

非谐振子 Gazeau-Klauder 与 Klauder-Perelomov 相干态

程衍富[†]

(中南民族大学物理系, 武汉 430074)

(2003 年 9 月 26 日收到 2004 年 2 月 16 日收到修改稿)

利用 Kinani-Daoud 方法构造了非谐振子势的 Gazeau-Klauder (GK) 相干态和 Klauder-Perelomov (KP) 相干态, 表明两种相干态在非线性谐振子势下具有完全不同的形式, 并对两种相干态的完备性以及各自构成的 Hilbert 空间进行了讨论. 对相干态的 Mandel Q 参数的研究表明: GK 相干态服从亚 Poisson 统计分布, KP 相干态服从超 Poisson 统计分布.

关键词: 非谐振子, Gazeau-Klauder 相干态, Klauder-Perelomov 相干态

PACC: 0365, 4250

1. 引 言

自从 Schrödinger 引入谐振子相干态以来, 关于相干态的研究已经成为当今物理学研究的重要内容^[1,2]. 1996 年, Klauder 引入了两个参量的相干态^[3], 即所谓 Gazeau-Klauder 相干态 (简称 GK 相干态)^[4], 进一步丰富了相干态的应用范围. GK 相干态适用于任意的量子系统, 传统的谐振子相干态只是 GK 相干态第二实参量为零时的特例. GK 相干态方法已被应用到多个量子系统^[5,6]. 在两参量相干态中, 广义 Klauder-Perelomov 相干态 (简称 KP 相干态) 又是一类不同于 GK 形式的相干态. 最近 Kinani 和 Daoud^[7]对任意量子系统的这两种相干态提出了一个一般的构造方法, 并研究了无限深势阱和非线性谐振子势的广义相干态. 另一方面, 非谐振子模型在物理学很多领域扮演着重要角色. 该模型被用来研究相干光与非线性介质相互作用的量子相位涨落^[8]、压缩光的产生^[9]等等. 两参量非谐振子相干态的研究将进一步丰富广义相干态的内容, 揭示非谐振子的深刻特性. 本文将按 Kimani 和 Daoud^[7,10]方法构造非谐振子 GK 相干态和 KP 相干态, 讨论这两种相干态的基本性质和非经典特性.

2. 非谐振子 GK 相干态

设系统的哈密顿量 H 为非简并, 且有分立能级 e_n , 基态能量 $e_0 = 0$, $e_0 < e_1 < e_2 \dots$, H 的态 $|\psi_n\rangle$ 正交且满足

$$H|\psi_n\rangle = e_n|\psi_n\rangle. \quad (1)$$

系统的哈密顿量 H 能分解为

$$H = A^+ A^-, \quad (2)$$

A^+ 和 A^- 分别为产生和湮没算符, 它们作用在态矢 $|\psi_n\rangle$ 上, 有

$$A^-|\psi_n\rangle = \sqrt{e_n} e^{i\alpha(e_n - e_{n-1})} |\psi_{n-1}\rangle, \quad (3)$$

$$A^+|\psi_n\rangle = \sqrt{e_{n+1}} e^{-i\alpha(e_{n+1} - e_n)} |\psi_{n+1}\rangle, \quad (4)$$

式中 α 为实参数, A^- 和 A^+ 的对易关系为

$$[A^-, A^+] = \alpha(N), \quad (5)$$

$\alpha(N)$ 作用在态矢 $|\psi_n\rangle$ 上, 满足

$$\alpha(N)|\psi_n\rangle = (e_{n+1} - e_n)|\psi_n\rangle, \quad (6)$$

算符 $N \neq A^+ A^- = H$, 且满足对易关系:

$$[A^-, N] = A^-, \quad [A^+, N] = -A^+. \quad (7)$$

所谓 GK 相干态定义为湮没算符 A^- 的本征态. 用 $|z, \alpha\rangle$ 表示 GK 相干态, 则它满足本征值方程

$$A^-|z, \alpha\rangle = z|z, \alpha\rangle, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (8)$$

方程 (8) 的解为

[†] E-mail: chengyf@scuec.edu.cn

$$|z, \alpha\rangle = \mathcal{N}(|z|) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n e^{-i\alpha e_n}}{\sqrt{E(n)}} |\psi_n\rangle, \quad (9)$$

函数 $E(n)$ 定义为

$$E(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ e_1 e_2 \dots e_n, & n \neq 0, \end{cases} \quad (10)$$

