

非傍轴矢量高斯光束的圆屏衍射^{*}

刘普生¹⁾ 吕百达^{1)2)†}

¹⁾ (四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

²⁾ (华中科技大学激光技术国家重点实验室, 武汉 430074)

(2003 年 12 月 29 日收到 2004 年 2 月 23 日收到修改稿)

利用矢量瑞利衍射积分公式, 推导出非傍轴矢量高斯光束圆屏衍射的解析表示式. 非傍轴矢量高斯光束圆屏衍射的轴上场分布、远场表示式、自由空间中的传输公式, 以及傍轴近似下高斯光束圆屏衍射的非涅耳和夫琅禾费衍射公式可以作为一般公式的特例统一处理. 数值计算和比较实例说明了非傍轴矢量高斯光束的光强分布和远场特性. 分析表明, 在圆屏衍射中, f 参数和截断参数决定光束的非傍轴行为.

关键词: 传输光学, 非傍轴矢量高斯光束, 圆屏衍射, 矢量瑞利衍射积分公式

PACC: 4200

1. 引言

1975 年, Lax 等人^[1]指出在波动光学中使用的傍轴近似会导致理论上的不自洽或‘佯谬’. 近年来, 对束宽与波长可相比拟的强聚焦光束和有大发散角光束的研究促进了非傍轴光学研究的进展, 但限于讨论非傍轴光束在自由空间中的传输行为^[2-11], 在实际工作中却常需考虑光阑的存在对光传输的影响. 最近, 我们对非傍轴高斯光束的圆孔衍射^[12]作了讨论, 但因使用了稳相法, 所得结果只适用于分析光束的渐近行为, 即远场特性. 众所周知, 圆屏衍射曾是光波动性的一个重要判决实验. 本文从矢量瑞利衍射积分公式出发, 对非傍轴矢量高斯光束的圆屏衍射作了较为严格的分析, 推导出一般的解析传输公式. 非傍轴矢量高斯光束圆屏衍射的轴上场分布、远场表示式和自由空间中的传输公式等都可以从一般公式直接得到. 用数值计算实例对非傍轴矢量高斯光束圆屏衍射的光强分布和远场特性作了说明, 由此得出了 f 参数和截断参数是在圆屏衍射问题中决定光束非傍轴行为的两个关键参数的重要结论.

2. 非傍轴矢量高斯光束的圆屏衍射理论

设在源平面 $z=0$ 处有一场为 $E = E_x(x_0, y_0, 0)i + E_y(x_0, y_0, 0)j$, 沿 x 方向线偏振高斯光束,

$$E_x(x_0, y_0, 0) = \exp\left(-\frac{x_0^2 + y_0^2}{2w_0^2}\right), \quad (1a)$$

$$E_y(x_0, y_0, 0) = 0, \quad (1b)$$

i, j 分别为 x, y 方向的单位矢量, w_0 为束腰宽度. 在 $z=0$ 平面置一半径为 a 的圆屏, 其透过率函数为

$$T(x_0, y_0) = \begin{cases} 0 & x_0^2 + y_0^2 < a^2, \\ 1 & \text{其他}, \end{cases} \quad (2)$$

高斯光束通过圆屏后的场为

$$E_x(x_0, y_0, 0) = T(x_0, y_0) \exp\left(-\frac{x_0^2 + y_0^2}{2w_0^2}\right), \quad (3a)$$

$$E_y(x_0, y_0, 0) = 0. \quad (3b)$$

一般地, 光传输可用 Dirichlet 边界条件下的矢量瑞利衍射积分公式描写, 它给出在 $z>0$ 半空间中严格的场分布公式为^[13]

$$E_x(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_x(x_0, y_0, 0) \frac{\partial G(r, r_0)}{\partial z} dx_0 dy_0, \quad (4a)$$

^{*} 华中科技大学激光技术国家重点实验室基金(批准号: 0101)和国家高技术研究发展计划(批准号 2003AA823070)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: badal@scu.edu.cn

$$E_y(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_y(x_0, y_0, 0) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial z} dx_0 dy_0, \quad (4b)$$

$$E_z(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[E_x(x_0, y_0, 0) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial x} + E_y(x_0, y_0, 0) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial y} \right] dx_0 dy_0, \quad (4c)$$

