

基于状态反馈参数激励系统的超谐共振分岔控制^{*}

符文彬[†] 唐驾时

(湖南大学工程力学系, 长沙 410082)

(2003 年 11 月 13 日收到 2004 年 1 月 8 日收到修改稿)

设计了非线性参数控制器, 改变了参数激励系统 2 倍超谐共振时的稳态响应, 减小了系统的响应幅值和消除了超谐共振时的鞍结分岔, 从而消除了跳跃和滞后现象. 首先由多尺度法得到参数系统的近似频响方程, 再进行分岔分析, 从而实现非线性控制的目标. 通过数值模拟, 说明状态反馈控制是可行的和有效的.

关键词: 参数激励, 鞍结分岔, 分岔控制, 2 倍超谐共振

PACC: 0547, 1120D, 0260

1. 引言

对于非线性参数激励系统而言, 只要系统处于共振状态时, 一个小幅度的外部激励都会产生很大的响应. 而且在次谐共振和超谐共振时, 系统的稳态响应并不会随着时间而衰减, 同时系统还会发生鞍结分岔^[1]. 而鞍结分岔的产生将会导致系统产生跳跃和滞后现象. 这些非线性系统的动力学行为在许多工程实际中是有害的, 是不希望发生的. 对复杂非线性动力系统的动力学行为进行控制的主要目的就是要避免这些有害的振动, 从而产生所希望的动力学行为. 而这些正是分岔控制研究的内容. 要指出的是对非自治系统的分岔控制研究比自治系统的研究进展缓慢. 对于非自治系统, 它们的动力学行为与平均方程相关, 要研究系统的分岔特性, 一般都是研究其平均方程.

许多数学和力学工作者对参数激励系统进行了全面的动力学分析. Bajaj 用分岔理论对包含有 van der Pol 和 Duffing 振子的参数激励系统进行了分析^[2]. Zhang 和 Huo 则讨论了参数激励与强迫激励联合作用下的非线性系统的分岔特性^[3]. Tang 等人则探讨了强非线性参数激励系统在亚谐共振下的分岔特性^[4], 等等^[5-10]. 然而, 他们都没有从分岔控制的角度对参数激励系统进行进一步分析. 本文设计了非线性分岔控制器对弱非线性参数激励系统在超谐

共振时进行分岔控制.

2. 非线性参数控制器

考虑弱非线性参数激励系统

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x + 2\varepsilon\mu_1\dot{x} + \varepsilon\tilde{\mu}_2|x|\dot{x} \\ + \varepsilon\alpha_1x^3 + \varepsilon\alpha_2x^2\ddot{x} + \varepsilon\alpha_3x\dot{x}^2 \\ = \varepsilon xF\cos\Omega t + \mu(x, \dot{x}, t), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 ε 为小参数, μ_1 为阻尼系数, $\tilde{\mu}_2$ 为空气阻尼系数, α_i 为常数, F 和 Ω 分别是外激励的幅值和频率. 而 $\mu(x, \dot{x}, t)$ 就是要求设计的非线性参数分岔控制器.

当 $\mu(x, \dot{x}, t) = 0$ 时, 方程(1)将退化为非线性参数激励振动系统, 它的稳态响应会产生鞍结分岔, 导致跳跃和滞后现象的产生, 而这些是不希望发生的. 在这里, 设计一个适当的非线性参数控制器, 使得系统发生超谐共振时, 不产生鞍结分岔, 从而消除跳跃和滞后现象. 分岔控制的一个难点就是要求所用的控制器不能改变分岔的存在性, 而这一要求通常是通过首先满足不改变不动点的存在性而达到的. 很多常规的控制器都不满足这个要求, 因为它们大都是按稳定性原则来设计的. 因此, 在这里假设系统的非线性参数控制器为

$$\mu(x, \dot{x}, t) = -\varepsilon kx^3, \quad (2)$$

其中 k 为控制参数.

^{*} 湖南省自然科学基金(批准号 01JJY2007)资助的课题.

