第 53 卷 第 4 期 2004 年 4 月
1000-3290/2004/53(04)/0973-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.4, April, 2004

一类非谐振模型势径向平均值的解析表达式及其递推关系*

陈昌远 陆法林 孙东升 刘成林

(盐城师范学院物理系, 盐城 224002)

(2003 年 5 月 30 日收到; 2003 年 7 月 24 日收到修改稿)

获得了一类非谐振模型势, 即环形非球谐振子、非球谐振子和环形振子径向平均值的两个递推关系. 给出了这些非谐振模型势的部分径向幂次平均值的解析表达式.

关键词: 环形非球谐振子, 非球谐振子, 环形振子, 径向平均值, 解析表达式, 递推关系

PACC: 0365, 0230

1. 引 言

三维各向同性谐振子(spherical oscillator, 简记为 SO)是量子力学中精确可解的解析势之一, 对它的研究不仅具有重要的意义, 同时在核结构等具体问题中有着广泛的应用[1—3]. 近来, 人们对其径向平均值和矩阵元的计算问题做了很多的讨论[4—8], 文献[4,5]分别给出了径向矩阵元的通项公式和不同幂次矩阵元之间所满足递推关系, 文献[6]给出了偶次幂径向平均值的解析表达式, 文献[7,8]分别给出了径向波函数的递推关系和部分径向平均值及矩阵元的解析表达式.

然而, 对于大量的实际问题而言则往往是偏离谐振模型的, 因此研究一些非谐振模型如非球谐振子(non-spherical oscillator, 简记为 NSO)[9]、环形振子(ring-shaped oscillator, 简记为 RSO)[10—15] 和环形非球谐振子(ring shaped non-spherical oscillator, 简记为 RSNSO)[16,17] 等就不仅具有理论意义, 而且也具有重要的实际意义了. 在这些模型势中, 以 RSNSO 包含的物理内容最多, 其势函数为

$$V(r,\theta) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{A}{r^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{b}{r^2\sin^2\theta}, \tag{1}$$

式中 A 和 b 均为无量纲的实参数. 由(1)式可知, 当参数 $b=0$ 时, RSNSO 就退化为文献[9]讨论过的 NSO 当参数 $A=0$ 时, RSNSO 就退化为文献[10—15]讨论过的 RSO 当参数 A 和 b 均为零时, RSNSO 就退化为 SO 的情况. 由此可见, RSNSO 包含的物理内容最多. 在以前的工作中, 人们已经给出了这些非谐振模型势的径向矩阵元的通项公式及其递推关系, 然而并未能给出他们的解析表达式, 这对于实际应用和理论研究极为不便. 为此, 本文以 RSNSO 为例, 推导出这些非谐振模型势的径向平均值所满足的两个递推关系, 从而使得偶次幂平均值的计算变得极为方便. 然后计算了奇次幂的平均值. 由于 RSNSO 包含了 NSO, RSO 和 SO, 所以本文虽然以 RSNSO 为例计算径向幂次平均值, 但实际上是统一计算了 RSNSO, NSO 和 RSO 的径向幂次平均值, 它们的差别仅在于无量纲的实参数 A 和 b 的选取上.

2. 径向平均值的递推关系和偶次幂平均值的解析表达式

在球坐标系中, 取自然单位($\hbar = m = \omega = 1$), RSNSO 的 Schrödinger 方程为

$$\left[-\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}r^2 + \frac{A}{2r^2} + \frac{b}{2r^2\sin^2\theta}\right]\Psi(r,\theta,\varphi) = E\Psi(r,\theta,\varphi). \tag{2}$$

在球坐标系中分离变量, 得径向方程为[16,17]

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \left[2E - r^2 - \frac{L(L+1)}{r^2}\right]u(r) = 0, \tag{3}$$

式中

---

* 江苏省教育厅自然科学基金(批准号: 02KJB140007)和盐城师范学院专项基金资助的课题.

$$L=\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+4[A+(\sqrt{b+m^2}+s)(\sqrt{b+m^2}+s+1)]}-1\right]\quad(|m|,s=0,1,2,\cdots).\tag{4}$$

