

双稳随机动力系统信号调制噪声效应的数值分析^{*}

肖方红¹⁾ 闫桂荣¹⁾ 韩雨航²⁾

¹⁾ 西安交通大学建筑工程与力学学院, 西安 710049)

²⁾ 中国工程物理研究院, 绵阳 610003)

(2002 年 11 月 28 日收到, 2003 年 4 月 28 日收到修改稿)

用数值方法研究了双稳随机动力系统的信号调制噪声效应. 结果表明, 正弦信号在系统输出中的效应仍为正弦信号, 白噪声的效应则为维纳过程. 通过选择合适的系统参数, 可以减小系统输出中信号和噪声之间的耦合效应, 系统可以大大抑制噪声, 从而在双稳系统中可以产生信号调制噪声效应.

关键词: 双稳系统, 信号调制噪声效应, 随机共振

PACC: 0547, 0260

1. 引言

近 20 年来, 人们对双稳系统的随机共振现象产生了极大的兴趣, 进行了大量的理论和实验研究^[1-17]. 随机共振是双稳系统在周期信号和噪声的作用下表现出来的非线性现象, 当系统的非线性与信号和噪声之间存在某种匹配时, 通过对系统施加适当强度的噪声, 可以提高系统对信号的响应, 系统输出的信噪比对噪声强度表现出一峰状曲线^[11]. 研究表明, 随机共振发生的机理是双稳系统中噪声激发的两稳态之间的跃迁与周期信号统计意义上的同步提高了系统输出的信噪比^[11]. 然而, 利用双稳系统的非线性特性来抑制噪声在双稳系统输出中的作用, 而使双稳系统在周期信号和噪声的作用下, 产生其他的非线性现象则没有引起人们的注意. 实际上, 由于双稳系统的非线性, 周期信号和噪声在系统输出中的效应是不同的, 双稳系统不但可以发生随机共振现象, 也可以发生其他的非线性现象. 本文利用双稳系统随机共振的动力学模型, 对周期信号和噪声在系统输出中效应进行分析表明, 由于周期信号的确定有序特性使其在系统输出中的效应仍表现为周期信号, 而噪声的随机无序的特性使其在系统输出中的效应大为减弱. 通过选择合适的系统参数, 可以充分减小系统中信号和噪声之间的耦合效应, 这样系统可以大大抑制噪声而对周期信号则具有较小

的影响, 从而在双稳系统中产生不同于随机共振的信号调制噪声效应.^[18]

2. 模型及其数值分析

双稳系统在正弦信号和白噪声作用下的动力学方程可以表示为

$$\dot{x} = ax - bx^3 + A \sin(\omega t + \varphi_0) + u(t), \quad (1)$$

其中 $a > 0, b > 0, w(t)$ 为白噪声, $w(t) = 0, u(t)u(t') = \sigma^2 \delta(t - t')$ (1) 式即是双稳系统随机共振的动力学模型^[4-7]. 用微分方程数值解法分析 (1) 式, 为简单起见这里采用欧拉法. 设迭代步长为 $h, A \sin(\omega t + \varphi_0) + u(t)$ 离散化为 $v_i = s_i + w_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), $s_i = A \sin(\omega i h + \varphi_0)$, $\{w_i\}$ 是一个零均值的高斯白噪声, 方差为 σ^2 . 设方程初始条件为 $x(0) = x_0$, 由欧拉公式 $x_{n+1} = x_n + h f(t_n, x_n)$ 可得

$$x_1 = x_0 + h(s_0 + w_0) + h(ax_0 - bx_0^3), \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + h(s_1 + w_1) + h(ax_1 - bx_1^3) \\ &= x_0 + h(s_0 + s_1) + h(w_0 + w_1) \\ &\quad + h(ax_0 - bx_0^3 + ax_1 - bx_1^3), \end{aligned} \quad (2b)$$

.....

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + h(s_{n-1} + w_{n-1}) + h(ax_{n-1} - bx_{n-1}^3) \\ &= x_0 + h \sum_{i=0}^{n-1} s_i + h \sum_{i=0}^{n-1} w_i + h \sum_{i=0}^{n-1} (ax_i - bx_i^3). \end{aligned} \quad (2c)$$

^{*} 西安交通大学博士学位论文基金和国家自然科学基金(批准号: 10276032)与中国工程物理研究院联合基金(NSAF)资助的课题.

