历程来判断受扰后弹性杆的运动趋向.因此更严格的稳定性判断必须在动力学范畴内进行,即必须研究具有弧坐标 $s$ 和时间 $t$ 双重自变量的离散系统的稳定性问题.在为数不多的弹性杆动力学文献中,Tabor 和 Klapper[9] 导出了杆的动力学方程,以及用拓扑学参数描述杆几何形态的运动学方程;Goriely 和 Shipman[10] 在线性化动力学方程的基础上,用数值方法研究了螺旋线平衡的稳定性.本文提出当时间自变量离散系统发展为弹性杆模型的双自变量离散系统时,必须对 Lyapunov 稳定性的基本概念作必要的扩充.文中以具有初扭率的非圆截面直杆平衡问题为例,研究了弹性杆平衡的动态稳定性与静态稳定性的相互关系.在一次近似意义下,证明了当静态稳定性条件得到满足时,动态稳定性条件必同时满足.

## 2. 截面的弯扭度与角速度

讨论长度为 $L$ 的细长等截面弹性杆的运动.沿用 Kirchhoff 理论的基本假设:截面为刚性且与中心线 $C$ 正交;杆为均匀各向同性,满足线性本构关系;忽略杆的体积力.根据上述假设,杆的运动被离散为沿中心线连续分布的刚性截面的运动.中心线 $C$ 上任意点 $P$ 处截面的无限小角位移矢量 $\Delta\phi$ 为 $P$ 点的弧坐标 $s$ 和时间 $t$ 的二元函数.利用 $\Delta\phi$ 与弧坐标增量 $\Delta s$ 或时间增量 $\Delta t$ 之比计算 $\phi$ 对 $s$ 和 $t$ 的偏导数,分别记作 $\omega$ 和 $\Omega$,

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial s},\qquad \boldsymbol{\Omega}=\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial t}. \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{\omega}$ 为杆的弯扭度,$\boldsymbol{\Omega}$ 为刚性截面的角速度.建立与截面固定的主轴坐标系($P$-$xyz$),以 $\boldsymbol{e}_i$ ($i=1,2,3$)为基矢量,其中 $\boldsymbol{e}_3=\partial\boldsymbol{r}/\partial s$ 沿 $P$ 点处的切线轴.($P$-$xyz$)相对曲线 $C$ 的 Frenet 坐标系绕 $\boldsymbol{e}_3$ 的扭角为 $\chi$.$\boldsymbol{\omega}$ 在($P$-$xyz$)中的投影 $\omega_i$ ($i=1,2,3$)由中心线为曲线 $C$ 的曲率 $\kappa$、挠率 $\tau$ 和扭角 $\chi$ 确定,

$$\omega_1 = \kappa\sin\chi,\quad \omega_2 = \kappa\cos\chi,\quad \omega_3 = \tau + \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}s}. \tag{2}$$

杆在任意瞬时的几何形态由弯扭度 $\boldsymbol{\omega}$ 完全确定. 设 $\boldsymbol{a}$ 为与截面固定的任意矢量,则 $\boldsymbol{a}$ 相对 $s$ 和 $t$ 的偏导数可利用矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 写作

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial s} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a},\quad \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{a}. \tag{3}$$

将(3)式分别对 $t$ 和 $s$ 求偏导数,得到

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial s\partial t} = \frac{\tilde{\partial}}{\partial t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}),\quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{a}}{\partial t\partial s} = \frac{\tilde{\partial}}{\partial s}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{a}). \tag{4}$$

符号'~'表示相对动坐标系($P$-$xyz$)的局部导数. 由于截面的角位移连续变化,令(4)式中的两个式子相等,导出弯扭度 $\boldsymbol{\omega}$ 与角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 之间的运动学关系式[9],

$$\frac{\tilde{\partial}\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \frac{\tilde{\partial}\boldsymbol{\Omega}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Omega}. \tag{5}$$