其中 $\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j}$, $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, $\mathbf{k}$ 为 z 方向的单位矢量,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{\exp(\mathrm{i}k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad (5)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \approx r + \frac{x_0^2 + y_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0}{2r}, \quad (6)$$

其中 $k = 2\pi/\lambda$ 为波数. 将(3), (5), (6)式代入(4)式, 化直角坐标 (x, y, z) 为柱坐标 (ρ, θ, z) , 并利用 Bessel 函数展开式^[14]

$$J_0(v) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{v^{2m}}{2^{2m} (m!)^2}, \quad (7)$$

$$J_1(v) = \frac{v}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{v^{2m}}{2^{2m} (m!) (m+1)!} \quad (8)$$

(m 为求和指标), 经冗长但直接的积分计算, 最后结果可整理为

$$E_x(x, y, z) = \mathrm{i}k \frac{z}{r} \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m+1} (m!)^2} \times \frac{k^{2m}}{g^{m+1}} h^{2m} \Gamma(1+m, -a^2 g), \quad (9a)$$

$$E_y(x, y, z) = 0, \quad (9b)$$

$$E_z(x, y, z) = -\mathrm{i}k \frac{x}{r} \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m+1} (m!)^2} \times \frac{k^{2m}}{g^{m+1}} h^{2m} \Gamma(1+m, -a^2 g) - k \frac{x}{r^2} \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m+2} m! (m+1)!} \times \frac{k^{2m+1}}{g^{m+2}} h^{2m} \Gamma(2+m, -a^2 g), \quad (9c)$$

其中 $J_0(\cdot)$, $J_1(\cdot)$ 分别为零阶和一阶 Bessel 函数, $\Gamma(\cdot)$ 为不完全伽马函数, $g = \mathrm{i}k/(2r) - 1/(2w_0^2)$, $h = (x^2 + y^2)^{1/2}/r$. (9) 式为非傍轴矢量高斯光束通过圆屏衍射的一般公式, 对近场和远场都适用, 是本文的主要解析结果. 尽管式中含有不完全伽马函数的无穷级数, 但因收敛很快, 在数值计算中一般取前 10 项就可以得到与取更多项一致的结果. (9) 式表明: 沿 x 方向线偏振的矢量高斯光束经圆屏衍射后, 其

y 分量仍为零, 但出现了纵向 z 分量; 光束参数 k , w_0 和屏参数 a 对 E_x, E_z 分量都有影响. 场的横向分量 E_x 具有旋转对称性, 而 E_z 却不具有这种对称性.

下面对(9)式的一些重要特例作分析.

2.1. 圆屏衍射的轴上场分布

令 $x = y = 0$, 则(9)式化为

$$E_x(x, y, z) = \frac{\mathrm{i}k}{2t} \frac{\exp(\mathrm{i}kz)}{z} \exp(a^2 t), \quad (10a)$$

$$E_y(x, y, z) = 0, \quad (10b)$$

$$E_z(x, y, z) = 0, \quad (10c)$$

其中

$$t = \frac{\mathrm{i}k}{2z} - \frac{1}{2w_0^2}. \quad (11)$$

从(10)式知, 轴上场只有 x 方向分量, 而 y 和 z 方向分量为零.

2.2. 圆屏衍射的远场分布

在远场近似

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \approx r - \frac{xx_0 + yy_0}{r} \quad (12)$$

下, (9)式化为

$$E_{xf}(x, y, z) = \mathrm{i} \frac{z}{kr} \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2^m (m!)^2} \frac{1}{f^{2m+2}} \times h^{2m} \Gamma\left(1+m, \frac{\delta^2}{2}\right), \quad (13a)$$

$$E_{yf}(x, y, z) = 0, \quad (13b)$$

$$E_{zf}(x, y, z) = \mathrm{i} \frac{x}{kr} \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2^m (m!)^2} \frac{1}{f^{2m+2}} \times h^{2m} \Gamma\left(1+m, \frac{\delta^2}{2}\right) - \frac{x}{k^2 r^2} \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^m m! (m+1)!} \times \frac{1}{f^{m+4}} h^{2m} \Gamma\left(2+m, \frac{\delta^2}{2}\right), \quad (13c)$$

其中

$$f = \frac{1}{kw_0} \quad (f \text{ 参数}), \quad (14)$$

$$\delta = \frac{a}{w_0} \quad (\text{截断参数}). \quad (15)$$

由(13)式知, f 参数和截断参数 δ 是决定圆屏衍射光束非傍轴行为的两个重要参数.

