

两类 2 + 1 维非线性波动方程的线性叠加解

来 炯 静 张 解 放

(浙江师范大学非线性物理研究所, 金华 321004)

(2003 年 12 月 31 日收到, 2004 年 3 月 12 日收到修改稿)

借助于计算机软件 Maple 将线性叠加方法应用于 2 + 1 维广义非线性 Schrödinger 和 Boussinesq 方程, 给出此两类方程不同周期的线性叠加解以及与此类周期解相应的速度值, 求解过程严格基于一类新近发现的 Jacobi 椭圆函数周期循环特性及其推论.

关键词: Jacobi 椭圆函数, 线性叠加方法, 周期循环特性, 非线性 Schrödinger 方程, Boussinesq 方程

PACC: 0340K, 0290, 0230

1. 引言

由于自然现象本质上是是非线性的, 非线性物理的研究正吸引着越来越多科学家的注意力. 为了研究非线性问题, 如孤立子、混沌、湍流、吸引子和分形等, 人们往往借助于描述它们的数学模型——非线性偏微分方程. 因此, 寻找非线性偏微分方程的精确解就显得非常重要. 30 多年来, 非线性数学物理研究领域颇具特色的成就之一就是创造了求非线性偏微分方程的精确解, 特别是求孤波解的各种精巧方法, 如反散射方法、双线性算子方法、Bäcklund 变换(BT)等^[1-6]. 近年来, 由于符号计算系统的问世, 一些直接代数方法的研究变得非常活跃^[7-9]. Jacobi 椭圆函数展开法^[10]的提出, 使我们不仅能求得非线性方程的冲击波解和孤波解, 而且还可求得这些方程的周期解. 最近, Khare 和 Sukhatme^[11]提出了一个有趣的事实, 即如果将波动方程如 KdV, mKdV 等的椭圆函数标准周期解线性叠加起来, 则所得之和仍为原方程的解. 这个令人意想不到的结果严格基于一类新近发现的 Jacobi 椭圆函数周期循环特性^[12]及其推论. 到目前为止, 此法已经成功推广到多类非线性波动模型, 它不仅适用于可积模型, 如 KdV 和 KP 方程, 而且也适用于不可积模型, 如 $\lambda\phi^4$ ^[13]模型. 当然其基本前提是这些模型的周期解都可表示为 Jacobi 椭圆函数的级数展开式, 如

$$u(x, t) = \sum_j \operatorname{sn}^j(\alpha[x - ct], m). \quad (1)$$

本文利用线性叠加方法进一步研究两类 2 + 1

维非线性波动模型, 包括广义的非线性 Schrödinger 方程(NLSE)

$$i\psi_t + \zeta(\psi_{xx} + \psi_{yy}) + l|\psi|^2\psi = 0 \quad (2)$$

和广义的 Boussinesq 方程

$$u_{tt} - u_{xx} - \epsilon^2 \left[u_{yy} - \tau u_{xxxx} + \left(\frac{u^{\delta+1}}{\delta+1} \right)_{xx} \right] = 0, \quad \tau = \pm 1. \quad (3)$$

方程(2)首先由 Zakharov^[14]提出, 在凝聚态、场论、光学等领域都有重要的应用, 是一个重要的非线性演化方程, 其中 ζ, l 为常数, 对于不同的物理分支, 函数 ψ 具有不同的物理意义. 在非线性光学中, 方程(2)可描述强激光束在介质中的传播过程. 在这一模型中, ψ 表示电场振幅, t 为激光束在传播方向上行进的距离, x 和 y 分别为空间横向坐标. 方程(3)最早由 Ablowitz 和 Wang 提出^[15], 它用来描述平衡弱非线性项和色散项后, 横向缓慢移动的水波运动. 通过变量变换 $x = x_1 - t, T = \epsilon^2 t/2, \epsilon = \epsilon_1/2$ 且略去包含 $\epsilon_1^2 u_{TT}$ 的项, 则方程(3)即转化为广义的 Kadomtsev-Petviashvili (KP)方程.

