

衰减球面冲击波波阵面自模拟运动特性^{*}

卞保民 杨 玲 李振华 陈 笑 贺安之 沈中华

(南京理工大学应用物理系, 南京 210094)

(2003 年 2 月 17 日收到, 2003 年 5 月 21 日收到修改稿)

指出衰减球面冲击波波阵面传播过程属于自模拟运动, 提出衰减球面冲击波波阵面传播自模拟函数的概念, 在此基础上推导出均匀介质中衰减球面冲击波波阵面自模拟传播公式. 衰减球面冲击波波阵面自模拟传播公式与实验测试结果完全符合.

关键词: 自模拟运动, 衰减球面冲击波

PACC: 6120J, 4740, 6280

1. 引言

量纲分析自模拟方法是流体力学中一种重要研究方法. 在理论研究求解一些复杂问题时, 用部分主定参量的组合作为微分方程的自变量, 可以使自变量的数目减少, 降低微分方程组的阶. 对一维不定常运动, 就可能把偏微分方程转化成常微分方程求解^[1]. 强爆炸条件下的球面冲击波前阵面传播 Taylor 公式, 就是一个用量纲分析方法直接推导出来的著名例子^[2].

衰减球面冲击波波阵面的传播过程作为冲击波衰减运动最典型的问题之一, 理论上至今还没有描述衰减球面冲击波波阵面传播全过程的运动方程. 点爆炸条件下球面冲击波波阵面传播 Taylor 公式只适用于强爆炸条件下中场区域冲击波波阵面的传播过程, 对冲击波衰减过程的初始($t \rightarrow 0$)状态和终了($t \rightarrow \infty$)状态, 均不适用. 本文分析指出衰减球面冲击波波阵面传播过程属于自模拟运动, 提出均匀介质中衰减球面冲击波波阵面传播自模拟函数的概念, 并推导出衰减球面冲击波自模拟波阵面传播公式. 新的波阵面传播公式将 Taylor 公式包含在其中, 并与球面冲击波衰减全过程实验测试结果一致.

2. 衰减球面冲击波波阵面自模拟特性函数

均匀介质中点爆炸过程产生球面冲击波. 设瞬

间点爆炸源的膨胀引起冲击波层出现后, 在一段时间内, 冲击波的强度会随着能量的转化而增强, 冲击波波阵面的膨胀速度随之增大, 直至达到极大值. 因此, 球面冲击波波阵面衰减传播过程为: $t = t_0$ 时刻, 存在一个半径为 r_0 的球面波阵面, 此球面波阵面的膨胀速度为极大值, 其数值 $D(t_0) = M_0 v_0$ (M_0 , v_0 分别为初始波阵面马赫数和介质中的声速), 此时对应的波阵面加速度 $\left. \frac{dD}{dt} \right|_{t=t_0} = 0$. 当 $t > t_0$ 时, 衰减球面冲击波波阵面的膨胀速度不断减小, 直至转化成球面声波脉冲, 最终以声速 v_0 在介质中传播, 波强度将继续减弱, 直到趋于零值.

冲击波形成初期, 波后粒子的动能远大于粒子之间的相互作用势能, 所以爆炸球将作为理想气体处理, 其比热容比为 γ . 根据冲击波关系式可知, 对于初始时刻, 当波阵面介质的状态确定后, 由初始马赫数就能够确定波后爆炸气体的所有状态参数^[3]. 爆炸过程转移给冲击波的总能量、气体容变弹性模量影响初始球面波阵面处的马赫数极大值^[4]. 未受扰动介质的压强、密度对冲击波的影响表现为介质的声学阻抗.

在“速度空间”坐标系中, 衰减球面冲击波波阵面的运动对应于一系列同心球面半径的变化, 其初终边界条件分别为 $\lim_{t \rightarrow t_0} D = M_0 v_0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} D = v_0$. 用衰减球面冲击波波阵面的所有不为零的运动参量(M_0 , r_0 , t_0 , r , t , v_0)能够构成一个无量纲函数 B_M 来描述

^{*} 国家自然科学基金(批准号 60378003)资助的课题.

波阵面的运动过程

$$B_M = 1 - \frac{(r - r_0)}{M_0 v_0 (t - t_0)} = 1 - \frac{\bar{M}}{M_0}, \quad (1)$$

函数 B_M 能以统一形式在速度空间内描述衰减球面冲击波波阵面的运动全过程. B_M 值的大小反映球面冲击波波阵面在衰减传播时间内的波阵面平均速度相对于波阵面初速度的衰减情况. 并且有

$$\lim_{t \rightarrow t_0+0} B_M \rightarrow 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} B_M \rightarrow 1 - \frac{1}{M_0}. \quad (2)$$

在 (1) 式中取与时间坐标有关的无量纲变量 β

$$\beta = \frac{r_0}{v_0(t - t_0)} = \frac{\tau_0}{(t - t_0)}, \quad (3)$$

变量 β 为正值, 且随冲击波的衰减过程单调减小. r_0, τ_0 分别作为反映球面冲击波形成过程的特征半径、特征时间.

