

完整系统三阶 Lagrange 方程的一种推导与讨论

马善钧 徐学翔 黄沛天 胡利云

(江西师范大学物理与通信电子学院, 南昌 330027)

(2004 年 2 月 13 日收到 2004 年 3 月 8 日收到修改稿)

从牛顿运动方程出发, 推导了完整系统关于广义加速度的 Lagrange 方程, 讨论了该方程与传统分析力学中的 Lagrange 方程的相容性问题. 结果显示, 三阶 Lagrange 方程可以通过对 Lagrange 方程求一阶时间导数得到, 表明它们是相容的. 因此三阶 Lagrange 方程提供了一种不同于传统 Lagrange 方程方法的求解物体运动方程的途径.

关键词: Lagrange 方程, 加速度能量, 广义坐标

PACC: 0320

1. 引言

物理学中描述各类运动的运动方程, 基本上都是二阶微分方程. 最常见的就是在研究机械运动时, 引进了位矢、位矢的一阶时间导数和二阶时间导数. 通过对大量实验事实的总结归纳, 得到了牛顿运动定律. 应用牛顿定律得到的描述物体运动的微分方程就是时间的二阶微分运动方程. 对牛顿运动方程, 如果已知物体的受力及初始条件, 就可以解得物体运动的位移随时间的变化. 但对于变加速运动, 如果已知的不是物体所受的外力, 而是物体所受外力随时间的变化率, 此时就不能单纯根据牛顿运动方程解得物体的运动轨迹. 换言之, 我们不能在仅知道力随时间的变化率的情况下, 用对时间的二阶微分方程加初始条件来求解物体的运动状态. 另一方面, 现实世界中各种动力学问题都是属于变力问题, 有时只能知道力随时间的变化率(即力变率). 因此, 找到一种利用力变率来求解物体运动状态方程的方法, 就显得较为重要.

人们在研究力变率及含有位矢的三阶时间导数的运动方程中, 已做了一些工作. Schof^[1]介绍了加速度的时间变化率(即急动度)的概念. Zhu^[2]从数学上探讨了质点作空间曲线运动时加速度、急动度的一般表示形式. Tan 等人^[3]则具体给出了急动度在各种坐标系中的表示, 并在一些具体的实例中讨论了它的应用及意义. Mei 等人^[4-6]给出了完整系统关于广义速度的 Lagrange 方程, 该方程即本文讨论的完整系统关于广义加速度的 Lagrange 方程. Wu^[7]则

利用与牛顿力学的类比, 得到了猝量方程. Huang 等人^[8]讨论了猝量方程和加速度能定理的一些具体应用问题. 所有这些都表明, 研究力变率及加速度随时间的变化率的问题以及它们所满足的方程, 具有一定的现实意义. 本文即由牛顿运动方程出发, 导出了完整系统关于广义加速度的 Lagrange 方程. 虽然人们也曾在“广义经典力学”的意义上得到过含广义加速度的 Euler-Lagrange 方程^[9], 但它本质上仍然是关于广义力的二阶微分方程, 未能描述力(或加速度)随时间变化的细节. 而完整系统关于广义加速度的 Lagrange 方程是关于广义力变率的三阶微分方程, 是描述力(或加速度)随时间变化细节的方程.

2. 完整系统关于广义加速度的 Lagrange 方程的导出

考虑一个由 N 个质点组成的体系, 对第 i 个质点的牛顿运动方程等号两边同时对时间求一阶导数, 然后移项, 得

$$(\dot{\mathbf{F}}_i - m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = 0, \quad (1)$$

式中 $\mathbf{F}_i$ 为质点 i 受到的所有的作用力(包含约束力)的合力. 用每一个质点的虚位移 $\delta \mathbf{r}_i$ 标乘(1)式, 并对 i 求和, 有

$$\sum_i (\dot{\mathbf{F}}_i - m_i \dot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2)$$

引入 s 个广义坐标 q_α ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) 则

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_\alpha, t), \quad \delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha. \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式,可得

$$-\sum_i \sum_a m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_a} \delta q_a + \sum_i \sum_a \dot{\mathbf{F}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_a} \delta q_a = 0, \quad (4)$$