## 3. 弹性杆动力学方程

设弹性杆在力和力矩作用下作任意运动. $P$ 点在空间中的位置由相对固定参考点 $O$ 的矢径 $\boldsymbol{r}$ 确定,$\boldsymbol{r}$ 为弧坐标 $s$ 和时间 $t$ 的连续函数. 考虑 $P$ 点与邻近点之间微元弧段内杆的运动,根据动量定理和对质心的动量矩定理,导出动力学方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} = \rho S\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t},\quad \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial s} + \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega}), \tag{6}$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 为截面作用力的主矢和主矩,$\rho$ 为杆的密度,$S$ 为杆的截面积,$\boldsymbol{J}$ 为单位长度杆的惯量张量,其在($P$-$xyz$)中的对角线元素为 $J_i = \rho I_i$ ($i=1,2,3$), $I_1$, $I_2$ 为截面的惯性矩,$I_3$ 为极惯性矩,$\boldsymbol{v} = \partial\boldsymbol{r}/\partial t$ 为 $P$ 点的速度,与切线轴基矢量 $\boldsymbol{e}_3$ 之间满足关系式

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial s} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial t}. \tag{7}$$

(6),(7)式相对($P$-$xyz$)的局部导数形式为

$$\frac{\tilde{\partial}\boldsymbol{F}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{F} - \rho S\left(\frac{\tilde{\partial}\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}\right) = 0. \tag{8a}$$

$$\frac{\tilde{\partial}\boldsymbol{M}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{M} + \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{F} - \frac{\tilde{\partial}}{\partial t}(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\Omega}) = 0, \tag{8b}$$

$$\frac{\tilde{\partial}\boldsymbol{v}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{e}_3 = 0. \tag{8c}$$

将 $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{v}$ 等矢量在($P$-$xyz$)中的投影记作 $F_i$, $M_i$, $\omega_i$, $\Omega_i$, $v_i$ ($i=1,2,3$), 设弹性杆在松弛状态下存在绕切线轴的常值原始扭率 $\omega_3^0$,杆绕 $x$, $y$ 轴的抗弯刚度和绕 $z$ 轴的抗扭刚度分别记为 $A$, $B$, $C$,则力矩 $\boldsymbol{M}$ 的投影为

$$M_1 = A\omega_1,\quad M_2 = B\omega_2,\quad M_3 = C(\omega_3 - \omega_3^0). \tag{9}$$

将矢量方程组(5),(8)向($P$-$xyz$)投影,利用(9)式将 $\omega_i$ 以 $M_i$ ($i=1,2,3$)代替,导出以下动力学方程组:

$$\frac{\partial F_1}{\partial s} + \frac{M_2}{B}F_3 - \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0\right)F_2 - \rho S\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \Omega_2 v_3 - \Omega_3 v_2\right) = 0, \tag{10a}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial s} + \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0\right)F_1 - \frac{M_1}{A}F_3 - \rho S\left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \Omega_3 v_1 - \Omega_1 v_3\right) = 0, \tag{10b}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial s} + \frac{M_1}{A}F_2 - \frac{M_2}{B}F_1 - \rho S\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + \Omega_1 v_2 - \Omega_2 v_1\right) = 0, \tag{10c}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial s} + \frac{1}{B}M_2 M_3 - \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0\right)M_2 - F_2 - J_1\frac{\partial \Omega_1}{\partial t} + (J_2 - J_3)\Omega_2\Omega_3 = 0, \tag{10d}$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial s} + \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0\right)M_1 - \frac{1}{A}M_1 M_3 + F_1 - J_2\frac{\partial \Omega_2}{\partial t} + (J_3 - J_1)\Omega_3\Omega_1 = 0, \tag{10e}$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial s} + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)M_1 M_2 - J_3\frac{\partial \Omega_3}{\partial t} + (J_1 - J_2)\Omega_1\Omega_2 = 0, \tag{10f}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{M_2}{B}v_3 - \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0\right)v_2 - \Omega_2 = 0, \tag{10g}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial s} + \left(\frac{M_3}{C} + \omega_3^0\right)v_1 - \frac{M_1}{A}v_3 + \Omega_1 = 0, \tag{10h}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial s} + \frac{M_1}{A}v_2 - \frac{M_2}{B}v_1 = 0, \tag{10i}$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial s}+\frac{M_2}{B}\Omega_3-\left(\frac{M_3}{C}+\omega_3^0\right)\Omega_2-\frac{1}{A}\frac{\partial M_1}{\partial t}=0, \tag{10j}$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial s}+\left(\frac{M_3}{C}+\omega_3^0\right)\Omega_1-\frac{M_1}{A}\Omega_3-\frac{1}{B}\frac{\partial M_2}{\partial t}=0, \tag{10k}$$

$$\frac{\partial \Omega_3}{\partial s}+\frac{M_1}{A}\Omega_2-\frac{M_2}{B}\Omega_1-\frac{1}{C}\frac{\partial M_3}{\partial t}=0. \tag{10l}$$

作为特例,令$\boldsymbol{v}\equiv 0$,$\boldsymbol{\Omega}\equiv 0$, 即简化为弹性杆静力学中的 Kirchhoff 方程[1,2].