2. (2 + 1)维广义非线性 Schrödinger 方程

对于方程(2), 由于 ψ 为复数, 可假设其具有形式为

$$\psi(x, y, t) = u(\xi) e^{i(\kappa\xi + \eta t)}, \quad \xi = x + y - vt, \quad (4)$$

其中 $u(\xi)$ 和 $\kappa(\xi)$ 为实函数. 把(4)式代入方程(2)中, 方程(2)可转化为

$$r'(\xi) = \frac{1}{4\zeta} \left(v + \frac{A}{u^2} \right), \quad (5)$$

$$u'^2(\xi) = -\frac{l}{4\zeta} u^4 + \frac{(8\zeta n - v^2)}{16\zeta^2} u^2 - \frac{A^2}{16\zeta^2 u^2} - \frac{B}{\zeta}, \quad (6)$$

其中 A 和 B 为积分常数. 显然, 对方程(5)积分一次, r 函数便可方便获得. 于是, 整个问题即可转化为寻求方程(6)的解.

由 Jacobi 椭圆函数展开法可知, 若 $l\zeta > 0$, 方程的行波解为

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= 2 \frac{\sqrt{l\zeta}}{l} \operatorname{dn}(\xi_1), \\ r_1 &= \frac{v_1 \xi_1}{4\zeta}, \\ A &= 0 \\ B &= -\frac{4\zeta^2(m^2 - 1)}{l}, \\ v_1^2 &= 8\zeta(n + 2\zeta m^2 - 4\zeta) \end{aligned} \quad (7)$$

和

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= 2 \frac{\sqrt{l\zeta}m}{l} \operatorname{cn}(\xi_1), \\ r_1 &= \frac{v_1 \xi_1}{4\zeta}, \\ A &= 0 \\ B &= \frac{4\zeta^2 m(m^2 - 1)}{l}, \\ v_1^2 &= 8\zeta(n - 4\zeta m^2 + 2\zeta). \end{aligned} \quad (8)$$

若 $l\zeta < 0$, 则方程的行波解为

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= 2 \frac{\sqrt{-l\zeta}m}{l} \operatorname{sn}(\xi_1), \\ r_1 &= \frac{v_1 \xi_1}{4\zeta}, \\ A &= 0, \\ B &= \frac{4\zeta^2 m^2}{l}, \\ v_1^2 &= 8\zeta(n + 2\zeta m^2 + 2\zeta). \end{aligned} \quad (9)$$

这里 $\operatorname{sn}(\xi)$, $\operatorname{cn}(\xi)$, $\operatorname{dn}(\xi)$ 分别为 Jacobi 椭圆正弦、余弦和第三类 Jacobi 椭圆函数, m ($0 < m < 1$) 为模数. 注意到, 当 $m \rightarrow 1$ 时, 方程(7)(8)和(9)相应退化为常见的孤波解

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= 2 \frac{\sqrt{l\zeta}}{l} \operatorname{sech}(\xi_1), \\ r_1 &= \frac{v_1 \xi_1}{4\zeta}, \\ A &= B = 0, \end{aligned}$$

$$v_1^2 = 8\zeta(n - 2\zeta) \quad (n \geq 2\zeta) \quad (10)$$

和

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= 2 \frac{\sqrt{-l\zeta}}{l} \tanh(\xi_1), \\ r_1 &= \frac{v_1 \xi_1}{4\zeta}, \\ A &= 0, \\ B &= \frac{4\zeta^2}{l}, \\ v_1^2 &= 8\zeta(n + 4\zeta). \end{aligned} \quad (11)$$

应该指出的是, 带有振幅 α 的更为广义的解也容易求得, 只要 $\psi(x, y, t)$ 是 NLSE 的解, 则 $\alpha\psi(\alpha x, \alpha y, \alpha^2 t)$ 同样也满足该方程.

按照线性叠加法思想, 考虑解(7)式的线性叠加解形式为

$$\begin{aligned} u_p(x, y, t) &= 2 \frac{\sqrt{l\zeta}}{l} \sum_{j=1}^p d_j, \\ d_j &= \operatorname{dn}\left[\xi_p + \frac{(j-1)K(m)}{p}, m\right], \\ \xi_p &= (x + y - v_p t), \end{aligned} \quad (12)$$

其中 p 为任意整数, 很明显, 当 $p = 1$ 时(12)式即为原标准解(7)式, 周期为 $2K(m)$; 对于其他 p 值, 我们则可得周期为 $2K(m)/p$ 的线性叠加解, 其中 $K(m)$ 为第一类完全椭圆积分. 根据性质^[12], 我们可推得

