

基于全息聚焦机理空间光孤子的相互作用势函数^{*}

江金环[†] 李子平

(北京工业大学应用数理学院, 北京 100022)

(2003 年 10 月 8 日收到 2004 年 1 月 2 日收到修改稿)

利用变分法讨论了反向传输的基于全息聚焦机理空间光孤子的相互作用, 导出了相干和非相干相互作用的势函数. 当孤子间的相对相位不随传输距离变化或相对相位对传输距离的偏导数与孤子间距无关时, 相干和非相干相互作用势函数都与孤子间的相对相位无关, 出现孤子间反常相互作用, 这正好是近期文献的结果.

关键词: 空间光孤子, 相互作用, 变分原理

PACC: 4256J, 4265S

1. 引 言

空间光孤子相互作用由于在信号处理及全光开关方面有重要应用受到广泛关注^[1-11]. 空间孤子之间的相互作用分为相干相互作用和非相干相互作用^[4]. 1996 年, Shih 等^[12]对非相干碰撞过程进行了实验观测. 发现若两个光孤子之间互不相干或是其位相差之涨落远快于介质的响应, 那么它们之间无干涉效应, 中央重叠区的光强只能简单地叠加. 结果, 两个互不相干的光孤子总是相互吸引. 1997 年 Garcia-Quirino 等^[13]实验研究了光孤子之间的相干相互作用. 若两个孤子同相, 它们的中央重叠区光强相干叠加, 使得那里的折射率增大而等效地吸引两边的光孤子. 若两个孤子异相, 中央光强相消, 它们就会相互排斥. 然而, 1998 年 Krolikowski 等^[14]发现了介质中非相干孤子的反常相互作用. 理论和实验都表明非相干孤子间存在反常相互作用, 即两非相干孤子可以相互吸引, 也可以相互排斥; 2002 年, Cohen 等^[4]发现了相干孤子的反常相互作用, 即反向传输相干孤子的相互作用不依赖于两孤子的相对位相. 本文从基于全息聚焦机理空间光孤子耦合的非线性薛定谔方程出发, 用变分法^[15]讨论了文献^[4]中孤子间的相互作用, 导出了两孤子相干和非相干相互作用的势函数. 当孤子间的相对相位不随传输距离变化或相对相位对传输距离的偏导数与孤子

间距无关时, 相干和非相干相互作用势函数都与孤子间的相对相位无关, 出现孤子间反常相互作用, 即文献^[4]的结果.

2. 空间光孤子间的相互作用

描述反向传输的基于全息聚焦机理空间光孤子耦合的经典非线性薛定谔方程为^[4,16]

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + |u_1|^2 u_1 \\ &= - (1 + h) |u_2|^2 u_1, \\ & - i \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + |u_2|^2 u_2 \\ &= - (1 + h) |u_1|^2 u_2, \end{aligned} \quad (1)$$

式中 u_i ($i = 1, 2$), z, x 分别为归一化光孤子包络函数、传输距离和横向坐标; $h = 1$ ($h = 0$) 为相干(非相干)相互作用. 当 $h \neq 0$ 时, 系统(1)是不可积的^[4], 只能给出近似解. 方程(1)的形式解为^[16]

$$u_1 = A_1 \operatorname{sech}[A_1(x - x_1)] e^{ik_1(x - x_1) + i\theta_1}, \quad (2)$$

$$u_2 = A_2 \operatorname{sech}[A_2(x - x_2)] e^{ik_2(x - x_2) + i\theta_2}, \quad (3)$$

式中参数 A_j, x_j, k_j, θ_j ($j = 1, 2$) 分别代表孤子的幅值、中心位置、传播常数和位相, 它们都是传输距离 z 的待求函数.

相应方程(1)所描述系统的 Lagrange 密度可以表示为

$$L = L_1 + L_2 + L_{12}, \quad (4)$$

^{*} 北京工业大学校青年基金(批准号 JQ0607200370)资助的课题.

[†] E-mail: jiangh@bjut.edu.cn 电话: 87391737.