$\mathcal{N}(|z|)$ 为归一化常数, 取 $\langle z, \alpha | z, \alpha \rangle = 1$, 可得

$$\mathcal{N}(|z|) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2n}}{E(n)} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

可见相干态表达式 (9) 为复平面 z 上的连续函数. 在演化算符作用下相干态具有时间稳定性

$$e^{-iHt} |z, \alpha\rangle = |z, \alpha + t\rangle. \quad (12)$$

哈密顿量 H 在该相干态下的主值为

$$z, \alpha | H | z, \alpha\rangle = |z|^2. \quad (13)$$

GK 相干态还可写为演化算符 $U(z)$ 作用在基态上

$$|z, \alpha\rangle = U(z) | \phi_0 \rangle, \quad (14)$$

$$U(z) = \exp\left(z \frac{N}{H} A^+\right). \quad (15)$$

$U(z)$ 并不是么正算符, 也不是 KP 意义上的位移算符, 因此 GK 相干态也就不是 KP 相干态.

在旋波近似下的非谐振子哈密顿量 H 为 (取 $\omega = \hbar = 1$)

$$H = a^+ a + \lambda a^{+2} a^2, \quad (16)$$

λ 为正的常数, H 作用在 $|\psi_n\rangle = |n, \lambda\rangle$ 上, 有

$$H |n, \lambda\rangle = e_n |n, \lambda\rangle, \quad (17)$$

而

$$e_n = \lambda n(n + \nu), \quad (18)$$

式中 $\nu = (1 - \lambda)/\lambda > 0$, 下降和上升算符作用在 $|n, \lambda\rangle$ 上, 有

$$A^- |n, \lambda\rangle = \sqrt{\lambda n(n + \nu)} e^{i\alpha(2n + \nu - 1)} |n - 1, \lambda\rangle, \quad (19)$$

$$A^+ |n, \lambda\rangle = \sqrt{(n + 1)(\lambda n + 1)} e^{-i\alpha(2\lambda n + 1)} |n + 1, \lambda\rangle, \quad (20)$$

$$[A^+, A^-] = \alpha(N), \quad \alpha(N) = 2\lambda N + 1, \quad (21)$$

$|n, \lambda\rangle$ 可由 A^+ 作用在基态 $|0, \lambda\rangle$ 上产生, 即

$$|n, \lambda\rangle = \frac{(A^+)^n}{\sqrt{E(n)}} e^{i\alpha n(n + \nu)} |0, \lambda\rangle, \quad (22)$$

式中

$$E(n) = \prod_{i=1}^n [\lambda i(n + \nu)] = \frac{\lambda^n n! \Gamma(n + \nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1)} \quad (23)$$

则非谐振子 GK 相干态表达式为

$$|z, \alpha\rangle = \mathcal{N}(|z|) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n e^{-i\alpha n(n + \nu)}}{\sqrt{\lambda^n n! \Gamma(n + \nu + 1) \Gamma(\nu + 1)}} |n, \lambda\rangle, \quad (24)$$

$\mathcal{N}(|z|)$ 为归一化常数. 如令 $\zeta = z/\sqrt{\lambda}$, 则上式可化为

$$|\zeta, \alpha\rangle = \mathcal{N}(|\zeta|) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta^n e^{-i\alpha n(n + \nu)}}{\sqrt{n! \Gamma(n + \nu + 1) \Gamma(\nu + 1)}} |n, \lambda\rangle. \quad (25)$$

归一化常数为

$$[\mathcal{N}(|\zeta|)]^{-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\zeta|^{2n} \Gamma(\nu + 1)}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} = (|\zeta|)^{-\nu} \Gamma(\nu + 1) \mathcal{I}_\nu(2|\zeta|) \quad (26)$$

$\mathcal{I}_\nu(x)$ 为第一类变形 Bessel 函数^[11].