[†] E-mail: xiaofh_xjtu@163.com

当 h 充分小时,

$$\begin{aligned} h \sum_{i=0}^{n-1} s_i &= \int_0^{(n-1)h} A \sin(\omega t + \varphi_0) dt \\ &= \frac{A}{\omega} \cos \varphi_0 - \frac{A}{\omega} \cos[\omega(n-1)h + \varphi_0] \\ &= \frac{A}{\omega} \cos \varphi_0 - \frac{A}{\omega} \cos(\omega t_{n-1} + \varphi_0). \end{aligned} \quad (3)$$

将(3)式代入(2c)得

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + \frac{A}{\omega} \cos \varphi_0 - \frac{A}{\omega} \cos(\omega t_{n-1} + \varphi_0) \\ &\quad + h \sum_{i=0}^{n-1} w_i + h \sum_{i=0}^{n-1} (ax_i - bx_i^3). \end{aligned} \quad (4)$$

由(4)式可以看出,输入正弦信号在系统输出中的效应仍表现为一个正弦信号,其幅值为 A/ω ,相位滞后输入正弦信号约 $\pi/2$. 将 t_n 时刻噪声的输出

效应记为 c_n , 即 $c_n = h \sum_{i=0}^{n-1} w_i$. 由于 $u(t)$ 是一个高斯过程,其存在均方随机积分,记 $\gamma(t) = \int_0^t u(u) du$,

可以证明 $\gamma(t)$ 是均值为 0,强度为 σ^2 的维纳过程.

当 h 充分小时, $c_n = h \sum_{i=0}^{n-1} w_i = \gamma(t_{n-1})$, 于是 $c_i -$

$c_{i-1} = \gamma(t_{i-1}) - \gamma(t_{i-2})$ 服从 $N(0, \sigma^2(t_{i-1} - t_{i-2}))$,

即 $c_i - c_{i-1} \sim N(0, h\sigma^2)$. 当 $u(t)$ 为高斯过程时, w_i

与 w_{i-1} 分别是 $u(t)$ 在 t_i 与 t_{i-1} 时刻的抽样,都可以

看成变量,相互独立,同服从 $N(0, \sigma^2)$, 于是 $w_i -$

$w_{i-1} \sim N(0, 2\sigma^2)$. 比较 $c_i - c_{i-1}$ 与 $w_i - w_{i-1}$ 均值都为 0,

当 $h < 2$ 时, $h\sigma^2 < 2\sigma^2$, 即 $c_i - c_{i-1}$ 比 $w_i - w_{i-1}$

的分散性小,因此输入白噪声 $\{w_i\}, i = 0, 1, 2, \dots$,

在系统输出中受到了抑制,当 $h \ll 2$ 时, $h\sigma^2 \ll 2\sigma^2$,

输入白噪声在系统输出中受到大幅度抑制,这时系

统输出中正弦成分 $\frac{A}{\omega} \cos \varphi_0 - \frac{A}{\omega} \cos(\omega t_{n-1} + \varphi_0)$ 将调

制噪声成分 $h \sum_{i=0}^{n-1} w_i$. 以下分析耦合项 $h \sum_{i=0}^{n-1} (ax_i -$

$bx_i^3)$. 设 $y(x) = ax - bx^3$, 当 $x = \pm \sqrt{a/b}$ 或 $x = 0$

时, $y'(x) = 0$, $y(x)$ 在 $(0, \sqrt{a/b})$ 内取极大值 $y_{\max} =$

$\sqrt{4a^3/27b}$, 在 $(-\sqrt{a/b}, 0)$ 内取极小值 $y_{\min} =$

$-\sqrt{4a^3/27b}$. 由于方程(1)表示的受正弦信号和白

噪声激励的双稳系统将在其稳态 $\sqrt{a/b}$ (或

$-\sqrt{a/b}$)附近作局域的运动或绕两稳态 $\pm \sqrt{a/b}$ 作

全局的运动,因此 $ax_i - bx_i^3$ 是绕 0 上下波动的变量,

其波动的范围可以近似认为在 $-\sqrt{4a^3/27b}$ 与

$\sqrt{4a^3/27b}$ 之间. 由此可见选择较小的系统参数 a ,

可以减小 $h \sum_{i=0}^{n-1} (ax_i - bx_i^3)$ 在系统输出中的效应. 对

于参数 b , 由于 $-bx_i^3$ 是非线性项, 当 $|x_i| > 1$ 时,

$-bx_i^3$ 的影响显著增大, 可用较小的参数 b 来减小其

影响. 这样用较小的系统参数 a, b 可以使耦合项

$h \sum_{i=0}^{n-1} (ax_i - bx_i^3)$ 的效应减小, 从而 $\frac{A}{\omega} \cos \varphi_0$

$-\frac{A}{\omega} \cos(\omega t_{n-1} + \varphi_0)$ 也将调制耦合项 $h \sum_{i=0}^{n-1} (ax_i$