其中

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2} i \left(u_1^* \frac{\partial u_1}{\partial z} - u_1 \frac{\partial u_1^*}{\partial z} \right) \\ &\quad - \left| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} |u_1|^4, \\ L_2 &= -\frac{1}{2} i \left(u_2^* \frac{\partial u_2}{\partial z} - u_2 \frac{\partial u_2^*}{\partial z} \right) \\ &\quad - \left| \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} |u_2|^4, \\ L_{12} &= (1+h) u_1 u_1^* u_2 u_2^*, \end{aligned} \quad (5)$$

这里 L_{12} 为相互作用的 Lagrange 密度. 其正确性可通过由变分原理

$$\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L \left(u_j, \frac{\partial u_j}{\partial z}, \frac{\partial u_j}{\partial x}; u_j^*, \frac{\partial u_j^*}{\partial z}, \frac{\partial u_j^*}{\partial x} \right) dx dz = 0, \quad (6)$$

导出的 Euler-Lagrange 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_j} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{j,z}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{j,x}} \right) &= 0, \\ \frac{\partial L}{\partial u_j^*} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{j,z}^*} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{j,x}^*} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

即为方程(1)而得到验证. (7)式中的两个方程互为共扼方程.

作用量为

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle L \rangle dz, \quad (8)$$

其中 $\langle L \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} L dx$ 为 Lagrange 量. 由(2)–(5)式, 经计算得

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= 2A_1 \left(k_1 \frac{\partial x_1}{\partial z} - \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) + A_1 \left(\frac{1}{3} A_1^2 - k_1^2 \right) \\ &\quad - 2A_2 \left(k_2 \frac{\partial x_2}{\partial z} - \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) + A_2 \left(\frac{1}{3} A_2^2 - k_2^2 \right) \\ &\quad + 4(1+h) A_1^2 A_2^2 \\ &\quad \times \left\{ \frac{(x_2 - x_1) \cosh[A_2(x_2 - x_1)]}{\sinh^3[A_2(x_2 - x_1)]} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_2(x_2 - x_1)]} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

在计算积分时利用了用留数定理得到的公式

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2 x \cosh^2(bx - a)} dx \\ = 4 \left\{ \frac{a \cosh a}{b \sinh^3 a} - \frac{1}{\sinh^2 a} \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

(10)式在 $b = A_2/A_1 \approx 1$ 才成立.

由最小作用量原理导出的所有参变量函数 $P =$

$\{A_j, x_j, k_j, \theta_j\}$ 服从的 Euler-Lagrange 方程, 即为如下的一阶常微分方程组^[15]

$$\frac{\delta I}{\delta P} = 0 \Rightarrow \frac{d \langle L \rangle}{dP} - \frac{d}{dz} \left(\frac{d \langle L \rangle}{d(P/dz)} \right) = 0. \quad (11)$$

把(9)式代入(11)式, 可以得到 8 个孤子参数演化的联立方程组

$$\begin{aligned} 4(1+h) A_1^2 A_2^2 \frac{d}{dx_1} \left\{ \frac{(x_2 - x_1) \cosh[A_2(x_2 - x_1)]}{\sinh^3[A_2(x_2 - x_1)]} \right. \\ \left. - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_2(x_2 - x_1)]} \right\} = \frac{d}{dz} (2A_1 k_1), \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} 4(1+h) A_1^2 A_2^2 \frac{d}{dx_2} \left\{ \frac{(x_2 - x_1) \cosh[A_2(x_2 - x_1)]}{\sinh^3[A_2(x_2 - x_1)]} \right. \\ \left. - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_2(x_2 - x_1)]} \right\} = \frac{d}{dz} (-2A_2 k_2), \end{aligned} \quad (12b)$$

$$2A_1 \frac{dx_1}{dz} - 2A_1 k_1 = 0, \quad (13a)$$

$$-2A_2 \frac{dx_2}{dz} - 2A_2 k_2 = 0; \quad (13b)$$

$$\frac{d}{dz} (2A_1) = 0, \quad (14a)$$

$$\frac{d}{dz} (2A_2) = 0; \quad (14b)$$

$$\begin{aligned} A_1^2 + k_1^2 - 2 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \frac{d}{dA_1} \left\{ 4(1+h) A_1^2 A_2^2 \right. \\ \times \left[\frac{(x_2 - x_1) \cosh[A_2(x_2 - x_1)]}{\sinh^3[A_2(x_2 - x_1)]} \right. \\ \left. - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_2(x_2 - x_1)]} \right] \left. \right\} = 0, \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} A_2^2 + k_2^2 + 2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{d}{dA_2} \left\{ 4(1+h) A_1^2 A_2^2 \right. \\ \times \left[\frac{(x_2 - x_1) \cosh[A_2(x_2 - x_1)]}{\sinh^3[A_2(x_2 - x_1)]} \right. \\ \left. - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_2(x_2 - x_1)]} \right] \left. \right\} = 0. \end{aligned} \quad (15b)$$