下面研究相干态的基本性质. 很明显, 相干态表达式 (24) 为复平面 z 上的连续函数. 同时利用关系式 (20), 有

$$\left(\frac{A^+}{N + \nu}\right)^n |0, \lambda\rangle = \frac{\lambda^{n/2} \sqrt{n! \Gamma(\nu + 1)}}{\Gamma(n + \nu + 1)} e^{-i\alpha e_n} |n, \lambda\rangle, \quad (27)$$

则相干态 $|z, \alpha\rangle$ 可表示为

$$|z, \alpha\rangle = \exp\left(\frac{z A^+}{\lambda(N + \nu)}\right) |0, \lambda\rangle. \quad (28)$$

GK 相干态为非正交性的,

$$\begin{aligned} \langle \zeta, \alpha | \zeta', \alpha \rangle &= \left(\frac{|\zeta| |\zeta'|}{\zeta \zeta'} \right)^{\nu/2} \\ &\times \frac{\mathcal{I}_\nu(2\sqrt{\zeta \zeta'})}{\sqrt{\mathcal{I}_\nu(2|\zeta|) \mathcal{I}_\nu(2|\zeta'|)}}. \end{aligned} \quad (29)$$

取测度 $d\mu(\zeta) = [N(|\zeta|)]^{-2} \hbar(r^2) r dr d\phi$, 而 $\zeta = r e^{i\phi}$, $\hbar(\zeta)$ 满足的方程为^[7]

$$\int_0^\infty \hbar(\zeta) \zeta^n d\zeta = \frac{E(n)}{\pi} = \frac{\lambda^n \Gamma(n + 1) \Gamma(n + \nu + 1)}{\pi \Gamma(n + 1)}. \quad (30)$$

利用积分公式^[11]

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty K_\nu(at) t^{-\chi} dt \\ &= \frac{\Gamma(\nu - \chi + 1) \Gamma(2) \Gamma(-\nu - \chi + 1) \Gamma(2)}{2^{\chi+1} a^{-\chi+1}} \end{aligned} \quad (31)$$

式中取 $a = 2\sqrt{\lambda}$, $-\chi = 2n + \nu + 1$, 则有

$$\int_0^\infty K_\nu(2\zeta) \zeta^{2n + \nu + 1} d\zeta = \frac{1}{4} \Gamma(n + \nu + 1) \Gamma(n + 1), \quad (32)$$

式中 $\zeta = t/\sqrt{\lambda}$, $K_\nu(x)$ 为第二类变形 Bessel 函数. 比较 (30) 与 (32) 式, 有

$$\hbar(\zeta) = \frac{4\lambda^n}{\pi \Gamma(\nu + 1)} K_\nu(2\zeta) \zeta^{n + \nu + 1}, \quad (33)$$

那么 GK 相干态的完备性为

$$\int |\zeta, \alpha\rangle \langle \zeta, \alpha| d\mu(\zeta) = I = \sum_{n=0}^{\infty} |n, \lambda\rangle \langle n, \lambda|. \quad (34)$$

非谐振子 GK 相干态构成完备的 Hilbert 空间, 对任意态函数 $|\varphi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} d_n |n, \lambda\rangle$, 在此相干态表象中, 有

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta, \alpha) &= \frac{1}{N(|\zeta|)} \langle \zeta, \alpha | \varphi \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n \zeta^n e^{i\alpha\lambda(n+\nu)}}{\sqrt{n! \Gamma(n+\nu+1) \Gamma(\nu+1)}}. \end{aligned} \quad (35)$$

很明显, 态矢 $|n, \lambda\rangle$ 在此相干态表象中的波函数为

$$\psi_n(\zeta, \alpha) = \frac{\zeta^n e^{i\alpha\lambda(n+\nu)}}{\sqrt{n! \Gamma(n+\nu+1) \Gamma(\nu+1)}}. \quad (36)$$

同时算符 A^- , A^+ 和 $G(N)$ 作用在此 Hilbert 空间的函数上, 作为如下微分方程:

$$\begin{aligned} A^+ &= z, \quad A^- = z \frac{d^2}{dz^2} + (\nu+1) \frac{d}{dz}, \\ G(N) &= 2\lambda z \frac{d}{dz} + 1, \end{aligned} \quad (37)$$

可证明 A^- , A^+ 和 $G(N)$ 作用在 $\psi_n(\zeta, \alpha)$ 上, 有

$$A^- \psi_n(\zeta, \alpha) = \sqrt{\lambda n(n+\nu)} e^{i\alpha\lambda(2n+\nu-1)} \psi_{n-1}(\zeta, \alpha), \quad (38)$$

$$A^+ \psi_n(\zeta, \alpha) = \sqrt{(n+1)\lambda(n+1)} e^{-i\alpha\lambda(2n+1)} \psi_{n+1}(\zeta, \alpha), \quad (39)$$

$$G(N) \psi_n(\zeta, \alpha) = (2\lambda n + 1) \psi_n(\zeta, \alpha). \quad (40)$$

此三式与 (19)–(21) 式相同.

