

Kirchhoff 方程的相对常值特解及其 Lyapunov 稳定性

薛 纭^{1,2)} 陈立群¹⁾ 刘延柱³⁾

¹⁾ 上海大学理学院, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

²⁾ 上海应用技术学院机械与自动化工程学院, 上海 200233)

³⁾ 上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

(2003 年 8 月 1 日收到, 2004 年 4 月 19 日收到修改稿)

对于超细长弹性杆静力学的 Kirchhoff 方程, 用动力学的概念和方法研究其常值特解和稳定性问题. 计算了 Kirchhoff 方程相对固定坐标系、截面主轴坐标系以及中心线 Frenet 坐标系的常值特解, 进行了 Kirchhoff 动力学比拟, 用一次近似理论分别讨论了它们的 Lyapunov 稳定性, 导出了若干稳定性判据, 并在参数平面上绘出了稳定域.

关键词: 超细长弹性杆, Kirchhoff 方程, 常值特解, Lyapunov 稳定性

PACC: 0320, 0340D

1. 引言

弹性细杆的平衡和稳定性问题是一个经典的力学问题, 历史最早可追溯到 Bernoulli 和 Euler 18 世纪的研究工作^[1]. 1859 年 Kirchhoff 建立了弹性细杆静力学的一般理论, 提出了著名的“Kirchhoff 动力学比拟”的思想, 开辟了用动力学的概念和方法研究弹性细杆静力学问题的新思路^[1,2]. Kirchhoff 理论有着广泛的应用背景, 如电缆、钻杆和绳索等都可以将弹性细杆作为其力学模型. 20 世纪 70 年代, Kirchhoff 理论在分子生物学中找到了新的应用^[3-8]. 作为 DNA 等一类生物大分子的力学模型, 超细长弹性杆的平衡和稳定性问题重新受到关注^[9-12]. 超细长性使得杆的静力学完全不同于传统的弹性力学. 近年来, 弹性细杆动力学也已引起人们的重视^[12,13]. 与此相比, 国内此类文献相对较少, 但已有一些结果^[14,15].

本文讨论 Kirchhoff 方程的常值特解是指导数项为零时对应的解, 是相对某个坐标系的不变量. 按照 Kirchhoff 的“动力学比拟”, 它对应于动力学中刚体的相对平衡状态. 事实上, 我们可以更一般地用动力学的理论和方法去研究弹性细杆静力学问题, 平衡位形的 Lyapunov 稳定性就是其中的一个重要内容^[16,17]. 弹性细杆平衡的稳定性有两种不同的定义: 一是压杆稳定的 Euler 定义, 是指直线平衡状态的扰动方程是否还存在非零解, 边界是不受扰动的, 属于

边值问题的稳定性. 二是考虑到弹性杆的平衡条件是一个常微分方程而提出的 Lyapunov 稳定性, 它是指起始点的扰动对杆截面状态的影响, 是初值问题的稳定性. 由于两者的出发点都是平衡微分方程, 因此都不是动力学意义上的稳定性, 而是静态稳定性.

2. 弹性细杆的 Kirchhoff 方程

研究在 Kirchhoff 假定下的长为 l 的非圆截面自由弹性细杆, 不计中心线的伸缩以及非圆截面扭转或剪切弯曲造成的截面翘曲. 建立固定参考系 $O-\xi\eta\zeta$, 沿 $O-\xi\eta\zeta$ 坐标轴的单位基矢量为 e_ξ, e_η, e_ζ , 杆的中心线矢径为 $r = \xi(s)e_\xi + \eta(s)e_\eta + \zeta(s)e_\zeta$, 其中 s 为杆的中心线弧坐标, 满足 $|dr/ds| = 1$. 在中心线 p 处建立与截面固连的形心主轴坐标系 $p-xyz$, 沿 $p-xyz$ 坐标轴的单位基矢量为 $e_1(s), e_2(s), e_3(s)$, 其中 $e_3 = dr/ds$ 为中心线的切矢, 指向弧坐标增加的方向. 给定弧坐标 s , 存在两个相对的截面, 规定截面的外法矢与弧坐标增加方向一致的截面称为 s 的正截面, 记为 s^+ , 反之称为 s 的负截面, 记为 s^- . 截面沿中心线以单位速度运动时的角速度 ω 称为弯扭度, 定义为

$$\dot{e} = \omega \times e, \quad (1)$$

式中 e 为主轴坐标系 $p-xyz$ 中的固定矢量, 其顶上的点表示在固定参考系 $O-\xi\eta\zeta$ 中计算对弧坐标 s 的导数. 因此, 可用 $p-xyz$ 坐标轴的单位基矢量表示为

$$\omega = (\dot{e}_2 \cdot e_3)e_1 + (\dot{e}_3 \cdot e_1)e_2 + (\dot{e}_1 \cdot e_2)e_3. \quad (2)$$