$-bx_i^3)$. 由上述分析可知受弱小正弦信号和噪声激

励的双稳系统, 当系统参数 a, b 较小特别是 a 较小时,

可以在系统的输出中发生信号调制噪声的效应.

3. 数值仿真

设双稳系统输入信号 $v(t) = 0.05 \sin(0.005 \times$

$2\pi t) + 0.5u(t)$, $u(t)$ 是均值为 0, 方差为 1 的白噪

声. 图 1(a) 为 $v(t)$ 的时域信号, (b) 为 $v(t)$ 功率谱,

可以看出由于信噪比很低, 时域和频域都不能分辨

出正弦信号的存在.

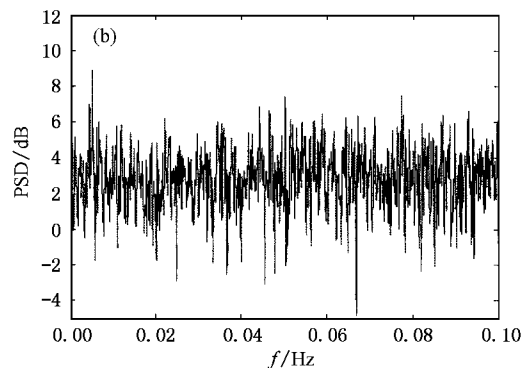
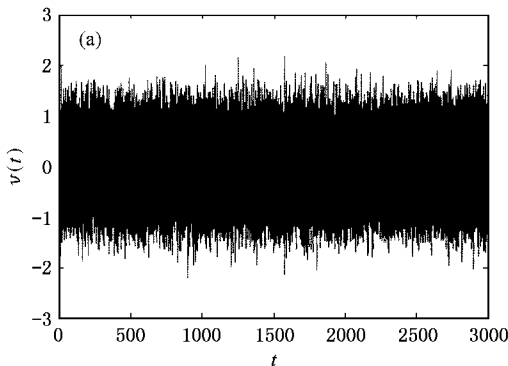


图 1 $v(t)$ 的时域信号和功率谱

将 $u(t)$ 作用于双稳系统, 方程可写为

$$\dot{x} = ax - bx^3 + 0.05\sin(0.005 \times 2\pi t) + 0.5u(t). \tag{5}$$

考察 $a = 1, b = 10, a = 0.1, b = 1$ 和 $a = 0.1, b = 0.01$ 三种情况下系统的输出信号. 为了提高数值分析的精度, 这里采用比欧拉法精度高的 Runge-Kutta 方法求解方程 (5), 取步长 $h = 0.02$, 初值 $x_0 = 0$. 图 2(a) 为 $a = 1, b = 10$ 时系统输出的时域信号, 从图中可以看出略有正弦信号的调制, 同时有两稳态之间的跃迁, 这是因为系统参数 a, b 较大, 耦合项

$h \sum_{i=0}^{n-1} (ax_i - bx_i^3)$ 的影响较大. (b) 为输出信号的功率谱, 可以明显地看到频率为 $f = 0.005\text{Hz}$ 的周期信号存在. 图 2(c) 为 $a = 0.1, b = 1$ 时系统输出的时

域信号, 从图中可以看到全局的信号调制噪声的现象. (d) 为输出信号的功率谱, 可以明显地看到在频率 $f = 0.005\text{Hz}$ 处有一针状尖峰, 说明在此频率处有一个较强的正弦信号存在. 图 2(e) 为 $a = 0.1, b = 0.01$ 时系统输出的时域信号, 从图中可以看到局域的信号调制噪声的现象. (f) 为输出信号的功率谱, 在频率 $f = 0.005\text{Hz}$ 处同样有一针状尖峰, 此峰的高度比 (d) 中峰的高度低, 这是因为此时 $\sqrt{4a^3/27b}$ 值比 $a = 0.1, b = 1$ 时大, 耦合项 $h \sum_{i=0}^{n-1} (ax_i - bx_i^3)$ 的影响增大.