式中等号左边第一项可通过以下方式进行化简:

$$P_a = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_a} = \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \left(\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_a} \right) \right] - \sum_i m_i \left(\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_a} \right). \quad (5)$$

由(3)式中 $\mathbf{r}_i$ 的表示形式,可求得

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_a \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_\beta \sum_a \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_a} \dot{q}_a \dot{q}_\beta + \sum_a \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_a} \ddot{q}_a + \sum_\beta \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta \partial t} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t^2}. \quad (7)$$

由(6),(7)式可得

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_a}, \quad \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{q}_a} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_a}. \quad (8)$$

将(8)式代入(5)式,得

$$P_a = \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \left(\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{q}_a} \right) \right] - \sum_i m_i \left(\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{q}_a} \right). \quad (9)$$

继续将(9)式等号右边第二项化简,有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_a} \right) &= \sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_a} \right) \dot{q}_\beta + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_a} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left[\sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \right] \dot{q}_\beta \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left[\sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma \right) \right] \dot{q}_\beta \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left[\frac{1}{2} \sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma \right) \dot{q}_\beta \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma \right) \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \sum_\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left[\sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma \right) \dot{q}_\beta \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma \right) \Big] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left[\sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma \right) \dot{q}_\beta \right] \\ &\quad + \sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \dot{q}_\beta \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \Big] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left[\sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \dot{q}_\beta \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\gamma} \dot{q}_\gamma + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \Big] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left[\sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta} (\dot{\mathbf{r}}_i) \dot{q}_\beta + \frac{\partial}{\partial t} (\dot{\mathbf{r}}_i) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} (\ddot{\mathbf{r}}_i). \quad (10) \end{aligned}$$

将(10)式代入(9)式,可得

$$P_a = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_a} \left(\frac{1}{2} \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^2 \right) \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left(\frac{1}{2} \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^2 \right). \quad (11)$$

令

$$S = \frac{1}{2} \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^2$$

为系统的加速度能量,将(11)式代入(4)式,有

$$\sum_a \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_a} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_a} + \sum_i \dot{\mathbf{F}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_a} \right] \delta q_a = 0. \quad (12)$$

又令

$$Q_a^* = \sum_i \dot{\mathbf{F}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_a},$$

对于完整系统, $q_1 \dots q_s$ 相互独立,由(12)式最后可得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_a} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_a} = Q_a^* \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s). \quad (13)$$

(13)式就是描述物体变加速运动的三阶微分方程,方程中包含了力变率 $\dot{\mathbf{F}}_i$.它在形式上与力学中的 Lagrange 方程很相似,也可称之为三阶 Lagrange 方程.它使我们在处理物体运动时,特别是在已知力变率 $\dot{\mathbf{F}}_i$ 时,又多了一种得到运动方程的方法.

3. 三阶 Lagrange 方程与 Lagrange 方程的相容性

(13) 式得到的三阶 Lagrange 方程与分析力学中的 Lagrange 方程应该是相容的, 即用(13)式和分析力学中的 Lagrange 方程处理同一个力学问题, 得到的运动方程应该可以经过适当的数学运算, 化为相同的描述该力学问题的运动方程. 否则(13)式就是不正确的. 事实上, 将利用 Lagrange 方程得到的运动方程等号两边同时对时间 t 求一阶导数, 即可得到与用三阶 Lagrange 方程得到的相同的运动方程. 对此结论, 本文将给出证明. 由分析力学可知, Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha$$

$$\left(T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2, \quad Q_\alpha = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right). \quad (14)$$

考虑(6)式的结果, 有

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \sum_i m_i \left\{ \left[\sum_\beta \sum_\alpha \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \ddot{q}_\alpha + 2 \sum_\beta \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta \partial t} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t^2} \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} + \left[\sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right] \times \left[\sum_\beta \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial t} \right] \right\}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_i m_i \left[\sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right] \times \left[\sum_\beta \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_\alpha} \right]. \quad (16)$$

将(15)、(16)式代入(14)式, 等号两边对时间 t 求一阶导数, 得

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_i m_i \left[\sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \ddot{q}_\alpha + 2 \sum_\beta \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta \partial t} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t^2} \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right\}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right), \quad (17)$$

式中已考虑了(8)式的结果.