Kirchhoff 方程在固定坐标系中表示为

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}}{ds} &= 0, \\ \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{F} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $\mathbf{F}, \mathbf{M}$ 为 s^+ 截面上内力在形心处的主矢和主矩, 在主轴坐标系中表示为

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{d}\mathbf{F}}{ds} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{F} &= 0, \\ \frac{\tilde{d}\mathbf{M}}{ds} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{F} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

式中微分符号上的“ $\sim$ ”表示相对主轴坐标系的导数. 本构关系可用沿主轴的分量表示为

$$\begin{aligned} M_1 &= A(\omega_1 - \omega_1^0), \\ M_2 &= B(\omega_2 - \omega_2^0), \\ M_3 &= C(\omega_3 - \omega_3^0), \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\omega_i^0 = \omega_i^0(s)$ ($i=1, 2, 3$) 为给定的杆在无力作用状态下已存在的弯扭度分量, 称为原始弯扭度分量; A, B 为截面绕主轴 x, y 的抗弯刚度, 可表示为 $A = EI_1, B = EI_2, C$ 为截面绕主轴 z 的抗扭刚度, 在圆截面情形下可表示为 $C = GI_3$, 其中 E 为杆的杨氏弹性模量, G 为剪切弹性模量, I_1, I_2, I_3 分别为截面对主轴 x, y 的惯性矩和对形心的极惯性矩.

以中心线 p 点的切矢 $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_t(s)$ 主法矢 $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n(s)$ 和副法矢 $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_b(s)$ 建立 Frenet 活动标架 $\{\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b\}$ ^[18], 其中 $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_b \cdot \mathbf{e}_2 = \cos\chi$. 导出关系

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \kappa \sin\chi, \\ \omega_2 &= \kappa \cos\chi, \\ \omega_3 &= \tau + \frac{d\chi}{ds}, \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $\chi = \chi(s)$ 为主轴坐标系 $p\text{-}xyz$ 和 Frenet 坐标系 $\{\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b\}$ 的转角, $\kappa = \kappa(s)$ 和 $\tau = \tau(s)$ 分别为挠性线的曲率和挠率. Kirchhoff 方程在 Frenet 坐标系中的形式是

$$\begin{aligned} \frac{\hat{d}\mathbf{F}}{ds} + \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{F} &= 0, \\ \frac{\hat{d}\mathbf{M}}{ds} + \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{M} + \mathbf{e}_t \times \mathbf{F} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

式中微分符号上的“ $\hat{\cdot}$ ”表示相对 Frenet 坐标系的导数, $\boldsymbol{\Phi} = \kappa \mathbf{e}_b + \tau \mathbf{e}_t$ 为 Darboux 矢, 本构方程在 Frenet 坐标系中的形式为

$$M_n = \kappa(A - B)\sin\chi\cos\chi - A\omega_1^0\cos\chi + B\omega_2^0\sin\chi, \quad (8a)$$

$$M_b = \kappa(A\sin^2\chi + B\cos^2\chi) - A\omega_1^0\sin\chi - B\omega_2^0\cos\chi, \quad (8b)$$

$$M_t = C(\tau + \dot{\chi} - \omega_3^0). \quad (8c)$$

3. Kirchhoff 方程相对固定坐标系的常值特解及其稳定性

相对固定参考系的常值特解是指(3)式中相对该参考系的导数项为零时所对应的特解, 称此常值特解是绝对的. (3)式第一式本身要求主矢 $\mathbf{F}$ 是常值, 令(3)式第二式中的导数项为零, 给出

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{F} = 0. \quad (9)$$

绝对常值特解的物理意义是横截面上的主矢 $\mathbf{F}$ 和主矩 $\mathbf{M}$ 在该坐标系中为常矢量. (9)式对应于两种情况: $\mathbf{F} = 0$ 或 $\mathbf{F} \neq 0$. 下面分别予以讨论.