衰减球面冲击波波阵面的运动是中心对称的, 波阵面半径、波阵面平均速度只与时间 t 有关. 所以函数 B_M 也只是球面冲击波衰减时间 t 的函数. 函数 B_M 的建立, 未涉及球面冲击波的具体形成过程 (化学爆炸冲击波、激光等离子体冲击波或核爆炸冲击波), 也没有对各向同性传播介质提出特殊要求 (均匀的气体或液体). 所以, 函数 B_M 的形式具有一般性, 它反映所有衰减球面冲击波波阵面传播过程的共同特性.

衰减球面冲击波波阵面传播问题所对应的主定参量组应该为 $(v_0, r_0, t_0, r, t, M_0, \gamma)$, 其中声速 v_0

$= \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$ 是由气体压强 p_0 和密度 ρ_0 构成主定参

量. 给定一组主定参量, 衰减球面冲击波波阵面传播的全过程就由函数 B_M 完全确定. 函数 B_M 存在于球面冲击波波阵面衰减的全过程, 其形式属于自模拟运动函数^[5]. 据此得到以下结论: 衰减球面冲击波波阵面的传播全过程具有自模拟特性. 并且, 定义函数 B_M 为衰减球面冲击波波阵面自模拟特性函数. 无量纲函数 $\beta(t)$ 即为衰减球面冲击波波阵面传播对应的自模拟变量.

3. 衰减球面冲击波波阵面自模拟传播公式

函数 B_M 反映衰减球面冲击波波阵面的运动状态. 除运动参量外不直接涉及波阵面的其他物理参数. 考虑到函数 B_M 一定含有一个以 $\beta(t)$ 为自变量

的无量纲函数 $f(\beta)$ ^[6], 以及冲击波衰减率必然与自身强度有关. 设衰减球面冲击波波阵面自模拟函数 B_M 随函数 $f(\beta)$ 的变化率与 B_M 成正比, 即存在下列微分方程:

$$\frac{\partial B_M}{\partial f} = B_M, \quad (4)$$

函数 B_M 的一般解为

$$B_M = A e^{f(\beta)}. \quad (5)$$

容易证明, 当 $f(\beta)$ 函数取下列形式

$$f(\beta) = - \left(\frac{\tau_0}{(t - t_0)} \right)^n \quad (6)$$

时, 函数 B_M 的解式满足 (2) 式的要求, 具体形式为

$$B_M = \left(1 - \frac{1}{M_0} \right) \exp \left[- \left(\frac{\tau_0}{(t - t_0)} \right)^n \right]. \quad (7)$$

由于本问题还存在一个反映初始时刻冲击波源气体特性的独立无量纲参量 γ , 根据自模拟运动的要求 (7) 式中指数 n 只能是 γ 的函数. 即有

$$n = n(\gamma). \quad (8)$$

由 (1) (7) 和 (8) 式可得衰减球面冲击波波阵面传播公式

$$r = M_0 v_0 t \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{M_0} \right) \exp \left[- \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^n \right] \right\} + r_0. \quad (9)$$

为书写方便并不失一般性 (9) 式中令冲击波衰减开始时刻对应于 $t_0 = 0, \tau_0 = \frac{r_0}{v_0}$. 衰减球面冲击波波阵面的传播速度为

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= M_0 v_0 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{M_0} \right) \left[1 + n \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^n \right] \right. \\ &\quad \times \exp \left[- \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^n \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

衰减球面冲击波波阵面的加速度为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= - (M_0 - 1) \frac{v_0^2}{r_0} n \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^{n+1} \left[1 - n + n \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^n \right] \\ &\quad \times \exp \left[- \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^n \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

因任何衰减球面冲击波波阵面的加速度不得大于零, 由 (11) 式可得

$$0 < n(\gamma) \leq 1. \quad (12)$$

考虑到 γ 为球面冲击波形成时刻爆炸源气体的比热容比, 其满足 $2 > \gamma > 1$, 故取 (8) 式中 $n = 2 - \gamma$. 所以衰减球面冲击波波阵面传播公式为^[7]

$$r = M_0 v_0 t \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{M_0} \right) \exp \left[- \left(\frac{\tau_0}{t} \right)^{2-\gamma} \right] \right\} + r_0. \quad (13)$$

从(9)–(11)式可以看出,衰减球面冲击波波阵面的全部待求量无量纲化后只依赖于自模拟变量函数 $\beta = \frac{\tau_0}{t} = \frac{r_0}{v_0 t}$, 它们正是所求衰减球面冲击波波阵面的一组模拟解. 由(11)式可得冲击波衰减初始时刻波阵面加速度值为零, 即波阵面初速度为极大值. 由(11)式很容易证明, 对应于初始时刻(13)式对时间的任何大于二阶的高阶导数值均为零.