[†] E-mail: fuwenbin1974@yahoo.com.; 电话: 0731-8821506.

3. 超谐共振响应

对于 2 倍超谐共振, 外激励可以写成 $\Omega = 2 + \varepsilon\sigma$. σ 为调谐参数, 应用多尺度法^[11], 方程 (1) 的近似解可以写成

$$x = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \dots \quad (3)$$

其中 $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$. 那么外激励可以写成 $f \cos \Omega t = f \cos(\omega T_0 + \sigma T_1)$. 由典型的多尺度理论有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

将方程 (3) 代入方程 (1), 令 ε 的同次幂系数相等, 有

$$\begin{aligned} D_0^2 x_0 + x_0 &= 0, \\ D_0^2 x_1 + x_1 &= -2D_0 D_1 x_0 - 2\mu_1 D_0 x_0 \\ &\quad - \tilde{\mu}_2 [D_0 x_0 | D_0 x_0 - \alpha_1 x_0^3 \\ &\quad - \alpha_2 x_0^2 D_0^2 x_0 - \alpha_3 x_0 (D_0 x_0)^2 \\ &\quad + x_0 f \cos \Omega T_0 - k (D_0 x_0)^3], \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $D_0 = \partial/\partial T_0$, $D_1 = \partial/\partial T_1$. 方程 (5) 第一式的一阶近似解可以写成

$$x_0 = A(T_1) e^{iT_0} + \bar{A}(T_1) e^{-iT_0}. \quad (6)$$

将方程 (6) 代入方程 (5) 第二式, 为避免出现永年项, 有

$$\begin{aligned} 2i(D_1 A + \mu_1 A) + \frac{\tilde{\mu}_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_0 x_0| |D_0 x_0| e^{iT_0} dT_0 \\ + 8(\alpha_e + i\mu_3) A^2 \bar{A} - 2\bar{A} f e^{i\sigma T_1} \\ = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\alpha_e = \frac{1}{8}(3\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3),$$

$$\mu_3 = \frac{3}{8}k, f = \frac{F}{4}.$$

令 A 为极坐标形式

$$A = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\alpha(T_1)}. \quad (8)$$

将方程 (8) 代入方程 (7), 分离实部和虚部, 有解调方程

$$\begin{aligned} a' &= -\mu_1 a - \mu_2 a^2 - \frac{3k}{8} a^3 + a f \sin \gamma, \\ a\gamma' &= \sigma a - 2\alpha_3 a^3 + 2af \cos \gamma, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\gamma = \sigma T_1 - 2\beta$, $\mu_2 = \frac{4\tilde{\mu}_2}{3\pi}$.

4. 控制器的设计

控制器的设计依赖于对解调方程 (9) 的不动点的分析和稳定性分析. 因此, 令 $a' = 0$ 和 $\gamma' = 0$, 得到系统的稳态响应

$$\begin{aligned} \mu_1 a + \mu_2 a^2 + \mu_3 a^3 &= a f \sin \gamma, \\ -\sigma a + 2\alpha_e a^3 &= 2af \cos \gamma. \end{aligned} \quad (10)$$

由方程 (10) 得到系统的分岔控制方程

$$(\mu_1 + \mu_2 a + \mu_3 a^2)^2 + \left(\frac{1}{2}\sigma - \alpha_e a^2\right)^2 - f^2 = 0. \quad (11)$$

为便于进行稳定性分析, 令

$$A = \frac{1}{2}(p - iq) e^{\nu T_1}$$

其中 p, q 为实数, 且 $\nu = \frac{1}{2}\sigma$. 将上式代入方程 (7), 分离实部和虚部, 有

$$\begin{aligned} p' &= -\mu_1 p - \mu_2 p \sqrt{p^2 + q^2} - \mu_3 p(p^2 + q^2) \\ &\quad - \nu q + \alpha_e q(p^2 + q^2) + qf, \\ q' &= -\mu_1 q - \mu_2 q \sqrt{p^2 + q^2} - \mu_3 q(p^2 + q^2) \\ &\quad + \nu p - \alpha_e p(p^2 + q^2) + pf. \end{aligned} \quad (12)$$