## 4. 双自变量离散系统的稳定性基本概念

将变量 $F_i, M_i, \Omega_i, v_i$($i=1,2,3$)定义为弹性杆的状态变量 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{12}$.弹性杆的动力学方程是以 $s$ 和 $t$ 为自变量的偏微分方程组,分别以右上角的撇号和顶部的点号表示相对弧坐标 $s$ 和时间 $t$ 的偏微分,其一般形式为

$$\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{Y}(\dot{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{y},s,t). \tag{11}$$

弹性杆的平衡状态,即未扰状态 $\boldsymbol{y}_s(s,t)$,为动力学方程(11)中当 $\dot{\boldsymbol{y}}\equiv 0$ 时的特解,满足静平衡方程

$$\boldsymbol{y}_s'=\boldsymbol{Y}(0,\boldsymbol{y}_s,s,t). \tag{12}$$

当状态变量在杆中心线上的起始点 $s=s_0$ 及初始时刻 $t=t_0$ 的值 $\boldsymbol{y}(s_0, t_0)$偏离未扰状态时,方程(11)的解 $\boldsymbol{y}(s,t)$ 为杆的受扰状态.扰动 $\boldsymbol{x}(s,t)=\boldsymbol{y}(s,t)-\boldsymbol{y}_s(s,t)$为受扰状态与未扰状态之差,满足扰动方程

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{X}(\dot{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x},s,t). \tag{13}$$

弹性杆的未扰状态与扰动方程的零解 $\boldsymbol{x}(s)\equiv 0$ 完全等价.扰动在 $s=s_0$ 及 $t=t_0$ 的值 $\boldsymbol{x}(s_0, t_0)$为起始扰动.Lyapunov 稳定性即关于起始扰动的稳定性.对于扰动方程(13)中不显含弧坐标 $s$ 和时间 $t$ 的自治情形,双自变量系统的 Lyapunov 稳定性具有以下定义.

**定义 1** 若给定任意小的正数 $\varepsilon$,存在正数 $\delta$,对于一切受扰状态,只要其起始扰动满足$|\boldsymbol{x}(s_0,t_0)|\leqslant\delta$,对于所有 $s>s_0$, $t>t_0$ 均有$|\boldsymbol{x}(s,t)|<\varepsilon$,则称未扰状态 $\boldsymbol{y}_s(s,t)$是稳定的.

**定义 2** 若未扰状态稳定,且当 $s\to\infty$, $t\to\infty$ 时均有$|\boldsymbol{x}(s,t)|\to 0$,则称未扰运动 $\boldsymbol{y}_s(s,t)$是渐近稳定的.

**定义 3** 若存在正数 $\varepsilon_0$,对任意正数 $\delta$,存在受扰状态 $\boldsymbol{y}(s,t)$,当其起始扰动满足$|\boldsymbol{x}(s_0,t_0)|\leqslant\delta$时,存在弧坐标 $s_1$ 和时刻 $t_1$,满足$|\boldsymbol{x}(s_1,t_1)|=\varepsilon_0$,则称未扰状态 $\boldsymbol{y}_s(s,t)$是不稳定的.

## 5. 非圆截面直杆平衡的动态稳定性

弹性杆动力学方程(10)存在以下常值特解:

$$\begin{aligned}
&F_1=F_2=0,\\
&F_3=F_0,\\
&M_1=M_2=0,\\
&M_3=M_0,\\
&\Omega_1=\Omega_2=\Omega_3=0,\\
&v_1=v_2=v_3=0.
\end{aligned} \tag{14}$$

此特解对应于直杆平衡状态.定义以下无量纲弧坐标 $\bar{s}$和无量纲时间变量 $\bar{t}$:

$$\begin{aligned}
\bar{s}&=\left(\frac{M_0}{B}\right)s,\\
\bar{t}&=\sqrt{\frac{F_0}{\rho S}}\left(\frac{M_0}{B}\right)t.
\end{aligned} \tag{15}$$