1) 主矢 $\mathbf{F}$ 恒为零, 主矩 $\mathbf{M}$ 为常矢量.

$$\mathbf{F}_s = 0,$$

$\mathbf{M}_s(s) = M_{s1}(s)\mathbf{e}_1 + M_{s2}(s)\mathbf{e}_2 + M_{s3}(s)\mathbf{e}_3 = \text{const.}$ 且在主轴坐标系中满足方程

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{M}}{ds} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} = 0. \quad (10)$$

(10)(5)式连同定解条件决定了此情形下的弹性杆在固定坐标系中的平衡位形. (10)式存在两个初积分

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M} &= 2T, \\ \mathbf{M} \cdot \mathbf{M} &= M_0^2, \end{aligned} \quad (11)$$

其中, 第一式须原始弯扭度分量 ω_i^0 为常数, T 和 M_0 为积分常数, 由截面在起始点处的状态确定. 这两个初积分在主矩空间 $O\text{-}M_1M_2M_3$ 中分别为椭球面和球面.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{A} (M_1 + A\omega_1^0)^2 + \frac{1}{B} (M_2 + B\omega_2^0)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{C} (M_3 + C\omega_3^0)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$= T + T^0, \quad (12a)$$

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M_0^2, \quad (12b)$$

式中 $T^0 = (A\omega_1^{02} + B\omega_2^{02} + C\omega_3^{02})/2$. 截面的主矩空间 $O\text{-}M_1M_2M_3$ 与主轴空间 $p\text{-}xyz$ 的轴完全重合, 但量纲不同. 当截面沿中心线以单位速度“运动”时, 主矩空间中的代表点沿两个球面的交线运动. (10)式在原始弯扭度分量 ω_i^0 不全为零的情况下等同于陀螺体的动力学方程; 当 $\omega_i^0 \equiv 0$ 时, 等同于无力矩刚体的定点转动方程, 此时存在 3 个特解^[19]:

$$S_1: \omega_{s1} = \omega_{s2} = 0, \quad \omega_{s3} = \omega_{30}; \quad (13a)$$

$$S_2: \omega_{s2} = \omega_{s3} = 0, \quad \omega_{s1} = \omega_{10}; \quad (13b)$$

$$S_3: \omega_{s3} = \omega_{s1} = 0, \quad \omega_{s2} = \omega_{20}. \quad (13c)$$

这里 ω_{i0} 为弹性杆在起始点处的弯扭度分量. 这些特解所描述的是截面绕主轴之一的均匀“转动”, 此时, 弯扭度 ω 和主矢 M 在固定和主轴坐标系中皆为常矢. 由刚体动力学知, 绕最大或最小刚度主轴的“转动”是稳定的, 绕中间刚度主轴的“转动”是不稳定的. 通常杆的抗扭刚度小于抗弯刚度, 因此特解 S_1 是稳定的, 而 S_2 和 S_3 中一个稳定另一个不稳定.

2) 主矢 F 为固定坐标系中的非零常矢量, 则 e_3 方向与 F 平行因而也是固定坐标系中的常矢量. 由此可知此时的常值特解是直杆. 从而 $\omega_{s1} = \omega_{s2} = 0$, 及

$$F_s = F_s e_3, \quad (14a)$$

$$M_s = -A\omega_1^0 e_1 - B\omega_2^0 e_2 + C(\omega_{s3} - \omega_3^0) e_3, \quad (14b)$$

式中 M_s 满足 (10) 式, 即

$$\begin{aligned} -A\dot{\omega}_1^0 + B\omega_2^0 \omega_{s3} &= 0, \\ B\dot{\omega}_2^0 + A\omega_1^0 \omega_{s3} &= 0, \\ \dot{\omega}_{s3} - \dot{\omega}_3^0 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

导出

$$\omega_{s3} = \omega_3^0 + \frac{h^3}{C} \quad (h_3 \text{ 为常数}), \quad (16a)$$

$$(A\omega_1^0)^2 + (B\omega_2^0)^2 = h^2 \quad (\text{常数});$$

$$\omega_3^0 = \begin{cases} h_3 + \frac{A\omega_1^0}{B\omega_2^0} & (\omega_2^0 \neq 0), \\ h_3 & (\omega_2^0 = 0). \end{cases} \quad (16b)$$

(16b) 式是原始弯扭度 ω^0 必须满足的条件. 对于 $A = B$ 的特殊情形 (16b) 式中的第一式表示弹性杆中心线的原始曲率为常数.

下面就 $F_s \neq 0$ 情形, 即直杆的情形讨论常值特解 (14) 的 Lyapunov 稳定性. 对弹性杆起始点的扰动导致 s 截面的内力和弯扭度偏离常值特解,

$$\begin{aligned} F &= F_s + f, \\ M &= M_s + m, \\ \omega &= \omega_s + \delta, \end{aligned} \quad (17)$$

式中, f, m, δ 为扰动量, $m = A\delta_1 e_1 + B\delta_2 e_2 + C\delta_3 e_3$. 代入 (4) 式并略去二阶微量, 导出线性化扰动方程