再考虑输入信号为 $0.05\sin 2\pi t + 0.5w(t)$ 时的情况, 方程可写为

$$\dot{x} = ax - bx^3 + 0.05\sin 2\pi t + 0.5u(t). \tag{6}$$

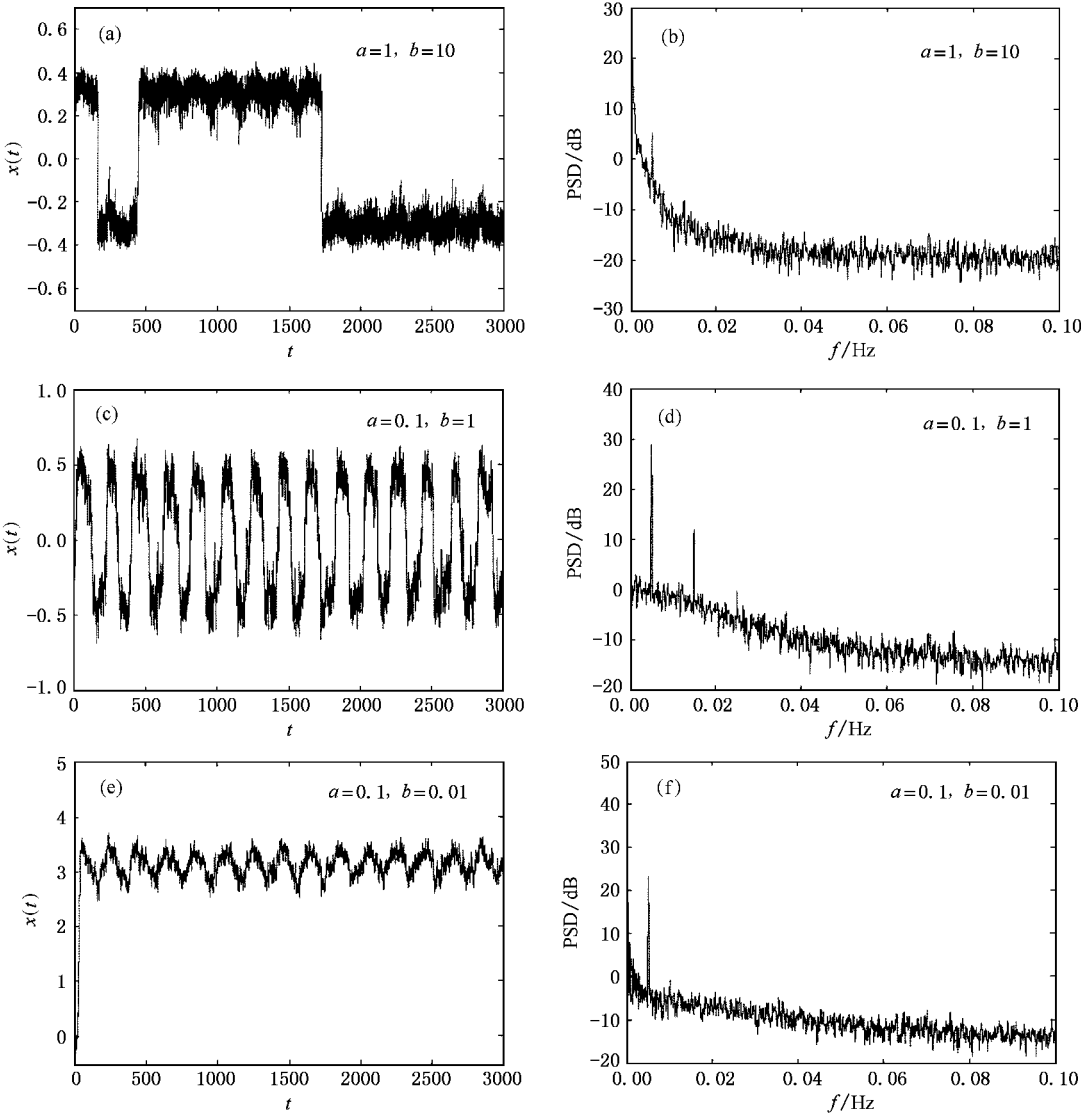


图 2 输入信号为 $0.05\sin(0.02\pi t) + u(t)$ 时系统输出的时域信号和功率谱

用 Runge-Kutta 方法求解方程(6),取步长 $h = 0.0001$,初值 $x_0 = 0$.图3为参数 $a = 0.1, b = 1, a = 1, b = 10$ 和 $a = 5, b = 100$ 三种情况下系统输出的时域信号和功率谱,从时域信号图(a)(c)和(e)可以

看出这时系统在趋于稳定态 $\sqrt{a/b}$ 的同时都发生信号调制噪声的现象,而从功率谱图(b)(d)和(f)则可以看到在频率 $f = 1\text{Hz}$ 处有一尖峰.