另一方面, 由 S 的定义和(8)式的结果, 可得

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\alpha} = \sum_i m_i \left[\sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right]$$

$$+ 2 \sum_\beta \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta \partial t} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

$$= \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \left[2 \sum_\beta \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_\alpha} \right]. \quad (19)$$

将(18)式代入(13)式, 并与(17)式比较, 可知当

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i \left[\dot{\mathbf{F}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \right] \quad (20)$$

成立时, Lagrange 方程(14)对时间 t 求一阶导数, 就得到三阶 Lagrange 方程. 对(20)式化简后, 得

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_i \dot{\mathbf{F}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right)$$

$$= \sum_i 2 \mathbf{F}_i \cdot \left[\sum_\beta \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_\alpha} \right]$$

$$= \sum_i 2 m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \left[\sum_\beta \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta \partial q_\alpha} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha \partial t} \right], \quad (21)$$

式中已利用了 $\mathbf{F} = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$ 的结论. 此式与(19)式的结果相同, 由此可知(14)式等号两边对时间 t 求一阶导数, 即可得到三阶 Lagrange 方程(13). 这就普遍性地证明了三阶 Lagrange 方程与分析力学中的 Lagrange 方程相容, 没有任何内在矛盾.

4. 讨 论

三阶 Lagrange 方程(13)和 Lagrange 方程都可以用来描述物体运动规律的运动方程, 但它们的出发点不同. 当已知物体受力的力变率, 利用三阶 Lagrange 方程来求物体的运动方程就较为方便. 相反, 当已知物体的受力情况, 利用 Lagrange 方程求物体的运动方程就容易一些. 因此, 三阶 Lagrange 方程是对 Lagrange 方程的一个有力的补充.

尽管利用(13)式可以得到物体的运动方程, 但一般情况下, 得到运动方程的过程及得到的运动方程并不一定比用 Lagrange 方程得到的过程和方程简单方便. 但如果物体受常力作用(即 $\dot{\mathbf{F}} = 0$)时, 不管此力是否为保守力, (13)式将得到较为简单的形式,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\alpha} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0. \quad (22)$$

这将使我们较易求得方程的解.

[1]

Schot S H 1978 *Am. J. Phys.* **46** 1090

[2]

Zhu M 1983 *Mech. Practice* **5** 48 (in Chinese) [朱 明 1983 力学与实践 **5** 48]

[3]

Tan K F , Zhao Y K and Guo X D 1988 *Mech. Practice* **10** 46 (in Chinese) [谈开孚、赵永凯、郭小弟 1988 力学与实践 **10** 46]

[4]

Mei F X , Liu D and Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing : Beijing Institute of Technology Press)(in Chinese) [梅凤翔、刘 端、罗 勇 1991 高等分析力学 (北京 北京理工大学出版社)]

[5]

Mei F X and Shang M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1901 (in Chinese)

[6]

Chen X W , Shang M and Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 997

[7]

Shen H C 2000 *Physics* **29** 743 (in Chinese) [沈惠川 2000 物理 **29** 743]

[8]

Huang P T , Huang W and Hu L Y 2003 *J. Jiangxi Normal Univ.* **27** 8 (in Chinese) [黄沛天、黄 文、胡利云 2003 江西师范大学学报 **27** 8]

[9]

Goldstein H 1986 *Classical Mechanics* (Beijing : Science Press)(in Chinese) [戈德斯坦 H 1986 经典力学 (第二版) (北京 : 科学出版社)]

The discussion on Lagrange equation containing third order derivatives

Ma Shan-Jun Xu Xue-Xiang Huang Pei-Tian Hu Li-Yun

(College of Physics and Communication Electronics , Jiangxi Normal University , Nanchang 330027 , China)

(Received 13 February 2004 ; revised manuscript received 8 March 2004)

Abstract

In this paper , the third order Lagrange equation is obtained , by which can be obtained motion equation of a body . This equation contains third order rate of change of generalized coordinates and the rate of change of force . In addition , the third order Lagrange equation and the fradtional Lagrange equation are used to solve the same problem of the motion of a body , and their results are discussed . Finally , it is pointed out that the third order Lagrange equation provides a method of obtaining equation of motion which is different from that of the traditional Lagrange equation .

Keywords : Lagrange equation , energy of acceleration , generalized coordinates

PACC : 0320