平凡解的稳定性由特征根决定

$$\begin{vmatrix} -\mu_1 - \lambda & -\nu + f \\ \nu + f & -\mu_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (13)$$

即

$$\lambda = -\mu_1 \pm \sqrt{f^2 - \nu^2}. \quad (14)$$

平凡解的稳定性条件为

$$f \leq \sqrt{\mu_1^2 + \nu^2} \quad (f \text{ 为控制参数})$$

或

$$|\sigma| \geq \sqrt{f^2 - \mu_1^2} \quad (\sigma \text{ 为控制参数}).$$

5. 数值模拟

图 1 为参数激励系统在不同控制参数下的频响曲线. 其中参数 $\mu_1 = 0.01$, $\mu_2 = 0.01$, $\alpha_e = -0.2$, $f = 0.025$. 对于非控制开环系统 ($k = 0$), 当 $\sigma < \sigma_A$, 参数激励系统只存在平凡解, 并且是稳定的. 随着 σ 的增加, 系统的平凡解在通过跨临界分岔点 A 时丧失稳定性, 同时出现非平凡解. 并且随着 σ 的增加, 系统非平凡解的振幅随着增加. 当曲线经过鞍结分岔

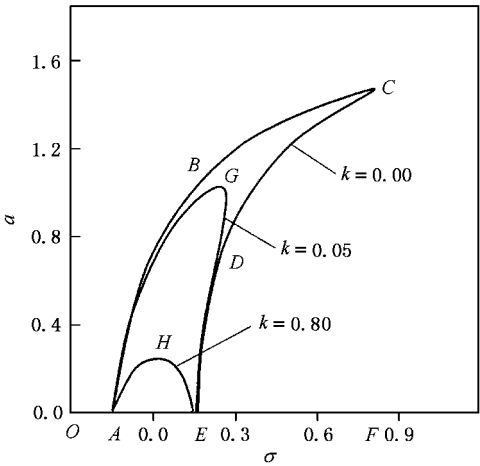


图1 参数激励控制系统的频响曲线

C 时, 振幅跳跃到 F 点, 并且丧失了稳定性, 只剩下平凡解. 当 σ 由大变小时, 分两种情况进行分析. 第一种情况: 初始激励很小时, 响应曲线为 DE , 然后通过跨临界分岔点 E . 随着 σ 减小, 振幅变大, 见图 2. 当曲线经过鞍结分岔点 N 时, 振幅由 H 点, 跳跃进入 B 点. 随着 σ 的进一步减小, 振幅沿着曲线 BA 减小, 达到跨临界分岔点 A , 然后进入直线 AO . 第二种情况: 当初始激励很大时, 系统将不会发生跳跃行为, 响应曲线为 $CBAO$. 要指出的是突出部分 CB 段为高幅振动.

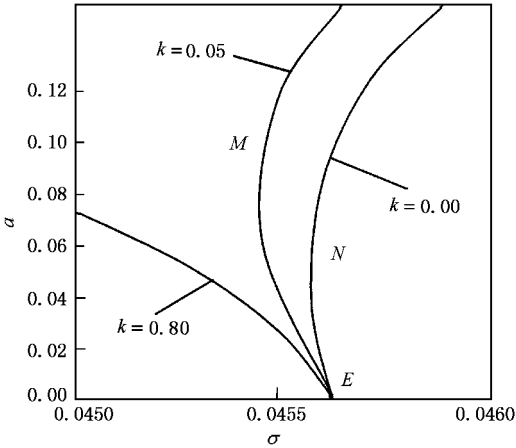


图2 频响曲线跨临界分岔点 E 区域示意图

接着讨论控制闭环系统, 即 $k \neq 0$. 考虑两种情况 $k = 0.05$ 和 $k = 0.8$. 对于第一种情况, 很明显, 它的频响曲线类似于非控制系统. 然而, 系统的振幅大大减小了, 鞍结分岔点由 C 点漂移到了 G 点(见图 1), 由 N 点漂移到了 M 点. 对于第二种情况, 频响曲

线的性质发生了完全的改变, 鞍结分岔完全消失了, 只剩下两个跨临界分岔点 A, E . 同时突出部分和跳跃现象也完全消失, 系统的振幅被大大的抑制, 振动曲线为 AHE .