在 $\lambda \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow \infty$) 条件下

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ \nu \rightarrow \infty}} \lambda^n \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} &= 1, \\ \mathcal{N}(|z|) &= \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (41)$$

GK 相干态表达式 (25) 可化为

$$|z, \alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\alpha n} |n, 0\rangle, \quad (42)$$

即两参数的谐振子相干态.

下面考察非谐振子 GK 相干态的 Mandel Q 参数和二阶相关函数. Mandel Q 参数定义为

$$Q = \frac{N^2}{N} - 1. \quad (43)$$

当 $Q > 0$ 时, 光场呈超 Poisson 分布, 当 $Q = 0$ 时, 光场呈 Poisson 分布, 当 $Q < 0$ 时, 光场呈亚 Poisson 分布, 为非经典特性. 二阶相关函数为

$$g^{(2)}(0) = \frac{N^2}{N^2} - \frac{N}{N^2}. \quad (44)$$

当 $g^{(2)}(0) < 1$ 时, 量子态呈反聚束效应, 当 $g^{(2)}(0) > 1$ 时, 量子态呈聚束效应.

利用 (25) 式, 有

$$\langle \zeta, \alpha | N | \zeta, \alpha \rangle = \frac{|\zeta|^2 \Gamma_{\nu+1}(2|\zeta|)}{\Gamma_{\nu}(2|\zeta|)}, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \langle \zeta, \alpha | N^2 | \zeta, \alpha \rangle &= \frac{|\zeta|^2 \Gamma_{\nu+2}(2|\zeta|) + |\zeta|^2 \Gamma_{\nu+1}(2|\zeta|)}{\Gamma_{\nu}(2|\zeta|)} \\ &= \frac{|\zeta|^2 \Gamma_{\nu+2}(2|\zeta|) + |\zeta|^2 \Gamma_{\nu+1}(2|\zeta|)}{\Gamma_{\nu}(2|\zeta|)}. \end{aligned} \quad (46)$$

则

$$Q = |\zeta|^2 \frac{\Gamma_{\nu+2}(2|\zeta|) \Gamma_{\nu}(2|\zeta|) - \Gamma_{\nu+1}^2(2|\zeta|)}{\Gamma_{\nu+1}^2(2|\zeta|)}, \quad (47)$$

$$g^{(2)}(0) = \frac{\Gamma_{\nu+2}(2|\zeta|) \Gamma_{\nu}(2|\zeta|)}{\Gamma_{\nu+1}^2(2|\zeta|)}. \quad (48)$$

利用公式^[11]

$$\frac{z^2}{4} \{J_{\nu-1}^2(z) - J_{\nu-2}(z) J_{\nu}(z)\} = \sum_{n=0}^{\infty} (\nu + 2n) J_{\nu+2n}^2(z)$$

及

$$I_m(z) = i^{-m} J_m(iz), \quad (49)$$

得

$$\Gamma_{\nu+2}(2|\zeta|) \Gamma_{\nu}(2|\zeta|) \leq \Gamma_{\nu+1}^2(2|\zeta|), \quad (50)$$

式中 $|\zeta| \rightarrow \infty$ 时, 等号成立. 可见非谐振子 GK 相干态在 $\lambda \neq 0$ ($|\zeta| = |z|/\sqrt{\lambda} < \infty$) 时, $Q < 0$, 光场呈亚 Poisson 统计, $g^{(2)}(0) < 1$, 呈反聚束效应. 当 $\lambda \rightarrow 0$ ($|\zeta| \rightarrow \infty$) 时, $Q = 0$, $g^{(2)}(0) = 1$, 满足一般谐振子相干态条件. 注意这里 Mandel Q 参数和二阶相关函数 $g^{(2)}(0)$ 都与第二实参量 α 无关.