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{f}}{ds} &= -\omega_s \times f + F_s \times \delta, \\ \frac{d\tilde{m}}{ds} &= -\omega_s \times m + M_s \times \delta - e_3 \times f, \end{aligned} \quad (18)$$

定义无量纲弧坐标 t 和无量纲扰动量 x_i ,

$$\begin{aligned} t &= \omega_3^0 s, \\ x_i &= \frac{f_i}{F_s} \quad (i = 1, 2, 3), \\ x_i &= \frac{\delta_i}{\omega_3^0} \quad (i = 4, 5, 6) \end{aligned} \quad (19)$$

和无量纲参数

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \frac{\omega_i^0}{\omega_3^0} \quad (i = 1, 2), \\ \gamma &= \frac{\omega_{s3}^0}{\omega_3^0}, \\ \zeta &= \frac{F_s}{B(\omega_3^0)^2}, \\ \sigma &= \frac{B}{A} - 1, \\ \nu &= \frac{B}{C} - 1. \end{aligned} \quad (20)$$

(18) 式化作无量纲的矩阵形式

$$\dot{x} = Wx \quad (21)$$

式中, $x = (x_1, \dots, x_6)^T$, $\dot{x} = dx/ds$, 矩阵 W 定义为

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta(1+\sigma) & 0 & 0 & \frac{(1+\gamma\nu)(1+\sigma)}{1+\nu} & -\gamma_2(1-\sigma) \\ -\zeta & 0 & 0 & -\frac{1+\sigma+\gamma(\nu-\sigma)}{(1+\nu)(1+\sigma)} & 0 & \frac{\gamma_1}{1+\sigma} \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_2(1+\nu) & -\frac{\gamma_1(1+\nu)}{1+\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

将特征方程 $|W - \lambda E| = 0$ 展开,

$$\lambda(\lambda^5 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4) = 0, \quad (23)$$

式中

$$a_1 = \gamma^2 + (1 + \nu) \left(\frac{\gamma_1}{1 + \sigma} \right)^2 + (1 + \nu) [1 + \sigma] \gamma_2^2 - \zeta(2 + \sigma) + \frac{(1 + \nu) [1 + \sigma + \chi(\nu - \sigma)]}{(1 + \nu)^2}, \quad (24a)$$

$$a_2 = \frac{\sigma \gamma \gamma_1 \gamma_2 (1 + \nu)}{1 + \sigma}, \quad (24b)$$

$$a_3 = (1 + \sigma) \zeta^2 + (\gamma^2 - \zeta [1 + \nu] [1 + \sigma] \gamma_2^2 - \frac{\zeta(1 + \nu) \gamma_1^2}{1 + \sigma} + (1 + \nu) \left(\frac{\gamma_1^2}{1 + \sigma} \right)^2 + \frac{\zeta [\chi \gamma (\nu - 1) + \chi(1 + \nu + \sigma)]}{1 + \nu} + (1 + \nu) [1 + \sigma + \chi(\nu - \sigma)] \left(\frac{\gamma}{1 + \nu} \right)^2, \quad (24c)$$

$$a_4 = \frac{\sigma \gamma^3 \gamma_1 \gamma_2 (1 + \nu)}{1 + \sigma}. \quad (24d)$$

注意到, 特征方程(23)以及下面的方程(25)(35)和(48)均存在零根, 表明线性化系统存在某种“守恒运动”. 零根对应的特征向量与守恒量的梯度方向一致^[20]. Kirchhoff 杆平衡的 Lyapunov 稳定性取决于特征方程的非零根. 本文讨论特征方程的非零根均为纯虚根的条件只是稳定的必要条件.

根据代数方程的 Descartes 符号法则, 我们有下面不稳定的简单命题: 如果特征方程的系数序列 $\{1, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 的变号数为 1, 则方程有且仅有一个正根, 则弹性杆是不稳定的^[21].

考虑特殊情形 $a_2 = a_4 = 0$, 特征方程(23)成为

$$\lambda^2(\lambda^4 + a_1\lambda^2 + a_3) = 0. \quad (25)$$

特征方程除零根外只有纯虚根的条件是

$$\begin{aligned} a_1 &> 0, \\ a_3 &> 0, \\ a_1^2 - 4a_3 &\geq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

稳定域如图 1 所示. 表明具有原始曲率和扭率的圆截面直杆在受压时在一次近似意义下总是稳定的, 而特解扭率为零时的受拉状态总是不稳定的.

在 $a_2 = a_4 = 0$ 的众多特殊情形中, 进一步考虑下述简单情形.