上述两例正弦信号和白噪声激励的双稳系统的

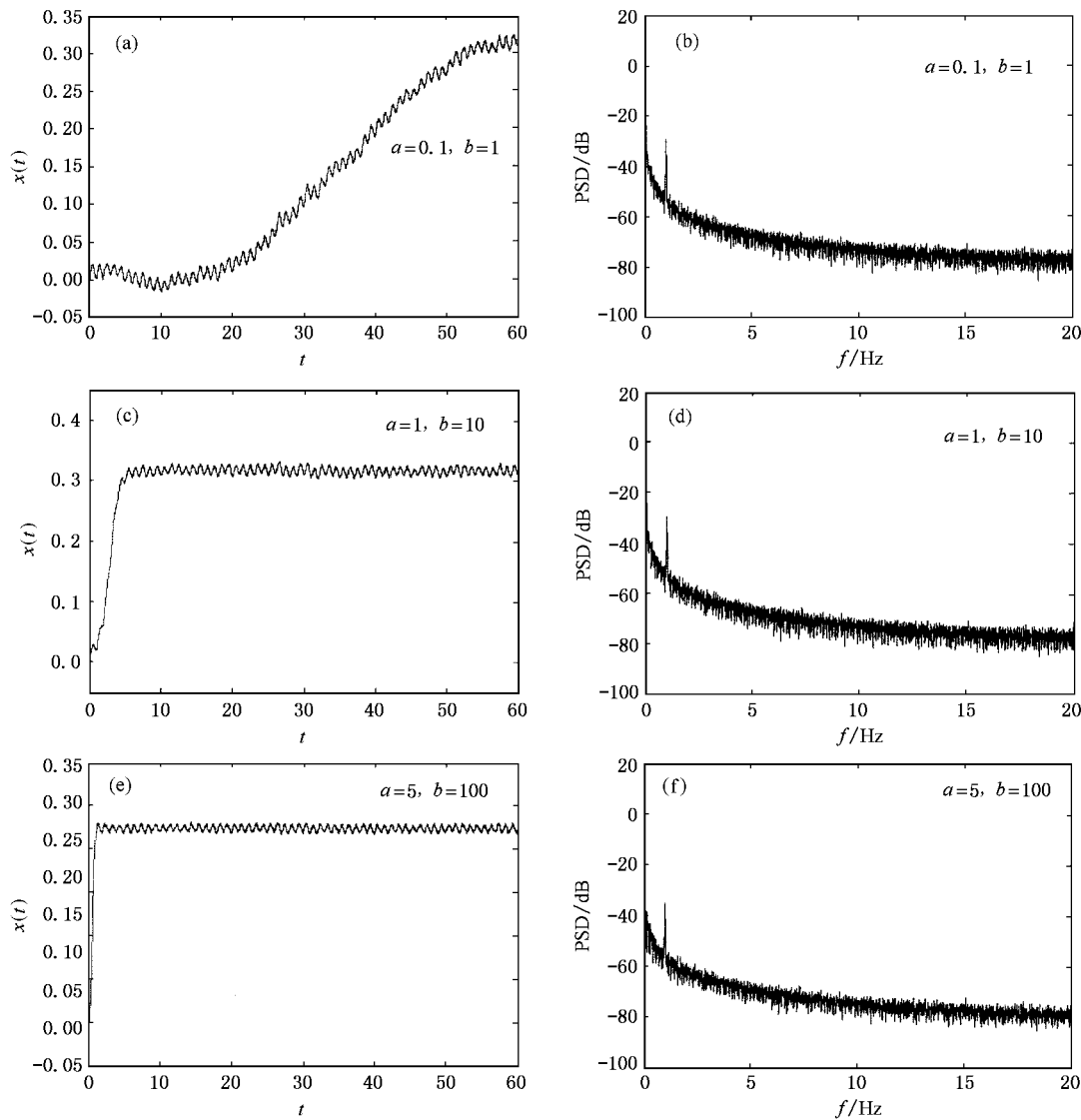


图3 输入信号为 $0.05\sin 2\pi t + 0.5u(t)$ 时系统输出的时域信号和功率谱

仿真分析表明,双稳系统确有抑制噪声的作用,当输入正弦信号的频率较低时,在具有较小参数 a 的双稳系统中可以发生不同于随机共振的信号调制噪声的现象,对上述数值分析进行了仿真验证.