引入以下无量纲扰动量 $x_i$($i=1,\cdots,12$):

$$\begin{aligned}
x_i&=\frac{F_i}{F_0}\quad(i=1,2),\\
x_3&=\frac{F_3-F_0}{F_0}\\
x_{3+i}&=\frac{M_i}{F_0}\quad(i=1,2),\\
x_6&=\frac{M_3-M_0}{M_0},\\
x_{6+i}&=\frac{B\Omega_i}{M_0}\sqrt{\frac{\rho S}{F_0}}\quad(i=1,2,3),\\
x_{9+i}&=v_i\sqrt{\frac{\rho S}{F_0}}\quad(i=1,2,3).
\end{aligned} \tag{16}$$

将(16)式代入方程组(10),略去扰动量 $x_i$($i=1,\cdots,12$)的二次以上微量,得到一次近似扰动方程

$$x_1'=(1+\nu_1)x_2-x_5+\dot{x}_{10}, \tag{17a}$$

$$x_2'=-(1+\nu_1)x_1+(1+\sigma)x_4+\dot{x}_{11}, \tag{17b}$$

$$x_3'=\dot{x}_{12}, \tag{17c}$$

$$x_4'=\mu x_2+\nu_1 x_5+\bar{J}_1\dot{x}_7, \tag{17d}$$

$$x_5'=-\mu x_1+(\sigma-\nu_1)x_4+\bar{J}_2\dot{x}_8, \tag{17e}$$

$$x_6'=\bar{J}_3\dot{x}_9, \tag{17f}$$

$$x_7'=(1+\sigma)\dot{x}_4+(1+\nu_1)x_8, \tag{17g}$$

$$x_8' = \dot{x}_5 - (1+\nu_1)x_7, \tag{17h}$$

$$x_9' = (1+\nu)\dot{x}_6, \tag{17i}$$

$$x_{10}' = x_8 + (1+\nu_1)x_{11}, \tag{17j}$$

$$x_{11}' = -x_7 - (1+\nu_1)x_{10}, \tag{17k}$$

$$x_{12}' = 0, \tag{17l}$$

式中撇号和点号表示对 $\bar{s}$ 和 $\bar{t}$ 的偏导数,无量纲参数 $\mu,\sigma,\nu,\nu_1,\delta,\bar{J}_i(i=1,2,3)$定义为

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{BF_0}{M_0^2},\\
\sigma &= \frac{B}{A}-1,\\
\nu &= \frac{B}{C}-1,\\
\nu_1 &= \nu+\delta(1+\nu),\\
\delta &= \frac{C\omega_3^0}{M_0},\\
\bar{J}_i &= \frac{F_0 J_i}{\rho SB} \qquad (i=1,2,3).
\end{aligned} \tag{18}$$

令方程组(17)中 $\dot{x}_i \equiv 0(i=7,\cdots,12)$, 导出相应的一次近似静力学扰动方程

$$x_1' = (1+\nu_1)x_2 - x_5, \tag{19a}$$

$$x_2' = -(1+\nu_1)x_1 + (1+\sigma)x_4, \tag{19b}$$

$$x_3' = 0, \tag{19c}$$

$$x_4' = \mu x_2 + \nu_1 x_5, \tag{19d}$$

$$x_5' = -\mu x_1 + (\sigma-\nu_1)x_4, \tag{19e}$$

$$x_6' = 0. \tag{19f}$$

文献[7,8]中已在静力学范围内讨论了直杆平衡的稳定性问题,导出了受拉扭作用直杆的静态平衡稳定性条件. 本文讨论动态稳定性与静态稳定性的相互关系,即当静态平衡稳定性条件得到满足时,直杆平衡的动态稳定性能否实现.