在(7)式中作自变量坐标变换 $\eta = \left(\frac{\tau_0}{t}\right)^{2-\gamma}$, 则可得更一般性的衰减球面冲击波波阵面自模拟特性函数表达式

$$B = \frac{M_0 B_M}{M_0 - 1} = e^{-\eta}. \quad (14)$$

显然, 在新坐标 η 空间内, 函数 B 对所有的衰减球面冲击波波阵面传播过程完全等价. 因此, 可以认为(14)式反映了所有衰减球面冲击波波阵面传播自模拟的基本特性.

4. 衰减球面冲击波波阵面自模拟传播公式与实验结果的比较

Taylor 研究点爆炸自模拟问题时不计爆炸源初始半径, 取的主定参量分别为波阵面半径 r 及对应时刻 t 、空气介质密度 ρ_0 和压强 p_0 、爆炸初能量 E_0 和波后气体的多方指数 γ . 用上述主定参量, Taylor 组成三个无量纲量分别为 γ , $\xi = \frac{\rho_0^{1/5} r}{E_0^{1/5} t^{2/5}}$ 和 $\eta = \frac{p_0^{5/6} t}{E_0^{1/3} \rho_0^{1/2}}$. 在此基础上 Taylor 指出, 只有当爆炸很强, E_0 很大, p_0 相对可以忽略不计, $\eta \rightarrow 0$, 点爆炸运动将依赖于惟一的无量纲变量 ξ , 波阵面的运动是自模拟的, 并推导出点源球面冲击波波阵面速度传播 Taylor 公式为^[8]

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2}{5} c (E_0/\rho_0)^{1/5} t^{-3/5}, \quad (15)$$

式中 c 为与 γ 有关的待定无量纲常数. 尽管对衰减球面冲击波波阵面传播过程的初始状态和终了状态 Taylor 公式均不适用, 但是, 用 Taylor 公式计算的波阵面传播数据与美国第一颗原子弹爆炸测量的结果符合得相当好^[9], 并且用该公式还推算出该原子弹的爆炸当量. 对衰减球面冲击波自模拟波阵面传播公式(13), 在球面冲击波衰减的初始阶段, 时间满足

$t \ll \tau_0$ 时(10)式中 $\exp\left[-\left(\frac{\tau_0}{t}\right)^{2-\gamma}\right] \approx 0$, 则有

$$\frac{dr}{dt} \approx M_0 v_0. \quad (16)$$

对于满足条件 $M_0 \gg 1$ 的空中强爆炸过程产生的衰减球面冲击波, 爆炸以后不久, 当满足 $\tau_0 \ll t \ll \tau_0 M_0$ 时, 取 $\exp\left[-\left(\frac{\tau_0}{t}\right)^{2-\gamma}\right] \approx 1 - \left(\frac{\tau_0}{t}\right)^{2-\gamma}$ 由(10)式得

$$\frac{dr}{dt} \approx v_0 (\gamma - 1) (M_0 - 1) \tau_0^{2-\gamma} t^{-2+\gamma}. \quad (17)$$

(17)式与 Taylor 的波阵面传播公式(15)的形式相同(取 Taylor 主定参量 $\gamma = 1.4$, 则 $\gamma - 2 = -3/5$). 显然, 只有在初始马赫数非常大的条件下, Taylor 公式所描述的运动阶段持续时间较长, 才能够在实验中得到证实. 在核爆炸条件下, 对应的马赫数可达 $10^2 - 10^3$, 此时 Taylor 公式能够给出与衰减冲击波中场区域实验测试数据一致的结果.

最后, 对满足 $\tau_0 M_0 \ll t$ 的远场情况,

$$\exp\left[-\left(\frac{\tau_0}{t}\right)^{2-\gamma}\right] \approx 1,$$

可得

$$\frac{dr}{dt} \approx v_0. \quad (18)$$

(18)式表示冲击波最终衰减成以声速传播的脉冲声波. 在(10)式中, 当初始波阵面马赫数 $M_0 = 1$ 时, $\frac{dr}{dt} \approx v_0$, 即(9)式仍能表示介质中球面声波波阵面的传播过程.