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^p d_j\right)^2 &= \sum_{j=1}^p d_j^2 + C(p, m), \\ \left(\sum_{j=1}^p d_j\right)^3 &= \sum_{j=1}^p d_j^3 + D(p, m) \sum_{j=1}^p d_j^2 + E(p, m), \\ m^4 \sum_{j < k}^p s_j c_j s_k c_k &= F(p, m) \sum_{j=1}^p d_j^2 + G(p, m). \end{aligned} \quad (13)$$

(13)式中常数 C, D, E, F, G 的一些具体的计算值为

$$\begin{aligned} C(2, m) &= 2\sqrt{1-m^2}, \\ C(3, m) &= 2q(q+2), \\ C(4, m) &= 4\tilde{t}(1+\tilde{t}^2) + 4\tilde{t}^2, \\ D(2, m) &= 4F(2, m) = 4\sqrt{1-m^2}, \\ D(3, m) &= 4F(3, m) = \frac{8m^2 q}{1-q^2}, \\ D(4, m) &= 4F(4, m) = 4[2\tilde{t}(1+\tilde{t}^2) + \tilde{t}^2], \\ E(2, m) &= C(1-m^2), \\ E(3, m) &= 6q^2(q+2)^2 - 8(1-m^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(4, m) &= [4\tilde{t}(1 + \tilde{t}^2) + 4\tilde{t}^2] \\
&\quad + 8\tilde{t}^2(1 + \tilde{t}^2)^2 - 4\tilde{t}^4, \\
\alpha(2, m) &= \sqrt{1 - m^2}(m^2 - 2), \\
\alpha(3, m) &= m^2 - (2 - m^2)(1 + q)^2, \\
\alpha(4, m) &= -4\tilde{t}^3(1 + \tilde{t}^2) \\
&\quad - 2(2 - m^2)[\tilde{t}^2 + \tilde{t}(1 + \tilde{t}^2)],
\end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned}
\tilde{t} &= (1 - m)^{1/4}, \\
q &= \operatorname{dn}(2K(m)/3, m).
\end{aligned}$$

把 (12) 式代入方程 (6) 中, 并结合推论 (14) 式, 可得

$$\begin{aligned}
(16\zeta^2 D(p, m) - 8n\zeta + v_p^2 + 32\zeta^2 F(p, m) \\
- 16\zeta^2 m^2 + 32\zeta^2)d_j^2 + 16p\zeta^2(m^2 - 1) \\
+ 16\zeta^2 E(p, m) + 4B(p, m)l - 8n\zeta\alpha(p, m) \\
+ v_p^2\alpha(p, m) + 32\zeta^2\alpha(p, m) = 0,
\end{aligned} \quad (15)$$

其中 $p = 2, 3, \dots$, 由此可定得速度通式为

$$\begin{aligned}
v_p^2 &= 8\zeta[n + 2\zeta m^2 - 4\zeta - 2\zeta(D(p, m) \\
&\quad + 2F(p, m))].
\end{aligned} \quad (16)$$

这里 B 满足

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{4l}[-32\zeta^2\alpha(p, m) - 16\zeta^2 E(p, m) \\
&\quad + 8n\zeta\alpha(p, m) - v_p^2\alpha(p, m) \\
&\quad - 16p\zeta^2(m^2 - 1)], \quad p = 2, 3, \dots
\end{aligned} \quad (17)$$

当 $m = 0$ 时, 对于任意的 p 值,

$$D(p, 0) = 4F(p, 0) = 4(p^2 - 1)/3;$$

当 $m = 1$ 时,

$$D(p, 1) = 4F(p, 1) = 0.$$

则由 (15) 式可知, 仅当 $n \geq 4\zeta p^2$ 时, 解 v_p 才有效. 在此情况下, 当 m 从 0 趋于 1 时, v_p^2 也从 $8\zeta(n - 4\zeta p^2)$ 趋向 $8\zeta(n - 2\zeta)$. 除了上述叠加解之外, 特别地, 当 p 为奇数时, 对解 (8) 式进行线性叠加, 有

$$\begin{aligned}
u_p(x, y, t) &= 2\frac{\sqrt{l\zeta m}}{l}\sum_{j=1}^p \tilde{c}_j, \\
\tilde{c}_j &= \operatorname{cn}\left[\eta_p + \frac{4(j-1)K(m)}{p}, m\right], \\
\eta_p &= (x + y - v_p t).
\end{aligned} \quad (18)$$