1) 直杆为圆截面, 且中心线原始曲率为零: $\omega_1^0 = 0, \omega_2^0 = 0$. 特征方程(25)中的系数为

$$a_1 = \left(\frac{M_{s3} - A\omega_{s3}}{A} \right)^2 + (\omega_{s3})^2 - \frac{2F_{s3}}{A},$$

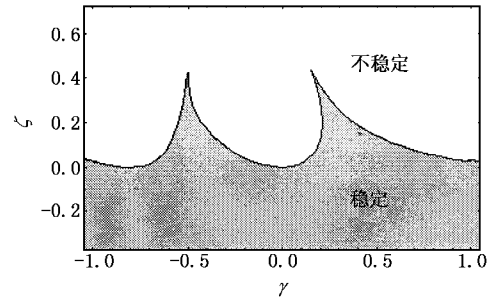


图 1 参数平面 (γ, ζ) 内的稳定域 $\gamma_1 = 0.5, \gamma_2 = 0.2, \sigma = 0, \nu = 1.2$

$$a_3 = \left(\frac{F_{s3} - M_{s3}\omega_{s3} + A(\omega_{s3})^2}{A} \right)^2, \quad (27)$$

稳定判据(26)式给出稳定条件

$$F_{s3} \leq \frac{M_{s3}^2}{4A}. \quad (28)$$

这就是 Greenkill 于 1883 年导出的 Greenkill 判据.

2) 直杆中心线的原始曲率为零, 扭率为原始扭率: $\omega_1^0 = 0, \omega_2^0 = 0, \omega_{s3} = \omega_3^0$. 特征方程(25)中的系数为

$$a_1 = \chi(\omega_3^0)^2 - \frac{A + B}{AB} F_{s3}, \quad (29)$$

$$a_3 = \frac{1}{AB} [A(\omega_3^0)^2 + F_{s3} [B(\omega_3^0)^2 + F_{s3}]],$$

稳定判据(26)式给出稳定条件(设 $A \leq B$)

$$F_{s3} \leq -B(\omega_3^0)^2, \quad (30a)$$

或

$$-A(\omega_3^0)^2 \leq F_{s3} \leq 0. \quad (30b)$$

4. Kirchhoff 方程相对主轴坐标系的常值特解流形及其稳定性

令(4)式中的导数项为零, 导出 Kirchhoff 方程在主轴坐标系中的常值特解方程

$$\begin{aligned} \omega \times F &= 0, \\ \omega \times M + e_3 \times F &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

它要求存在常数 c 使 $\omega = cF$ 并且与矢量 $(cM - e_3)$ 平行. 此常值特解是相对主轴坐标系的, 它组成一个 2 维流形

$X_P = \{ (F, M) \mid \omega \times F = 0, \omega \times M + e_3 \times F = 0 \}$ 称之为相对主轴坐标系的常值特解流形, 用显式表示为

$$\begin{aligned} F_{s1} &= \frac{A\omega_1^0}{(A - B)\omega_{s2} + B\omega_2^0} [-M_{s2}\omega_{s3} + M_{s3}\omega_{s2}], \\ F_{s2} &= -M_{s2}\omega_{s3} + M_{s3}\omega_{s2}, \end{aligned}$$

$$F_{s3} = \frac{\omega_{s3}}{\omega_{s2}}(-M_{s2}\omega_{s3} + M_{s3}\omega_{s2}),$$

$$M_{s1} = \frac{A\omega_1^0 M_{s2}}{(A-B)\omega_{s2} + B\omega_2^0}. \quad (32)$$

相对主轴坐标系的常值特解的物理意义是主矢和主矩在主轴坐标系中为常矢量。

下面就只有原始扭率而无原始曲率的圆截面杆讨论常值特解(32)式的 Lyapunov 稳定性. 此时(32)

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{s3} & -\omega_{s2} & 0 & -F_{s3} & F_{s2} \\ -\omega_{s3} & 0 & \omega_{s1} & F_{s3} & 0 & 0 \\ \omega_{s2} & -\omega_{s1} & 0 & -F_{s2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/A & 0 & 0 & -M_3/A + \omega_{s3} & (A-C)\omega_2/A \\ -1/A & 0 & 0 & M_3/A - \omega_{s3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

特征方程 $|W - \lambda E| = 0$ 为

$$\lambda^4(\lambda^2 + b) = 0, \quad (35)$$

式中

$$b = \frac{1}{A^2}[M_{s2}^2 + (M_{s3} - 2A\omega_{s3})^2]. \quad (36)$$

因特征方程(35)除零根外,只有纯虚根,所以常值特解流形(33)式中的每一点在一次近似意义下是稳定的,从而常值特解流形在一次近似意义下稳定^[22].