图 3 是参数激励控制系统的外激励与响应的曲线图. 图 4 为跨临界分岔点区域附近放大图. 其中参数 $\sigma = -0.1, \mu_1 = 0.01, \mu_2 = 0.01, \alpha_e = -0.2$. 对于非控制开环系统, 即 $k = 0$, 当 $f < f_c$ 时, 系统只存在平凡解, 而且是稳定的. 随着系统 f 值的增加, 平凡解为直线 AB . 当 $f = f_B$ 时, 平凡解通过跨临界分岔点 B , 进入曲线 BJ (见图 4). 当 $f = f_j$ 时, 系统响应通过鞍结分岔点 J 进入 D 点(见图 3). 随着 f 值的进一步增加, 响应幅值继续沿曲线 DE 增加. 响应曲

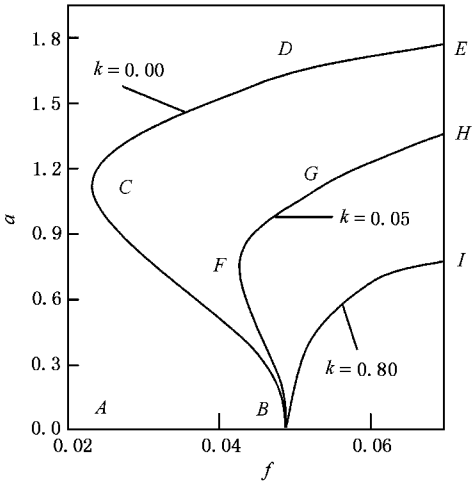


图3 参数激励控制系统的外激励与响应曲线图

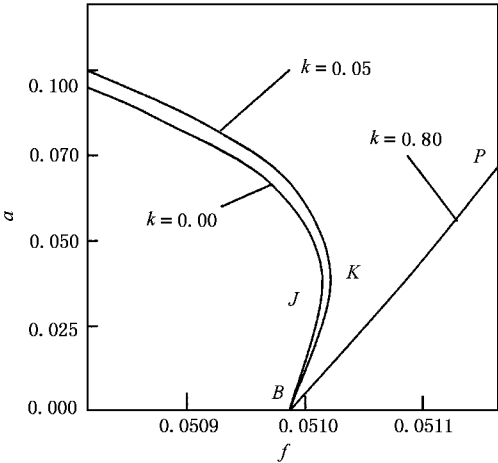


图4 外激励响应曲线跨临界分岔点 B 区示意图

线为 $ABJDE$. 同样, 随着 f 值由大变小, 响应曲线为

EDC. 然后通过鞍结分岔点 C 向下跳跃进入平凡解.

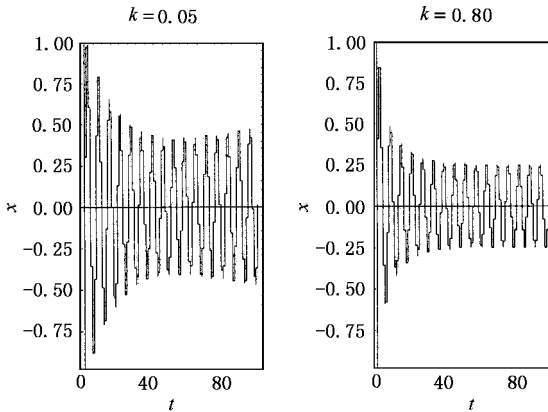


图5 参数激励系统在不同控制参数下的数值模拟时间历程图

现在分析在不同控制参数 $k = 0.05$ 和 $k = 0.8$ 作用下的外激励与响应的曲线图. 当 $k = 0.05$ 时, 控制系统的响应曲线与非控制系统是相似的, 分岔等动力学行为也是完全一样的. 只是鞍结分岔点的位置由 C, J 点漂移到了 F, K 点, 响应幅值减小. 当 $k = 0.8$ 时, 外激励与响应的曲线图发生了根本性的变化. 鞍结分岔完全消除了, 同时系统响应的幅值也大大变小了, 为曲线 BI .