同理, 由性质可推知

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^p \tilde{c}_j\right)^2 &= \sum_{j=1}^p \tilde{c}_j^2 + H(p, m), \\
\left(\sum_{j=1}^p \tilde{c}_j\right)^4 &= \sum_{j=1}^p \tilde{c}_j^4 + K(p, m)\sum_{j=1}^p \tilde{c}_j^2 + K(p, m), \\
\sum_{j < k}^p \tilde{c}_j \tilde{d}_j \tilde{c}_k \tilde{d}_k &= L(p, m)\sum_{j=1}^p \tilde{c}_j^2 + M(p, m).
\end{aligned} \quad (19)$$

把 (18) 式代入方程 (6) 结合推论 (19) 式, 显然有

$$\begin{aligned}
v_p^2 &= 8\zeta[n - 2\zeta m^2 K(p, m) + 2\zeta \\
&\quad - 4\zeta L(p, m) - 4\zeta m^2].
\end{aligned} \quad (20)$$

这里常数 H, I, J, L, M, B 的一些具体的计算值为

$$\begin{aligned}
H(3, m) &= -\frac{2q(q+2)}{(1+q)^2}, \\
m^2 K(3, m) &= 4I(3, m) \\
&= -4m^2 q \left[\frac{q+2}{(1+q)^2} + \frac{q}{1-q^2} \right], \\
K(3, m) &= \frac{8q^3(q+2)}{(1+q)(1-q^2)} \\
&\quad + \frac{6q^2(q+2)^2}{(1+q)^4},
\end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
M(3, m) &= 2m^2 \frac{q^3(q+2)}{(1+q)(1-q^2)} \\
&\quad - (1 - 2m^2) \frac{q(q+2)}{(1+q)^2}, \\
B(3, m) &= \frac{1}{4l}[-32\zeta^2 m^2 M(3, m) \\
&\quad - 16\zeta^2 m^4 K(3, m) \\
&\quad + m^2 H(3, m)(8n\zeta - v_3^2) \\
&\quad + 48\zeta^2 m^2(m^2 - 1)].
\end{aligned}$$

当 p 为奇数时, 对解 (9) 式进行线性叠加, 得

$$\begin{aligned}
u_p(x, y, t) &= 2\frac{\sqrt{-l\zeta m}}{l}\sum_{j=1}^p \tilde{s}_j, \\
\tilde{s}_j &= \operatorname{sn}\left[\eta_p + \frac{4(j-1)K(m)}{p}, m\right], \\
\eta_p &= (x + y - v_p t).
\end{aligned} \quad (22)$$

同理, 由性质可推得

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^p \tilde{s}_j\right)^2 &= \sum_{j=1}^p \tilde{s}_j^2 + R(p, m), \\
\left(\sum_{j=1}^p \tilde{s}_j\right)^4 &= \sum_{j=1}^p \tilde{s}_j^4 + S(p, m)\sum_{j=1}^p \tilde{s}_j^2 + T(p, m), \\
\sum_{j < k}^p \tilde{c}_j \tilde{d}_j \tilde{c}_k \tilde{d}_k &= U(p, m)\sum_{j=1}^p \tilde{s}_j^2 + Y(p, m).
\end{aligned} \quad (23)$$

把 (22) 式代入 (6) 式, 结合推论 (23) 式, 得

$$\begin{aligned}
v_p^2 &= 8\zeta[n + 2\zeta + 2\zeta m^2 + 2\zeta m^2 S(p, m) \\
&\quad - 4\zeta U(p, m)].
\end{aligned} \quad (24)$$

这里常数 R, S, T, U, Y, B 的一些具体的计算值为

$$\begin{aligned}
R(3, m) &= \frac{2(q^2 - 1)}{m^2}, \\
m^2 S(3, m) &= -4U(3, m) \\
&= 4m^2 \left[\frac{1}{1 - q^2} + \frac{q^2 - 1}{m^2} \right],
\end{aligned}$$

$$T(3, m) = \frac{\alpha(q^2 - 1)^2}{m^4} - \frac{8}{m^2},$$

$$Y(3, m) = \frac{(1 + m^2)(q^2 - 1)}{m^2} + 2,$$

$$B(3, m) = \frac{1}{4l} [48\zeta^2 m^2 - 16\zeta^2 m^4 T(3, m) + m^2 R(3, m)(v_3^2 - 8n\zeta) + 32\zeta^2 m^2 Y(3, m)]. \quad (25)$$

需要注意的是,对于偶数,线性叠加解(18)和(22)式不存在,但如果我们将基本解相乘,则所得积仍为方程的解.例如,当 $p=2$ 时,

$$u_2(x, y, t) = 2m^2 \frac{\sqrt{-l\zeta}}{l} \tilde{s}_1 \tilde{s}_2$$

为方程(6)的解,相应的速度满足

$$v_2^2 = 8\zeta(n + 8\zeta - 4\zeta m^2),$$

且

$$B = 4\zeta^2 m^4 / l.$$

对于更高的 p 值可作相似分析.