2.3. 自由空间传输

令圆屏半径 $a \rightarrow 0$, (9)式成为

$$E_x(x, y, z) = \frac{ikz}{2gr} \frac{\exp(ikr)}{r} \exp\left(\frac{h^2 k^2}{4g}\right), \quad (16a)$$

$$E_y(x, y, z) = 0, \quad (16b)$$

$$E_z(x, y, z) = -\frac{ikx}{2gr} \frac{\exp(ikr)}{r} \times \exp\left(\frac{h^2 k^2}{4g}\right) \left(1 - i \frac{k}{2gr}\right). \quad (16c)$$

进一步,用远场近似(12)式,则(16)式化为

$$E_{xf}(x, y, z) = -ikw_0^2 \frac{z}{r} \frac{\exp(ikr)}{r} \times \exp\left(-\frac{1}{2f^2} \frac{x^2 + y^2}{r^2}\right), \quad (17a)$$

$$E_{yf}(x, y, z) = 0, \quad (17b)$$

$$E_{zf}(x, y, z) = ikw_0^2 \frac{x}{r} \frac{\exp(ikr)}{r} \times \exp\left(-\frac{1}{2f^2} \frac{x^2 + y^2}{r^2}\right) \left(1 + i \frac{kw_0^2}{r}\right). \quad (17c)$$

(16)式表明,光束参数 k, w_0 , 或换言之, f 参数决定自由空间中传输光束的非傍轴行为.

2.4. 傍轴高斯光束的圆屏衍射

作傍轴近似

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \approx z + \frac{x_0^2 + y_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0}{2z} \quad (18)$$

和傍轴条件下的远场近似

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \approx z - \frac{xx_0 + yy_0}{z}, \quad (19)$$

将(18), (19)式分别代入(9), (13)式,得到

$$\begin{aligned} E_p(x, y, z) &= E_{px}(x, y, z) \\ &= ik \frac{\exp(ikz)}{z} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m+1}} \frac{1}{(m!)^2} \frac{k^{2m}}{t^{m+1}} \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)^m \\ &\times \Gamma(1 + m, -a^2 t), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} E_{pf}(x, y, z) &= E_{pff}(x, y, z) \\ &= i \frac{\exp(ikz)}{kz} \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right] \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2^m (m!)^2} \frac{1}{f^{2m+2}} \left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)^m \\ &\times \Gamma\left(1 + m, \frac{\delta^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

(20), (21)式分别为傍轴高斯光束圆屏衍射的菲涅耳衍射公式和夫琅禾费衍射公式. 在傍轴近似下,相对于光场的横向分量,其纵向分量很小^[6],所以忽略了. 顺便指出, (6), (12)式分别与(18), (19)式的重

要差别是(6), (12)式中等号右边的 r 不能用 z 取代, 对于本文所用(6), (12)式在非傍轴情况下的合理性,可以直接对(4)和(9)式作数值积分比较得到证实.

3. 数值计算与分析

为了说明本文所得理论结果的物理意义,作了大量数值计算,图1和图2给出典型计算结果. 图1为圆屏衍射非傍轴矢量高斯光束在 $z = 20z_R$ (瑞利长度 $z_R = kw_0^2/2$) 处 x 方向的光强分布. 图1中 $I = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$, $I_z = |E_z|^2$, $I_p = |E_p|^2$. 由图1(a)知,当 $f = 0.1$, $\delta = 0.5$ 时,由(9)和(20)式计算的光强 $I(x, 0, 20z_R)$ 与 $I_p(x, 0, 20z_R)$ 一致,且 $I_z(x, 0, 20z_R)$ 可忽略. 图1(b)中 $f = 0.5$, $\delta = 0.5$ 时, $I_p(x, 0, 20z_R)$ 与 $I(x, 0, 20z_R)$ 相差较大, $I_z(x, 0, 20z_R)$ 也较大,随 f 增加,傍轴近似已不成立. 图1(c)给出 $f = 0.5$, $\delta = 1.2$ 的结果. 与图1(b)比较,随截断参数 δ 的增大, $I(x, 0, 20z_R)$ 与 $I_p(x, 0, 20z_R)$ 的差异减小, $I_z(x, 0, 20z_R)$ 也减小. 此外,为了证实使用(6)式得到(9)式的正确性,图1中还同时给出直接利用矢量瑞利衍射积分公式(4)作数值计算得到的光强 $I_R(x, 0, 20z_R)$, 结果表明, $I(x, 0, 20z_R)$ 与 $I_R(x, 0, 20z_R)$ 符合甚好.