5. Kirchhoff 方程相对 Frenet 坐标系的常值特解流形及其稳定性

令(7)式中的导数项为零导出 Kirchhoff 方程在 Frenet 坐标系中的常值特解方程

$$\begin{aligned} \Phi \times F &= 0, \\ \Phi \times M + e_t \times F &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

它组成一个 3+1 维流形

$$X_F = \{F, M \mid \Phi \times F = 0, \Phi \times M + e_t \times F = 0\}, \quad (38)$$

称之为相对 Frenet 坐标系的常值特解流形. 考虑原始弯扭度分量 $\omega_2^0 = 0$ 时 X_F 的一个子流形

$$X_F^* = \{X_F \mid \chi_s = \pi/2\}. \quad (39)$$

$\dim(X_F^*) = 3$, 用显式表示为

$$\begin{aligned} F_{ns} &= 0, \\ F_{bs} &= \tau_s M_{bs} - \kappa_s M_{ts}, \\ F_{ts} &= \frac{\tau_s^2}{\kappa_s} M_{bs} - \tau_s M_{ts}. \end{aligned} \quad (40)$$

式简化为

$$\begin{aligned} F_{s1} &= 0, \\ F_{s2} &= -\omega_{s2}[(B-C)\omega_{s3} + C\omega_3^0], \\ F_{s3} &= -\omega_{s3}[(B-C)\omega_{s3} + C\omega_3^0], \\ \omega_{s1} &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

扰动量、线性化扰动方程与(17)(18)式相同,其中系数矩阵 W 改为

主矩常值特解为

$$\begin{aligned} M_{ns} &= 0, \\ M_{bs} &= A(\kappa_s - \omega_1^0), \\ M_{ts} &= \alpha(\tau_s + \dot{\chi}_s - \omega_3^0). \end{aligned} \quad (41)$$

下面讨论上述常值特解的 Lyapunov 稳定性,并在参数平面上画出稳定域如图 2、图 3 所示. 对弹性杆起始点的扰动导致 s 截面的内力和弯扭度偏离常值特解

$$\begin{aligned} F &= F_s + f, \\ \Phi &= \Phi_s + \phi, \\ M &= M_s + m, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\chi = \chi_s + \delta_\chi,$$

式中 f, ϕ, m, δ_χ 为扰动量, $\phi = \phi_\kappa e_b + \phi_\tau e_t, m = m_n e_n + m_b e_b + m_t e_t$, 存在关系

$$\begin{aligned} m_n &= (B\kappa_s - M_{bs})\phi_\chi, \\ m_b &= A\phi_\kappa, \\ m_t &= \alpha(\phi_\tau + \phi_\chi), \end{aligned} \quad (43)$$

式中 $\phi_\chi = d\phi_\chi/dt$. 将(42)式代入(7)式,略去二阶微量,导出线性化扰动方程

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{f}}{ds} &= -\Phi_s \times \mathbf{f} + F_s \times \phi, \\ \frac{d\mathbf{m}}{ds} &= -\Phi_s \times \mathbf{m} + M_s \times \phi - e_3 \times \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (44)$$

定义无量纲弧坐标 t 和无量纲扰动量 x_i ,

$$\begin{aligned} t &= \kappa_s s, \\ x_i &= \frac{f_i}{F_{bs}} \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

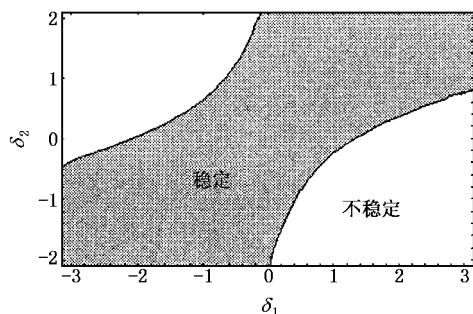


图2 参数平面 (δ_1, δ_2) 内的稳定域 $\varphi_1 = 0.1, \varphi_2 = 0.2$,
 $\sigma = -0.1, \nu = 1.2$

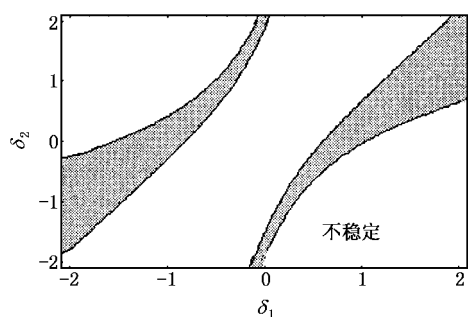


图3 参数平面 (δ_1, δ_2) 内的稳定域 $\varphi_1 = 0.1, \varphi_2 = 0.2$,
 $\sigma = -0.09, \nu = 1.2$