3. (2+1)维广义 Boussinesq 方程

对于方程(3),当 $\delta=1$ 时,方程的周期解为

$$u(x, y, t) = -12\tau\alpha^2 \operatorname{dn}^2(\alpha[x + \alpha\gamma y - v_1 t]) + \beta\alpha^2, \quad (26)$$

其中

$$v_1^2 = 1 + \epsilon^2 \alpha^2 [\beta - 4\tau(2 - m^2) + \gamma^2]. \quad (27)$$

当 $m \rightarrow 1$ 时,则解(26)式退化为孤波解

$$u(x, y, t) = -12\tau\alpha^2 \operatorname{sech}^2(\alpha[x + \alpha\gamma y - v_1 t]) + \beta\alpha^2, \quad (28)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{v_1^2 - 1}{\epsilon^2(\beta - 4\tau + \gamma^2)}}.$$

利用(26)式,我们可得线性叠加解

$$u_p(x, y, t) = -12\tau\alpha^2 \sum_{j=1}^p d_j^2 (\alpha[x + \alpha\gamma y - v_p t]) + \beta\alpha^2, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (29)$$

将(29)式代入(3)式,可得

$$\begin{aligned} & -24\tau\alpha^3 m^2 \left\{ [1 + \epsilon^2 \alpha^2 (4\tau m^2 + \beta - 8\tau \right. \\ & \left. - 12\tau W(p, m))] \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^p s_j c_j d_j \right. \\ & \left. + \alpha \epsilon^2 \gamma \frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^p s_j c_j d_j + v_p \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^p s_j c_j d_j \right\} = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

其中利用推论

$$\sum_{j=1}^p d_j^2 \sum_{k \neq j}^p s_k c_k d_k = W(p, m) \sum_{j=1}^p s_j c_j d_j. \quad (31)$$

容易证得

$$v_p^2 = \epsilon^2 \alpha^2 [\beta + 4\tau m^2 - 8\tau - 12\tau W(p, m) + \gamma^2] + 1, \quad (32)$$

其中 $W(p, m)$ 的一些具体计算值为

$$W(2, m) = 0,$$

$$W(3, m) = \frac{-\alpha(m^2 - 1 + q^2)}{1 - q^2}, \quad (33)$$

$$W(4, m) = -2\sqrt{1 - m^2}.$$

当 $m=0, 1$ 时,有

$$W(p, m=0) = -\frac{1}{3}(p-1)(p-2), \quad (34)$$

$$W(p, m=1) = 0.$$

4. 讨论和总结

人们会联想到,本文中出现的线性叠加解和原有的标准周期解之间是否有联系?实际上,进一步研究指出^[16],这些线性叠加解其实即为原标准周期解的另一种新颖的重写形式,只不过是变换了模数 m 的取值,为了方便起见,下面以 KdV 方程为例予以说明.

考虑 KdV 方程的多周期解^[17]

$$u(x, t) = -2\partial_x^2 \ln \zeta(z | B), \quad (35)$$

其中 $\zeta(z | B)$ 表示黎曼 ζ 函数,当 $g > 1$ 时, B 为 $g \times g$ 黎曼矩阵, $z = kx - \omega t$ 为矢量,在一周期情况下 ($g=1$) 解(35)式即可等价于

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -2\alpha^2 \operatorname{dn}^2(\xi_1, m) + \beta\alpha^2, \\ \xi_1 &= \alpha(x - v_1 \alpha^2 t), \\ v_1 &= 8 - 4m^2 - 6\beta, \end{aligned} \quad (36)$$