图2给出当 $\delta = 0.5$ 和 1.2 圆屏衍射非傍轴矢量高斯光束 x, y 方向的远场发散角 θ_x 和 θ_y 随 $1/f$ 的变化,并与傍轴近似下的远场发散角 θ_p 作了比较. θ_x 和 θ_y 定义为^[7]

$$\theta_x = \lim_{z \rightarrow \infty} \arctan \frac{w_x(z)}{z}, \quad (22a)$$

$$\theta_y = \lim_{z \rightarrow \infty} \arctan \frac{w_y(z)}{z}, \quad (22b)$$

其中束宽 $w_x(z)$ 和 $w_y(z)$ 分别定义为 x 和 y 方向光强减小到最大值的 $1/2$ 处对应半宽度. 由图2知,非傍轴矢量高斯光束圆屏衍射的远场发散角 θ_x 和 θ_y 与 f 参数和截断参数 δ 有关,且一般有 $\theta_x \neq \theta_y$. 随 f 参数的增大和截断参数 δ 的减小,非傍轴效应变得明显. 在所给计算参数下,用(22)式计算的远场发散角与傍轴近似结果相同,即 $\theta_x = \theta_y = \theta_p$ 的条件,对 $\delta = 1.2$, 为 $f \leq 0.33$, 对 $\delta = 0.5$ 时,为 $f \leq 0.26$. 此外,由图2还知,在 $1/f \rightarrow 0$ 时, θ_x 和 θ_y 趋于极大值 $\theta_{x, \max} = 45^\circ$ 和 $\theta_{y, \max} = \arctan(\sqrt{2} - 1)^{1/2} \approx 32.77^\circ$, 与文献[7]

中结果一致.