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{\phi_\kappa}{\kappa_s}, \\ x_5 &= \frac{\phi_\tau}{\kappa_s}, \\ x_6 &= \phi_x. \end{aligned} \quad (45)$$

写成无量纲的矩阵形式

$$W_1 \dot{x} = W_2 x, \quad (46)$$

式中 $x = (x_1, \dots, x_6)^T$, $\dot{x} = dx/ds$, 并设解为 $x = X \exp(\lambda s)$, $X = (X_1, \dots, X_6)^T$. 矩阵 W_1, W_2 定义为

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \sigma & (1 + \sigma)\lambda \end{pmatrix},$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 & -1 & -\delta_1 & -1 & 0 \\ -\delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{43} & 0 & -b_{44} & -b_{45} & 0 \\ -b_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{66} \end{pmatrix},$$

其中,

$$a_{46} = 1 + \sigma + (\sigma + \varphi_1)(1 + \nu), \quad (47a)$$

$$b_{51} = -b_{42} = \delta_1[\sigma - \nu + \varphi_1(1 + \nu)] + \delta_2(1 + \sigma) - \varphi_3(1 + \sigma), \quad (47b)$$

$$b_{44} = \delta_1(\nu - \sigma) - (1 + \sigma)(\delta_2 - \varphi_3), \quad (47c)$$

$$b_{45} = \nu - \sigma - (1 + \nu)\varphi_1, \quad (47d)$$

$$b_{66} = (1 + \nu)(\sigma + \varphi_1), \quad (47e)$$

$$b_{56} = -\delta_1 b_{66}. \quad (47f)$$

将(46)式的特征方程 $|W_2 - \lambda W_1| = 0$ 展开,

$$\lambda^2(a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^2 + a_3) = 0, \quad (48)$$

式中

$$a_0 = (1 + \sigma)(1 + \nu)^2, \quad (49a)$$

$$a_1 = (1 + \sigma)[b_{44} b_{66} \delta_1 - b_{42}[b_{44} + \delta_1(1 + \nu)] - (1 + \nu)(1 + \sigma)[b_{42} \delta_1 - (1 + \delta_1^2)(1 + \nu)] + (1 + \nu)(\sigma + \varphi_1)[\sigma - \nu + \varphi_1(1 + \nu)]], \quad (49b)$$

$$a_3 = b_{66}\{b_{42} b_{44} - b_{45}(1 + \delta_1)(1 + \nu) + \delta_1^3(1 + \sigma)[b_{42} + b_{44}] + \delta_1[b_{42}(1 + \nu + b_{45}) + b_{44}(1 + \sigma)]\}. \quad (49c)$$

稳定条件是特征方程除零根外只有纯虚根, 即

$$\begin{aligned} a_1 &> 0, \\ a_3 &> 0, \\ a_1^2 - 4a_0 a_3 &\geq 0. \end{aligned} \quad (50)$$

稳定域如图2、图3所示. 表明截面的抗弯刚度对稳定域有明显影响.

6. 结 论

1) Kirchhoff 方程相对固定坐标系、截面主轴坐标系以及中心线 Frenet 坐标系的特解都不是孤立的, 而是组成流形. 从特解方程(9)(31)和(37)可见, 当主矢 F_s 非零时, 直杆是它们的唯一交集. 当主矢 F_s 为零而主矩 M_s 非零时, 在固定坐标系中的常值特解是“随遇”的, 即在杆端作用任意的一对平衡力偶的杆都是特解; 而在主轴坐标系中还要求满足关系 $\omega \times M = 0$; 在 Frenet 坐标系中要求满足关系 $\Phi \times M = 0$.

2) 在固定坐标系中当主矢为零且原始弯扭度分量 $\omega_i^0 = 0$ 时, 特解方程等同于无力矩刚体的定点转动方程, 此时存在3个特解. 绕最大或最小刚度主轴的“转动”是稳定的, 绕中间刚度主轴的“转动”是不

稳定的. 当主矢非零, 且原始弯扭度分量 ω_i^0 满足条件 (16) 式时, 常值特解为直杆, 并且压杆一定稳定而拉杆一般不稳定(图 1). 进一步, 当原始曲率为零时, 稳定判据为 Greenhill 判据.

3) 只有原始扭率而无原始曲率的圆截面杆相对截面主轴坐标系的特解流形中的每一点在一次近似意义下稳定, 因而平衡流形在一次近似意义下稳定.

4) 相对 Frenet 坐标系的特解流形是一个 3 维底空间 1 维纤维的丛空间. 对原始曲率分量 $\omega_2^0 = 0$, 且 $\chi_s = \pi/2$ 时 X_F 的一个子流形的稳定性数值分析表明, 截面的抗弯刚度对稳定性有显著的影响.