3. 非谐振子 KP 相干态

任意量子系统的 KP 相干态定义为

$$|z, \alpha\rangle = \exp(\alpha A^+ - \bar{\alpha} A^-) |\psi_0\rangle. \quad (51)$$

利用下降和上升算符 A^- , A^+ 的特性, 有^[7]

$$|z, \alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} z^n c_n(|z|) \sqrt{E(n)} e^{-i\alpha e_n} |\psi_n\rangle, \quad (52)$$

式中 $c_n(|z|)$ 定义为

$$c_n(|z|) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-|z|^2)^j}{(n+2j)!} \pi(n+1, j), \quad (53)$$

而

$$\pi(n+1, j) = \sum_{i_1=1}^{n+1} e_{i_1} \sum_{i_2=1}^{i_1-1} e_{i_2} \cdots \sum_{i_j=1}^{i_{j-1}-1} e_{i_j},$$

且

$$\pi(n+1, 0) = 1, \quad (54)$$

π 满足下列关系:

$$\pi(n+1, j) - \pi(n, j) = e_{n+1} \pi(n+2, j-1). \quad (55)$$

使用上述循环关系, 可得 $c_n(|z| = r)$ 满足的微分方程为

$$r \frac{dc_n(r)}{dr} = c_{n-1}(r) - nc_n(r) - e_{n+1} r^2 c_{n+1}(r). \quad (56)$$

对非谐振子, $e_n = \lambda n(n + \nu)$, 取 $\xi = \sqrt{\lambda} z$, 则相干态为

$$|\xi, \alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n c_n(|\xi|) \sqrt{F(n)} e^{-i\alpha e_n} |n, \lambda\rangle, \quad (57)$$

式中

$$F(n) = \prod_{i=1}^n i(i + \nu) = \frac{\Gamma(n + \nu + 1)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(\nu + 1)}, \quad (58)$$

那么

$$\begin{aligned} \pi(n+1, j) &= \sum_{i_1=1}^{n+1} e'_{i_1} \sum_{i_2=1}^{i_1+1} e'_{i_2} \cdots \sum_{i_j=1}^{i_{j-1}+1} e'_{i_j}, \\ e'_n &= \frac{e_n}{\lambda} = n(n + \nu). \end{aligned} \quad (59)$$

由(55)式, 有

$$\begin{aligned} \pi(n+1, j) - \pi(n, j) \\ = (n+1)(n + \nu + 1) \pi(n+2, j-1). \end{aligned} \quad (60)$$

利用(56)式, 可得 $c_n(|\xi|)$ 满足的微分方程为

$$\begin{aligned} |\xi| \frac{dc_n(|\xi|)}{d|\xi|} \\ = c_{n-1}(|\xi|) - (n+1)(n + \nu + 1) |\xi|^2 c_{n+1}(|\xi|). \end{aligned} \quad (61)$$

再取

$$c_n(|\xi|) = A_n(|\xi|) (n! |\xi|^n),$$

则 $A_n(|\xi|)$ 满足的方程为

$$\begin{aligned} \frac{dA_n(|\xi|)}{d|\xi|} \\ = nA_{n-1}(|\xi|) - (n + \nu + 1)A_{n+1}(|\xi|). \end{aligned} \quad (62)$$

此方程的解为

$$A_n(|\xi|) = \frac{(\sinh(|\xi|))^n}{(\cosh(|\xi|))^{n+\nu+1}}. \quad (63)$$

如再令

$$\zeta = \xi \tanh(|\xi|) / |\xi|,$$

则相干态表达式可化为

$$\begin{aligned} |\zeta, \alpha\rangle &= (1 - |\zeta|^2)^{-(\nu+1)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{\sqrt{n!}} \\ &\times \left[\frac{\Gamma(n + \nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1)} \right]^{1/2} e^{-i\alpha e_n} |n, \lambda\rangle. \end{aligned} \quad (64)$$

再来考察 KP 相干态的基本性质, 若取测度

$$d\mu(\zeta) = \frac{\nu d^2 \zeta}{\pi(1 - |\zeta|^2)^2},$$

则 KP 相干态有完备性

$$\int |\zeta, \alpha\rangle \langle \zeta', \alpha'| d\mu(\zeta) = I = \sum_{n=0}^{\infty} |n, \lambda\rangle \langle n, \lambda|. \quad (65)$$

KP 相干态 $|\zeta, \alpha\rangle$ 的非正交性为

$$\begin{aligned} \langle \zeta', \alpha' | \zeta, \alpha \rangle \\ = \sqrt{(1 - |\zeta|^2)^{\nu+1} (1 - |\zeta'|^2)^{\nu+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta \bar{\zeta}')^n}{n!} \\ \times \left[\frac{\Gamma(n + \nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1)} \right]^{1/2} e^{-(\alpha' - \alpha)\lambda(n + \nu)}, \end{aligned} \quad (66)$$

即 KP 相干态 $|\zeta, \alpha\rangle$ 构成完备的 Hilbert 空间, 任意态函数可用此相干态表象表示.