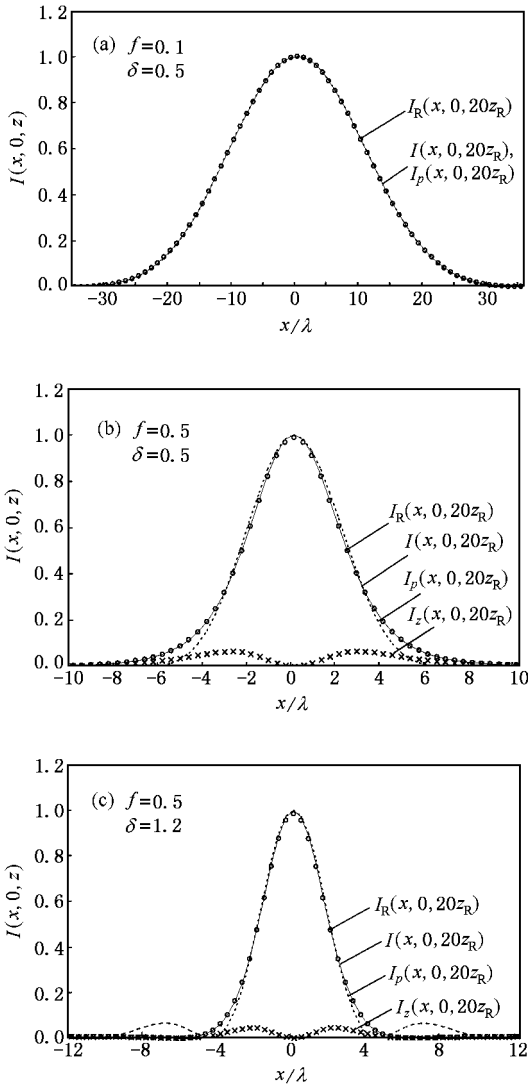


图 1 圆屏衍射非傍轴矢量高斯光束在 $z = 20z_R$ 处 x 方向的光强分布和傍轴近似下的光强分布

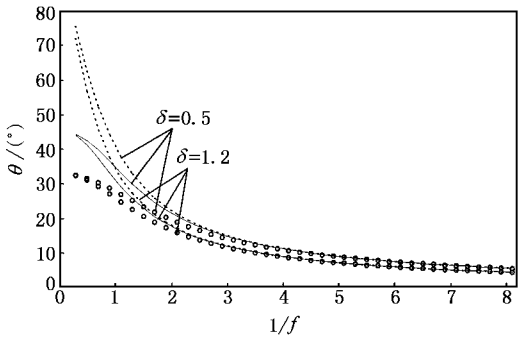


图 2 圆屏衍射非傍轴矢量高斯光束远场发散角 θ_x, θ_y 和傍轴近似下的远场发散角 θ_p 随 $1/f$ 的变化 —— 为 θ_x , $\circ$ 为 θ_y , --- 为 θ_p

4. 结 论

本文给出比较严格的非傍轴矢量高斯光束的圆屏衍射理论, 所得结果能描述非傍轴矢量高斯光束通过圆屏衍射的近场和远场特性, 并将非傍轴矢量高斯光束圆屏衍射的轴上场分布、远场表示式和自由空间的传输公式等作为一般公式的特例统一处理. 数值计算和比较实例说明本文所得解析公式与直接从矢量瑞利衍射积分公式作数值计算结果一致. 本文研究还表明, 与自由空间中高斯光束传输的非傍轴行为仅由 f 参数决定^[7,11] 不同, 对圆屏衍射问题, 光束参数 k, w_0 和屏参数 a , 或换言之, f 参数和截断参数 δ 决定光束的非傍轴行为, 并且非傍轴效应随 f 参数的增加和截断参数 δ 的减小而增大.

[1] Lax M, Louisell W H and McKnight W B 1975 *Phys. Rev. A* **11** 1365

[2] Agrawal G P and Lax M 1983 *Phys. Rev. A* **27** 1693

[3] Takenaka T, Yokota M and Fukumitsu O 1985 *J. Opt. Soc. Am. A* **2** 826

[4] Carter W H 1972 *J. Opt. Soc. Am.* **62** 1195

[5] Agrawal G P and Pattanayak D N 1979 *J. Opt. Soc. Am.* **69** 575

[6] Chen C G, Konkola P T, Ferrera J, Heilmann R K and Schattenburg M L 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 404

[7] Zeng X, Liang C and An Y 1999 *Appl. Opt.* **38** 6253

[8] Wünsche A 1992 *J. Opt. Soc. Am. A* **9** 765

[9] Laabs H and Friberg A T 1999 *IEEE J. Quantum Electron.* **35** 98

[10] Seshadri S R 2002 *Opt. Lett.* **27** 988

[11] Nemoto S 1990 *Appl. Opt.* **29** 1940

[12] Duan K L and Lü B D 2003 *Opt. Exp.* **11** 1474

[13] Luneburg R K 1966 *Mathematical Theory of Optics* (Berkeley California : California University Press)

[14] Bronshtein I N and Semendyayev K A 1979 *Handbook of Mathematics* (Thun and Frankfurt : Verlag Harri Deutsch Press)

Nonparaxial vector Gaussian beams diffracted at a circular screen^{*}

Liu Pu-Sheng¹⁾ Lü Bai - Da^{1)2)†}

¹⁾ (*Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China*)

²⁾ (*State Key Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*)

(Received 29 December 2003 ; revised manuscript received 23 February 2004)

Abstract

By using the vector Rayleigh diffraction integrals, an analytical expression for the diffraction of nonparaxial vector Gaussian beams at a circular screen is derived. The diffracted on-axis field and far-field expressions and free-space propagation equation of nonparaxial vector Gaussian beams, as well as the paraxial Fresnel and Fraunhofer diffraction formulae of Gaussian beams diffracted at a circular aperture are treated in a unified way as special cases of our general result. Numerical comparative examples are given to illustrate the intensity distributions and far-field behavior of nonparaxial vector Gaussian beams. It is shown that for the diffraction at the circular screen both the f -parameter and truncation parameter affect the beam nonparaxiality.

Keywords: light transmission optics, nonparaxial vector Gaussian beam, diffraction at a circular screen, vector Rayleigh diffraction integral formula

PACC: 4200

^{*} Project supported by the Foundation of State Key Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology (Grant No. 0101), and the National High Technology Development Program of China (Grant No. 2003AA823070).

[†] Corresponding author. E-mail: badalu@scu.edu.cn