5) 本文讨论的弹性杆的 Lyapunov 稳定性本质上不同于 Euler 稳定性, 因此不可以用 Euler 稳定性的概念去理解 Lyapunov 稳定性.

- [1] Love A E H 1927 *A Treatise on Mathematical Theory of Elasticity* (New York : Dover)
- [2] Chen Z D 1994 *Theory of Lager Deformation of Rod , Plate and Shell* (Beijing : Science Press)(in Chinese)[陈至达 1994 杆、板、壳大变形理论(北京 : 科学出版社)]
- [3] Liu Y Z 2003 *Mech. Prac.* **25** 1(in Chinese)[刘延柱 2003 力学与实践 **25** 1]
- [4] Benham C J 1979 *Biopolymers* **18** 609
- [5] Vologodskii A V , Anshelevich V V *et al* 1979 *Nature* **280** 294
- [6] Tobias I , Swigon D , Coleman B D 2000 *Phys. Rev. E* **61** 747
- [7] Coleman B D , Swigon D , Tobias 2000 *Phys. Rev. E* **61** 759
- [8] Tanaka F , Takahashi H 1985 *J. Chem. Phys.* **83** 6017
- [9] Hunt N G , Hearst J E 1991 *J. Chem. Phys.* **95** 9329
- [10] Schlick T 1995 *Biology* **5** 245
- [11] Mergell B , Ejtehadi M R , Everaers R 2003 *Phys. Rev. E* **68** 21911
- [12] Goriely A , Shipman P 2000 *Phys. Rev. E* **61** 4508
- [13] Liu Y Z , Xue Y , Chen L Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2424(in Chinese)[刘延柱、薛 纭、陈立群 2004 物理学报 **53** 2424]
- [14] Liu Y Z 2001 *Chin. Quart. Mech.* **22** 147(in Chinese)[刘延柱 2001 力学季刊 **22** 147]
- [15] Liu Y Z 2002 *J. Shanghai Jiaotong Univ.* **36** 1587(in Chinese)

- [刘延柱 2002 上海交通大学学报 **36** 1587]
- [16] Fu J L , Chen L Q , Xue Y *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2683(in Chinese)[傅景礼、陈立群、薛 纭等 2002 物理学报 **51** 2683]
- [17] Fu J L , Chen L Q , Xue Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 256(in Chinese)[傅景礼、陈立群、薛 纭 2003 物理学报 **52** 256]
- [18] Wu D R 1981 *Differential Geometry* (Beijing : Higher Education Press) p38(in Chinese)[吴大任 1981 微分几何讲义(北京 : 高等教育出版社)第 38 页]
- [19] Liu Y Z 2001 *Advanced Dynamics* (Beijing : Higher Education Press) p118(in Chinese)[刘延柱 2001 高等动力学(北京 : 高等教育出版社)第 118 页]
- [20] Van der Huijden G H M *et al* 1998 *SIAM J. Appl. Math.* **59** 198
- [21] Writers of Handbook of Mathematics 1979 *Handbook of Mathematics* (Beijing : Higher Education Press) p97(in Chinese)[数学手册编写组 1979 数学手册(北京 : 高等教育出版社)第 97 页]
- [22] Mei F X , Shi R C , Zhang Y F *et al* 1997 *Stability of Motion of Constrained Mechanical Systems* (Beijing : Beijing Institute of Technology Press) p119(in Chinese)[梅凤翔、史荣昌、张永发等 1997 约束力学系统的运动稳定性(北京 : 北京理工大学出版社)第 119 页]

Special solutions of Kirchhoff equations and their Lyapunov stability

Xue Yun^{1 2)} Chen Li-Qun¹⁾ Liu Yan-Zhu³⁾

¹⁾(*Institute of Applied Mathematics and Mechanics , Shanghai University , Shanghai 200072 ,China*)

²⁾(*School of Mechanical and Automation Engineering , Shanghai Institute of Technology , Shanghai 200233 ,China*)

³⁾(*Department of Engineering Mechanics , Shanghai Jiaotong University , Shanghai 200030 ,China*)

(Received 1 August 2003 ; revised manuscript received 19 April 2004)

Abstract

The special solutions of the Kirchhoff equations , which are those relative to fixed coordinate system , principal coordinate system of a cross section of the rod , and Frenet coordinate system of the central line of the rod , respectively , are derived in this paper. Lyapunov stability of these solutions is discussed by use of theory on the first-approximation stability , and at the same time stability area in parameter 's plane is given.

Keywords : super-thin elastic rod , Kirchhoff equation , special solution , Lyapunov stability

PACC : 0320 , 0340D