设扰动方程(17)中的变量 $x_i(i=1,\cdots,12)$存在以下形式特解:

$$x_i = A_i \exp(\lambda\bar{s} + w\bar{t}) \qquad (i=1,\cdots,12). \tag{20}$$

由于静态平衡稳定性条件已得到满足,(20)式中的参数 $\lambda$ 为静力学扰动方程(19)的特征根,且满足纯虚根条件[8]. 将特解(20)式代入方程(17a)—(17f),导出

$$w = 0. \tag{21}$$

这表明各变量 $x_i(i=1,\cdots,12)$均为弧坐标 $\bar{s}$ 的一元函数,与时间 $\bar{t}$ 无关. 令方程(17g)—(17l)中 $\dot{x}_i=0$ $(i=4,5,6)$, 构成 $x_i(i=7,\cdots,12)$的封闭的常微分方程组

$$x_7' = (1+\nu_1)x_8, \tag{22a}$$

$$x_8' = -(1+\nu_1)x_7, \tag{22b}$$

$$x_9' = 0, \tag{22c}$$

$$x_{10}' = x_8 + (1+\nu_1)x_{11}, \tag{22d}$$

$$x_{11}' = -x_7 - (1+\nu_1)x_{10}, \tag{22e}$$

$$x_{12}' = 0. \tag{22f}$$

将(20),(21)式代入此方程组,从 $A_i(i=1,\cdots,12)$的非零解条件导出 $\lambda$ 的特征方程

$$\lambda^2[\lambda^2 + (1+\nu_1)^2]^2 = 0. \tag{23}$$

此特征方程存在两个零根 $\lambda=0$,对应于方程组(22)的以下常值积分:

$$\begin{aligned} x_9 &= \text{const},\\ x_{12} &= \text{const}. \end{aligned} \tag{24}$$

除零根以外的本征值为纯虚根

$$\lambda = \pm \mathrm{i}(1+\nu_1), \tag{25}$$

则变量 $x_i(i=7,\cdots,12)$在一次近似意义下稳定. 表明动力学方程中增加的扰动因素,即截面速度 $\boldsymbol{v}$ 和角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 亦相对弧坐标稳定,且与时间变化无关. 从而证明,当静力学意义的稳定性条件得到满足时,动力学意义的稳定性条件必同时满足.

## 6. 结　论

在 Kirchhoff 理论基础上讨论弹性杆的动力学问题时,必须将 Lyapunov 稳定性理论适用的自变量离散系统发展为弹性杆模型的双自变量离散系统,稳定性的基本概念应作相应的扩充. 利用文中导出的弹性杆动力学方程和运动学关系式,讨论了具有初扭率的非圆截面直杆平衡的动态稳定性. 证明了在一次近似意义下,当静态稳定性条件得到满足时,动态稳定性条件必同时满足.

[1] Kirchhoff G 1859 *J. Rein Angew. Math.* **56** 285

[2] Love A E H 1944 *A Treatice on Mathematical Theory of Elasticity* 4th ed (New York: Dover) pp381—426

[3] Benham C J 1979 *Biopolymers* **18** 609

[4] Shi Y, Hearst J E 1994 *J. Chem. Phys.* **101** 5186

[5] Nizzete M, Goriely A 1999 *J. Math. Phys.* **40** 2830

[6] Tobias I, Swigon D, Coleman B D 2000 *Phys. Rev.* E **61** 747

[7] Liu Y Z 2002 *Mechanics in Engineering* **24**(4) 56 (in Chinese) [刘延柱 2002 力学与实践 **24**(4) 56]

[8] Liu Y Z 2002 *Journal of Shanghai Jiaotong University* **36** 1587 (in Chinese) [刘延柱 2002 上海交通大学学报 **36** 1587]

[9] Tabor M, Klapper I 1996 *Mathematical Approaches to Biomolecular Structure and Dynamics* (Berlin: Springer) pp139—159

[10] Goriely A, Shipman P 2000 *Phys. Rev.* E **61** 4508

# Dynamical stability of equilibrium of a thin elastic rod

Liu Yan-Zhu[1) ] Xue Yun[2)] Chen Li-Qun[2)]

[1)] (*Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030, *China*)

[2)] (*Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai* 200072, *China*)

(Received 30 June 2003; revised manuscript received 18 November 2003)

Abstract

The problem on stability of equilibrium of a thin elastic rod in view of dynamics is discussed in this paper. The dynamical equations of the rod is established, and the definitions of Lyapunov stability for a discrete dynamical system with arc-coordinate $s$ and time $t$ as double arguments are proposed. As an example, the stability of straight equilibrium of a rod with noncircular cross-section and intrinsic twisting is analyzed by use of the first approximation method. It was proved that the straight equilibrium of the rod is stable dynamically when the conditions of stability are satisfied within the scope of statics.

**Keywords**: dynamic equations of elastic rod, Kirchhoff theory, Lyapunov stability

**PACC**: 0320, 0340D