其中常数 $\beta\alpha^2$ 可通过适当的伽利略变换去除.当 $g=1$ 时,根据文献[18]中关于 ζ 函数的 Jacobi 无穷乘积公式,容易得到下列变换关系:

$$\begin{aligned} & \zeta(z - B/4 | B) \zeta(z + B/4 | B) \\ &= C_2 \zeta(z | B/2), \\ & \zeta(z - B/3 | B) \zeta(z | B) \zeta(z + B/3 | B) \\ &= C_3 \zeta(z | B/3), \end{aligned} \quad (37)$$

等等,其中 C_p 为 ζ 常量 ($p=2, 3, \dots$). (37) 式结构明确,方程左端代表 B 相同的 ζ 函数乘积,其自变量 z 平移周期的 $1/p$; 方程右端仅有一个的 ζ 函数,其

自变量与左端相同,但它的周期却变为左端的 B/p . 将方程 (37) 代入 (35) 式,我们即可得线性叠加解,这与自变量相同、周期缩短的原单个解其实是一样的. 类似地,上述出现的两类 $2+1$ 维模型以及其他非线性

性孤子系统也可作相同的分析,当然这些系统的周期解都可用 ζ 函数或者 Jacobi 椭圆函数来表示. 值得一提的是,虽然线性叠加法并未给出新解,但它有利于对非线性方程的解进行归类,有其可取之处.

-
- [1] Chen X J , Wang Y , Li B *et al* 1994 *Acta Phys. Sin.* **43** 1419 (in Chinese) 陈学俊、王 岩、李 波等 1994 物理学报 **43** 1419]
 - [2] Fan E G , Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]
 - [3] Ruan H Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 369 (in Chinese) 阮航宇 2001 物理学报 **50** 369]
 - [4] Hirota R 1973 *J. Math. Phys.* **14** 810 ;Chen L L 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2149 (in Chinese) 陈黎丽 1999 物理学报 **48** 2149]
 - [5] Zhang J F , Huang W H , Zheng C L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2676 (in Chinese) 张解放、黄文华、郑春龙 2002 物理学报 **51** 2676]
 - [6] Miura M P 1978 *Backlund Transformation* (Berlin : Springer Verlag) ;Lou S Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1937 (in Chinese) 楼森岳 1998 物理学报 **47** 1937] ;Zhang J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1648 (in Chinese) 张解放 2001 物理学报 **50** 1648]
 - [7] Hereman W , Takaoka M 1990 *J. Phys. A : Math. Gen.* **23** 4805
 - [8] Coffey M 1990 *SIAM J. Appl. Math.* **50** 1580
 - [9] Li Z B , Wang M L 1993 *J. Phys. A : Math. Gen.* **26** 6027
 - [10] Liu S K , Fu Z T , Liu S D *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) 刘式适、傅遵涛、刘式达等 2001 物理学报 **50** 2068]
 - [11] Khare A , Sukhatme U 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 244101 ;Cooper F , Khare A , Sukhatme U 2002 *J. Phys. A : Math. Gen.* **35** 10085
 - [12] Khare A , Sukhatme U 2002 *J. Math. Phys.* **43** 3798
 - [13] Rajaraman R 1978 *Solitons and Instantons* (Amsterdam : North Holland)
 - [14] Saied E A *et al* 2003 *J. Phys. A : Math. Gen.* **36** 6751
 - [15] Ablowitz M J , Wang X P 1997 *Stud. Appl. Math.* **98** 121
 - [16] Jaworski M , Lakshmanan M 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 239401
 - [17] Novikov S , Manakov S V , Pitaevskii L P *et al* 1984 *The Inverse Scattering Method* (New York : Consultants Bureau)
 - [18] Whittaker E T , Watson G N 1927 *A Course of Modern Analysis* (Cambridge : Cambridge University Press)

More on linear superposition method for the ($2+1$)-dimensional nonlinear wave equations

Lai Xian-Jing Zhang Jie-Fang

(College of Mathematics Physics and Information Science , Zhejiang Normal University , Jinhua 321004 , China)

(Received 31 December 2003 ; revised manuscript received 12 March 2004)

Abstract

In this paper , we find periodic solutions with different periods and velocities to the $(2+1)$ -dimensional general Schrödinger and Boussinesq equations by making appropriate linear superpositions of known periodic travelling wave solutions involving Jacobi elliptic functions. It is noteworthy that this linear superposition procedure works by virtue of some remarkable new identities involving elliptic functions.

Keywords : Jacobi elliptic function , linear superposition method , cyclic identities , nonlinear Schrödinger equation , Boussinesq equation

PACC : 0340K , 0290 , 0230