为了验证摄动理论得到的结果, 对参数激励系统进行了数值模拟计算, 见图 5. 其中参数 $\mu_1 = 0.01$, $\mu_2 = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$, $\alpha_1 = -0.05$, $\alpha_2 = 0.0$, $\alpha_3 = 0.0$, $f = 0.1$, $\Omega = 2$. 控制参数分别为 $k = 0.05$, $k = 0.8$. 由图 5 可以明显看出系统 $k = 0.8$ 时的稳态响应要比 $k = 0.05$ 时小得多, 系统的稳态响应得到了抑制.

比较图 1 至图 5, 数值模拟结果与摄动理论得到的结果是一致的. 因此说明非线性控制器的设计是成功的, 有效的.

6. 结 论

本文设计了非线性状态反馈控制器对参数激励系统的 2 倍超谐共振进行控制. 对二阶非线性常微分参数激励模型进行了动力学分析, 设计了速度立方项的状态控制器. 利用多尺度方法将原系统分解为振幅和相位角的自治方程组. 通过对平均方程的频响曲线分析和分岔分析, 检验了控制器的效率. 分析表明, 非线性控制器有效的抑制了参数激励响应的振幅, 而且消除了系统的鞍结分岔, 优化了系统的动力学行为, 使得不再产生跳跃等有害的动力学行为.

- [1] Nayfeh A H and Mook D T 1979 *Nonlinear Dynamics* (New York: Wiley)
- [2] Bajaj A K 1987 *Int. J. Non-Linear Mechanics* **22** 47
- [3] Zhang W and Huo Q Z 1991 *Acta Mechanica Sinica* **23** 464
- [4] Tang J S, Fu W B and Li K A 2002 *Chin. Phys.* **11** 1004
- [5] Peng J H, Tang J S, Yu D J, Yan J R and Hai W H 2002 *Chin. Phys.* **11** 213
- [6] Hua C C and Lu Q S 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 408 (in Chinese)

- [化存才、陆启韶 1999 物理学报 **48** 408]
- [7] Luo X S 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 402 (in Chinese) [罗晓曙 1999 物理学报 **48** 402]
- [8] Ying Y J and Huang Z Q 2001 *Chin. Phys.* **10** 907
- [9] Tang G and Ma B K 2000 *Chin. Phys.* **9** 737
- [10] Tang G and Ma B K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 994 (in Chinese) [唐刚、马本堃 2002 物理学报 **51** 994]
- [11] Nayfeh A H 1973 *Perturbation Methods* (New York: Wiley)

Superharmonic resonance bifurcation control of parametrically excited system based on state feedback strategy^{*}

Fu Wen-Bin Tang Jia-Shi

(*Department of Engineering Mechanics , Hunan University , Changsha 410082 ,China*)

(Received 13 November 2003 ; revised manuscript received 8 January 2004)

Abstract

A nonlinear parametric feedback control is proposed to modify the steady-state resonance responses , thus to reduce the amplitude of the response and to eliminate the saddle-node bifurcations that take place in the resonance responses . The nonlinear gain of the feedback control is determined by analyzing the bifurcation function associated with the corresponding frequency-response equation and the Jacobian matrix . It is shown by illustrative examples that the proposed nonlinear feedback is effective for controlling superharmonic resonance responses .

Keywords : parametrically excited system , saddle-node bifurcation , bifurcation control , superharmonic resonance

PACC : 0547 , 1120D , 0260

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Hunan Province , China (Grant No. 01JJY2007) .