4. 结 论

本文利用双稳系统在正弦信号和白噪声同时作用下的随机共振的动力学模型,用数值分析的方法对正弦信号和白噪声在系统输出中的效应进行了理

论分析.结果表明,正弦信号在系统输出中的效应仍表现为一个正弦信号的形式,而噪声在系统输出中的效应则表现为维纳过程的形式.通过选择合适的系统参数,可以充分减小系统输出中信号和噪声之间的耦合效应,这样系统可以大大抑制噪声,当正弦信号的频率较小时,双稳系统对正弦信号则具有较小的影响,甚至于可以将其放大,从而在双稳系统输出信号中产生不同于随机共振的信号调制噪声效应.

- [1] Benzi R , Suter A and Vulpiani A 1981 *J. Phys. A : Math. Gen.* **14** L 453
- [2] Fauve S and Heslot F 1983 *Phys. Lett. A* **97** 5
- [3] Mc - Namara B , Wiesenfeld K and Roy R. 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2626
- [4] Mc - Namara B and Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4854
- [5] Fox R 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4148
- [6] Ting Zhou and Frank Moss 1990 *Phys. Rev. A* **41** 4255
- [7] Hu G , Nicolis G and Nicolis C 1990 *Phys. Rev. A* **42** 2030
- [8] Hu G , Qing G R , Gong D C and Weng X D 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6414
- [9] Hu G , Haken H and Ning C Z 1992 *Phys. Lett. A* **172** 21
- [10] Hu G , Ditzinger T , Ning C Z and Haken H 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 807
- [11] Gammaitoni L *et al* 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [12] Mao X M , Sun K and Ouyang Q 2002 *Chin. Phys.* **11** 1106
- [13] Qin G R , Gong D C , Hu G *et al* 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 360 (in Chinese) [秦光戎、龚德纯、胡 岗等 1992 物理学报 **41** 360]
- [14] Wang J F , Liu F , Wang J Y *et al* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2305 (in Chinese) [王嘉赋、刘 锋、王均义等 1997 物理学报 **46** 2305]
- [15] Yang H B , Liu W D , Zheng J *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 508 (in Chinese) [杨洪波、刘万东、郑坚等 2000 物理学报 **49** 508]
- [16] Liang G Y 2003 *Chin. Phys.* **12** 377
- [17] Kang Y M *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 802 (in Chinese) [康咏梅等 2003 物理学报 **52** 802]
- [18] Xiao F H *et al* 2003 *Chin. Phys.* **12** 946

Numerical analysis of the signal modulation effect in bistable stochastic dynamical systems^{*}

Xiao Fang-Hong¹⁾ Yan Gui-Rong¹⁾ Han Yu-Hang²⁾

¹⁾ (School of Civil Engineering and Mechanics , Xi ' an Jiaotong University , Xi ' an 710049 , China)

²⁾ (China Academy of Engineering Physics , Mianyang 610003 , China)

(Received 28 November 2002 ; revised manuscript received 28 April 2003)

Abstract

We study numerically the effect of signal modulating noise in bistable stochastic dynamical systems. By making a numerical analysis of the bistable stochastic dynamical systems , we find that the effect of an input sinusoidal signal is also a sinusoidal signal in the output , and the effect of the white noise is a Wiener process. When the system parameters are small enough , the coupling effect between the sinusoidal signal and the white noise can be largely weakened. Under this condition the noise can be largely reduced in the system output , and the effect of signal modulating noise can occur in the bistable stochastic dynamical systems.

Keywords : bistable dynamical system , effect of signal modulating noise , stochastic resonance

PACC : 0547 , 0260

^{*} Project supported by the Doctoral Foundation of Xi ' an Jiaotong University , and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10276032) & the Science Foundation of China Academy of Engineering Physics NSAF.