3. 结果讨论

由(14)式可以看出, 两孤子幅值保持不变. 由(12)和(13)式, 可得

$$\begin{aligned} 2(1+h) A_2^2 A_1 \frac{d}{dx_1} \left\{ \frac{(x_2 - x_1) \cosh[A_2(x_2 - x_1)]}{\sinh^3[A_2(x_2 - x_1)]} \right. \\ \left. - \frac{1}{A_1 \sinh^2[A_2(x_2 - x_1)]} \right\} = \frac{d^2 x_1}{dz^2}, \end{aligned} \quad (16a)$$

$$2(1+h) A_1^2 A_2 \frac{d}{dx_2} \left\{ \frac{(x_2 - x_1) \cosh[A_2(x_2 - x_1)]}{\sinh^3[A_2(x_2 - x_1)]} \right.$$

$$-\frac{1}{A_1 \sinh^2 [A_2 (x_2 - x_1)]} \Big\} = \frac{d^2 x_2}{dz^2}. \quad (16b)$$

由上式可以得到关于孤子间距 $r (= x_2 - x_1)$ 的运动方程

$$\frac{d^2 r}{dz^2} - 2(1 + h)(A_1 + A_2)A_1 A_2 \frac{d}{dr} \times \left\{ \frac{r \cosh [A_2 r]}{\sinh^3 [A_2 r]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2 [A_2 r]} \right\} = 0. \quad (17)$$

从而可得空间光孤子之间由于相互作用而引起的势函数

$$V(r) = -2(1 + h)(A_1 + A_2)A_1 A_2 \times \left\{ \frac{r \cosh [A_2 r]}{\sinh^3 [A_2 r]} - \frac{1}{A_1 \sinh^2 [A_2 r]} \right\}. \quad (18)$$

图 1 是相干相互作用的势函数随孤子间距的变化曲线 ($A_1 = A_2 = 1, h = 1$) 图 2 是非相干相互作用的势函数随孤子间距的变化曲线 ($A_1 = A_2 = 1, h = 0$). 由于势函数总是负值, 所以反向传输的两空间孤子总是相互吸引 (不管相干相互作用还是非相干相互作用). 从 (15) 式可以看出, 当 $\partial(\theta_2 - \theta_1)/\partial z$ 为常数或与孤子间距 r 无关时, 相干和非相干相互作用势函数 (18) 与孤子间的相对相位无关, 出现孤子间反常相互作用, 即文献 [4] 的结果. 对比两图, 可以看出, 相干相互作用比非相干相互作用强, 且当两孤子间距大于 4 时, 相互作用几乎为零, 可以忽略.