设任意态函数

$$|\varphi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n |n, \lambda\rangle,$$

在此相干态表象中, 有

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta, \alpha) &= (1 - |\zeta|^2)^{-(\nu+1)/2} \langle \zeta', \alpha' | \varphi \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \left[\frac{\Gamma(n + \nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1)} \right]^{1/2} b_n e^{i\alpha e_n}. \end{aligned} \quad (67)$$

作为特例, 态矢 $|n, \lambda\rangle$ 在此相干态表象中的波函数为

$$\psi_n(\zeta, \alpha) = \zeta^n \left[\frac{\Gamma(n + \nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1)} \right]^{1/2} e^{i\alpha e_n}. \quad (68)$$

同时算符 A^- , A^+ 和 $G(N)$ 作用在此 Hilbert 空间的函数上, 作为如下微分方程:

$$A^- = \sqrt{\lambda} \frac{d}{d\zeta}, \quad A^+ = \sqrt{\lambda} \left[\zeta^2 \frac{d}{d\zeta} + (\nu + 1)\zeta \right],$$

$$G(N) = 2\lambda \zeta \frac{d}{d\zeta} + 1, \quad (69)$$

明显与 GK 相干态算符微分方程(37)完全不同. 与 GK 相干态一样, A^- , A^+ 和 $G(N)$ 作用在 $\psi_n(\zeta, \alpha)$ 上, 有

$$A^- \psi_n(\zeta, \alpha) = \sqrt{\lambda n(n + \nu)} e^{i\alpha(2n + \nu - 1)} \psi_{n-1}(\zeta, \alpha), \quad (70)$$

$$A^+ \psi_n(\zeta, \alpha) = \sqrt{(n + 1)(n + \nu + 1)} e^{-i\alpha(2n + 1)} \psi_{n+1}(\zeta, \alpha), \quad (71)$$

$$G(N) \psi_n(\zeta, \alpha) = (2\lambda n + 1) \psi_n(\zeta, \alpha). \quad (72)$$

在 $\lambda \rightarrow 0$ ($\nu \rightarrow \infty$) 条件下, 由 (41) 式和

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \nu \rightarrow \infty}} (1 - |\zeta|^2)^{\frac{\nu+1}{2}} = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right), \quad (73)$$

方程 (64) 可化为

$$|z\rangle_\alpha = \exp\left(-\frac{|z|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\alpha n} |n\rangle_0, \quad (74)$$

即两参数谐振子相干态.

与 GK 相干态类似, 现考察 KP 相干态的 Mandel Q 参数和二阶相关函数 $g^{(2)}(0)$.

$$\zeta_\alpha |N\rangle_\alpha, \zeta = \frac{|\zeta|^2(\nu+1)}{1-|\zeta|^2}, \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \zeta_\alpha |N^2\rangle_\alpha, \zeta &= \frac{|\zeta|^4(\nu+1)(\nu+2)}{1-|\zeta|^2} \\ &+ \frac{|\zeta|^2(\nu+1)}{1-|\zeta|^2}, \end{aligned} \quad (76)$$

则 Mandel Q 参数为

$$Q = \frac{N^2 - N^2 - N}{N} = \frac{|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}. \quad (77)$$

因为 $|\zeta| = |\tanh(\sqrt{\lambda}|z|)|$, 故当 $\lambda \neq 0$ 时, $|\zeta| < 1$, $Q > 0$, KP 相干态呈超 Poisson 统计分布. 而当 $\lambda = 0$ 时, $|\zeta| = 0$, $Q = 0$, KP 相干态回到了谐振子相干态情况. 二阶相关函数为

$$\begin{aligned} g^{(2)}(0) &= \frac{(\nu+2)(1-|\zeta|^2)}{\nu+1} \\ &= \frac{1+\lambda}{\cosh^2(\sqrt{\lambda}|z|)}. \end{aligned} \quad (78)$$

可见, 二阶相关函数 $g^{(2)}(0)$ 是参数 λ 和相干态变量 $|z|$ 的函数. 当 $g^{(2)}(0) < 1$ 时, 量子态呈反聚束效应, 此时 λ 和 $|z|$ 满足 $|z| > \ln(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda+1})/\sqrt{\lambda}$. 为直观起见, 在给定 λ 的条件下, $g^{(2)}(0)$ 与 $|z|$ 的关系图, 如图 1 所示.