图1分别给出1945年美国第一颗原子弹爆炸测量的结果(图1中圆圈中心点), Taylor 公式计算的结果^[4](图1中直线), 衰减球面冲击波自模拟波阵面传播公式(9)的计算结果(图1中曲线). 从图1能够清楚地看到(9)式纠正了 Taylor 公式对爆炸初期测量结果的特大偏差. 曲线的变化趋势与实验测量值符合得极好. 我们还将自模拟公式的计算结果与

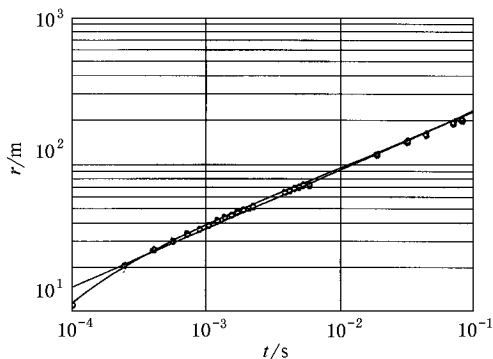


图1 由 New Mexico 得出的实验数据与 Taylor 公式计算结果, 自模拟公式计算结果的比较

脉冲激光等离子体空气冲击波波阵面传播测试数据进行了比较^[10],与纯水中^[11]和酒精中激光等离子体冲击波波阵面传播测试数据进行了比较(另有投稿)。结果表明自模拟公式的计算结果与不同条件下的实验测试数据一致。

5. 结 论

均匀介质中由点爆炸产生的衰减球面冲击波波阵面的传播过程属于自模拟运动。衰减球面冲击波波阵面传播问题的主定参量应该为 $(v_0, r_0, t_0, r, t, M_0, \gamma)$ 。由问题的主定参量构成的衰减球面冲击波波阵面自模拟特性函数 B ,反映了所有衰减球面冲击波波阵面传播全过程的最基本特性。根据自模拟相似原理推导出的衰减球面冲击波自模拟波阵面传播公式给出球面冲击波衰减全过程中冲击波随时间不断变化的边界条件,与实验结果完全一致。

从原理上分析,结合冲击波的运动边界条件,求解冲击波波后相应的流体力学微分方程组,可更准确地计算出衰减球面冲击波后物理参量的分布情况,也能够为冲击波向声波转化过程的研究提供可靠依据。

- [1] Li W X 2003 *One-Dimensional Nonsteady Flow and Shock Waves* (Beijing: National Defence Industry Press) p307 (in Chinese) 李维新 著 2003 一维不定常流与冲击波(北京:国防工业出版社)第 307 页]
- [2] Corrant R *et al* 1976 *Supersonic Flow and Shock Waves*(Beijing: Science Press)[Corrant R 等著,李维新等译,超声流速与冲击波(北京:科学出版社)第 376 页]
- [3] Corrant R *et al* 1976 *Supersonic Flow and Shock Waves*(Beijing: Science Press)[Corrant R 等著,李维新等译,超声流速与冲击波(北京:科学出版社)第 126 页]
- [4] Bian B M *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 809 (in Chinese)[卞保民等 2002 物理学报 **51** 809]
- [5] Gruschik H D *et al* 1986 *Gasdynamic Theory of Detonation*(Beijing: Science Press)[Gruschik H D 等著,周光泉等译,爆轰的气体动力学理论(北京:科学出版社)第 129 页]
- [6] Li W X 2003 *One-Dimensional Nonsteady Flow and Shock Waves*

- (Beijing: National Defence Industry Press) p318 (in Chinese) 李维新 著 2003 一维不定常流与冲击波(北京:国防工业出版社)第 318 页]
- [7] Bian B M *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 445 (in Chinese)[卞保民等 2000 物理学报 **49** 445]
- [8] Li W X 2003 *One-Dimensional Nonsteady Flow and Shock Waves* (Beijing: National Defence Industry Press) p325 (in Chinese) 李维新 著 2003 一维不定常流与冲击波(北京:国防工业出版社)第 325 页]
- [9] Zhang Y L *et al* 1987 *Foundations of Explosion Gas Dynamics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p399 (in Chinese) [张玉连等著,1987 爆炸气体动力学基础(北京:北京工业学院出版社)第 399 页]
- [10] Bian B M *et al* 2001 *Chin. J. Lasers* **28** 155 (in Chinese)[卞保民等 2001 中国激光 **28** 155]
- [11] Parlitz U 1996 *J. Acoust. Soc. Am.* **100** 153

The study of self-simulating properties of spherical shock front attenuation *

Bian Bao-Min Yang Ling Li Zhen-Hua Chen Xiao He An-Zhi Shen Zhong-Hua

(Department of Applied Physics, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China)

(Received 17 February 2003; revised manuscript received 21 May 2003)

Abstract

In an isotropic medium the self-simulating theory is used in characterizing the spherical shock front attenuation. We first deduce the self-simulating equation of decaying spherical shock front propagation. Then the decaying propagation equation of the spherical shock front is shown in good agreement with experimental data.

Keywords: self-simulating propagation, decaying spherical shock front

PACC: 6120J, 4740, 6280

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60378003).