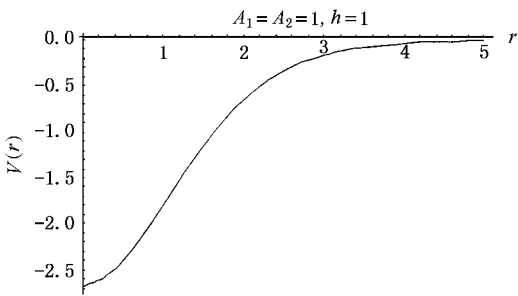


图 1 相干相互作用势函数随孤子间距的变化曲线

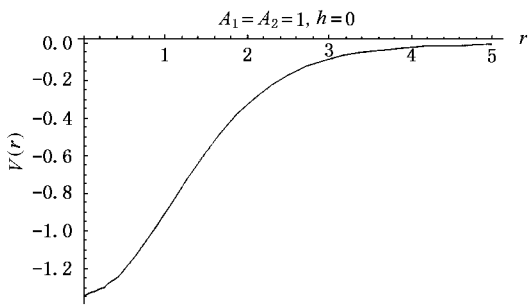


图 2 非相干相互作用势函数随孤子间距的变化曲线

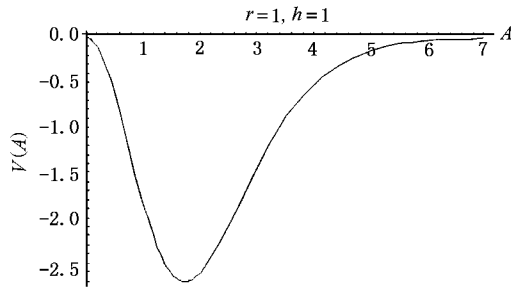


图 3 相干相互作用势函数随入射孤子幅值的变化曲线

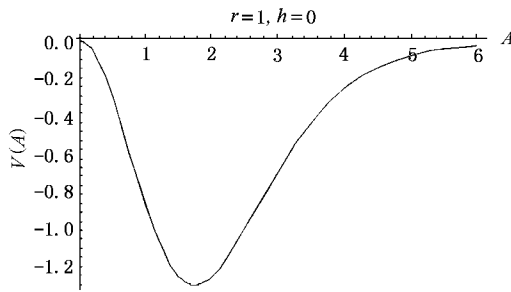


图 4 非相干相互作用势函数随入射孤子幅值的变化曲线

当孤子的入射振幅改变时, 相互作用势函数会相应改变. 图 3 为相干相互作用的势函数随入射孤子幅值的变化曲线 ($r = 1, h = 1, A_1 = A_2 = A$) 图 4 为非相干相互作用的势函数随入射孤子幅值的变化曲线 ($r = 1, h = 0, A_1 = A_2 = A$).

[1] Shi T T and Chi S 1990 *Opt. Lett.* **15** 1123

[2] Luther-Davies B and Yang X 1992 *Opt. Lett.* **17** 498

[3] Firth W J and Scroggie A J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1623

[4] Cohen O *et al* 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 133901

[5] She W L and Li R J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 886 (in Chinese) [余卫龙、李荣基 2001 物理学报 **50** 886]

[6] Hao Z H and Liu J S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 818 (in Chinese) [郝中华、刘劲松 2002 物理学报 **51** 818]

[7] Ouyang S G and She W L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 767 (in Chinese) [欧阳世根、余卫龙 2004 物理学报 **53** 767]

[8] He G G, Wang X S and She W L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2270 (in Chinese) [何国岗、王晓生、余卫龙 2002 物理学报 **51** 2270]

[9] Liu J S and Zhang D Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 880 (in Chinese) [刘劲松、张都应 2001 物理学报 **50** 880]

[10] Hou C F, Li S Q, Li B and Sun D X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1709 (in Chinese) [侯春风、李师群、李斌、孙东秀 2001 物理学报 **50** 1709]

- [11] Liu J S 2001 *Chin. Phys.* **10** 1037
- [12] Shih M and Segev M 1996 *Opt. Lett.* **21** 1538
- [13] Garcia-Quirino S *et al* 1997 *Opt. Lett.* **22** 154
- [14] Krolkowski W, Saffman M, Luther-Davies B and Denz C 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 3240
- [15] Zhong W P and Huang H 1995 *Acta Opt. Sin.* **15** 202 (in Chinese)
[钟卫平、黄 辉 1995 光学学报 **15** 202]
- [16] Haelterman M, Sheppard A P and Snyder A W 1993 *Opt. Commu.* **103** 145

Interaction potential between spatial optical solitons based on holographic focusing mechanism^{*}

Jiang Jin-Huan[†] Li Zi-Ping

(College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

(Received 8 October 2003 ; revised manuscript received 2 January 2004)

Abstract

The interactions between spatial optical solitons based on holographic focusing mechanism propagating in opposite directions are studied by means of variational method. It is shown that the coherent interactions are insensitive to relative phase between two beams in some cases, and this is just the result of the recent paper.

Keywords : spatial optical solitons, interaction, variational approach

PACC : 4256J, 4265S

^{*} Project supported by the Youth Foundation of Beijing University of Technology (Grant No. JQ0607200370).

[†] E-mail : jiangh@bjut.edu.cn ; Tel : 867391737.