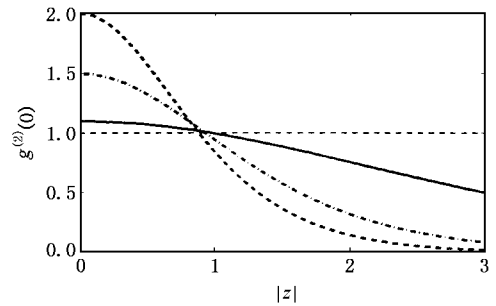


图 1 $g^{(2)}(0)$ 与 $|z|$ 的关系 $\lambda = 0$ (—) 0.5 (---) 1 (····)

由图 1 可知, 当 $|z|$ 较大时, $g^{(2)}(0) < 1$, 量子态呈反聚束效应, 当 $|z|$ 较小时, $g^{(2)}(0) > 1$, 量子态呈聚束效应, $g^{(2)}(0) = 1$ 对应的条件为

$$|z| = \ln(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda+1})/\sqrt{\lambda}.$$

这是通常的谐振子相干态的结果.

4. 总 结

运用 Kinani-Daoud 方法构造了非谐振子的 GK 相干态和 KP 相干态, 这两种相干态具有完全不同的表述形式, 两种相干态各自构成自己完备的 Hilbert 空间. 在 $\lambda \rightarrow 0$ (即 $\nu \rightarrow \infty$) 的条件下, 两种相干态表述都回到一般谐振子相干态表述. 有趣的是两种相干态服从不同的统计分布, GK 相干态的 Mandel Q 参数 $Q < 0$, 二阶相关函数 $g^{(2)}(0) < 1$, 即 GK 相干态服从亚 Poisson 统计分布和反聚束效应. KP 相干态的 Mandel Q 参数 $Q > 0$, 则其服从超 Poisson 统计分布. KP 相干态的二阶相关函数 $g^{(2)}(0)$ 则是 λ 和 $|z|$ 的函数, 当 $|z|$ 较大时, $g^{(2)}(0) < 1$, 量子态呈反聚束效应, 当 $|z|$ 较小时, $g^{(2)}(0) > 1$, 量子态呈聚束效应.

- [1] Klauder J R and Skagerstam B S 1985 *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics* (Singapore: World Scientific)
- [2] Ni Z X 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1687 [in Chinese] 倪致祥 1997 *物理学报* **46** 1687
- [3] Klauder J R 1996 *J. Phys. A* **29** L293
- [4] Gazeau J P and Klauder J R 1999 *J. Phys. A* **32** 123
- [5] Antoine J P, Gazeau J P, Monceau P, Klauder J R and Penson K A 2001 *J. Math. Phys.* **42** 2349

- [6] Roy B and Roy P 2002 *Phys. Lett. A* **296** 187
- [7] Kinani A H and Daoud M 2002 *Int. J. Mod. Phys. B* **16** 3915
- [8] Gerry C C 1987 *Opt. Commun.* **63** 278
- [9] Tanas R 1989 *Phys. Lett. A* **141** 217
- [10] Kinani A H and Daoud M 2001 *Phys. Lett. A* **283** 291
- [11] Wang Z X and Guo D R 1979 *An Introduction to Special Function* (Beijing: Science Press) pp412—494 [in Chinese] [王竹溪、郭敦仁 1979 *特殊函数概论* (北京: 科学出版社) 第 412—494 页]

Gazeau-Klauder and Klauder-Perelomov coherent states for the anharmonic oscillator

Cheng Yan-Fu

(*Department of Physics, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074, China*)

(Received 26 September 2003 ; revised manuscript received 16 February 2004)

Abstract

Using the Kinani-Daoud method we have constructed the Gazeau-Klauder (GK) and Klauder-Perelomov (KP) coherent states for the anharmonic oscillator. It is shown that the two types of coherent states have totally different forms in their expressions. We have also discussed the resolution of unity of the two coherent states and the Hilbert space of each state. The study of Mandel Q parameter of the states shows that GK coherent state coincides with the sub-Poissonian and KP coherent state coincides with the super-Poissonian statistical distributions.

Keywords : anharmonic oscillator , Gazeau-Klauder coherent state , Klauder-Perelomov coherent state

PACC : 0365 , 4250