求解方程(3),得 RSNSO 的能谱方程和归一化的径向波函数分别为

$$\begin{aligned}E&=2n_r+L+3/2\\&=2n_r+\frac{1}{2}\sqrt{1+4[A+(\sqrt{b+m^2}+s)(\sqrt{b+m^2}+s+1)]}+1\quad(n_r,|m|,s=0,1,2,\cdots),\end{aligned}\tag{5}$$

$$u_{n_rL}(r)=N_{n_rL}r^{L+1}\mathrm{e}^{-r^2/2}\mathrm{F}(-n_r,L+3/2,r^2),\tag{6}$$

式中 $\mathrm{F}(\alpha,\gamma,x)$是合流超几何函数,归一化常数

$$N_{n_rL}=\sqrt{\frac{2\Gamma(n_r+L+3/2)}{n_r![\Gamma(L+3/2)]^2}}.\tag{7}$$

由此可知,RSNSO 的能谱和径向波函数实际上由三个量子数 n_r,$|m|$,s 共同决定,但由于$|m|$和 s 共同确定了 L,所以径向状态将由 n_r 和 L 这两个量子数决定.利用合流超几何函数和广义拉盖尔多项式的关系[18]

$$\mathrm{F}(-n,\mu+1,z)=\frac{n!\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+1)}\mathrm{L}_n^{\mu}(z),\tag{8}$$

归一化的径向波函数可改写为

$$u_{n_rL}(r)=\widetilde{N}_{n_rL}r^{L+1}\mathrm{e}^{-r^2/2}\mathrm{L}_{n_r}^{L+1/2}(r^2),\tag{9}$$

式中归一化常数

$$\widetilde{N}_{n_rL}=\sqrt{\frac{2n_r!}{\Gamma(n_r+L+3/2)}}.\tag{10}$$

RSNSO 的径向幂次平均值定义为

$$\begin{aligned}&\langle n_rL|r^s|n_rL\rangle\\&=\int_0^\infty r^s[u_{n_rL}(r)]^2\mathrm{d}r\\&=\frac{[N_{n_rL}]^2}{2}\int_0^\infty(r^2)^{(2L+s+1)/2}\mathrm{e}^{-r^2}\\&\quad\times[\mathrm{F}(-n_r,L+3/2,r^2)]^2\mathrm{d}(r^2).\end{aligned}\tag{11}$$

含有合流超几何函数的一个积分公式是[19]

$$J_v=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-kz}z^{v-1}[\mathrm{F}(-n,\gamma,kz)]^2\mathrm{d}z,\tag{12}$$

式中 n 是正整数,$\mathrm{Re}v>0$,以保证积分收敛.利用(12)式,(11)式可以改写成

$$\langle n_rL|r^s|n_rL\rangle=\frac{1}{2}[N_{n_rL}]^2J_{L+(3+s)/2},\tag{13}$$

式中 $k=1$,$v=L+(3+s)/2$,$\gamma=L+3/2$.积分 J_v 有如下的关系[19]:

$$J_{\gamma+P}=\frac{(\gamma-p-1)(\gamma-p)\cdots(\gamma+p-1)}{k^{2p+1}}J_{\gamma-p-1},\tag{14}$$

式中 p 是任意整数,为此取为 s 偶数,并令 $p=s/2$,则有

$$\begin{aligned}J_{L+(3+s)/2}&=(L+3/2-s/2-1)(L+3/2-s/2)\cdots\\&\quad\times(L+3/2+s/2-1)J_{L+(3-(s+2))/2}.\end{aligned}\tag{15}$$

仿照(13)式,$r^{-(s+2)}$的平均值可表示成

$$\langle n_rL|r^{-(s+2)}|n_rL\rangle=\frac{1}{2}[N_{n_rL}]^2J_{L+(3-(s+2))/2}.\tag{16}$$

将(13)和(16)式代入(15)式得

$$\begin{aligned}\langle n_rL|r^s|n_rL\rangle&=(L+1/2-s/2)\\&\quad\times(L+3/2-s/2)\cdots(L+1/2+s/2)\\&\quad\times\langle n_rL|r^{-(s+2)}|n_rL\rangle.\end{aligned}\tag{17}$$

(17)式即为正负偶次幂径向平均值之间所满足的递推关系.下面我们推导不同幂次平均值之间所满足的另一个递推关系.

对于状态 n_rL,将(5)式代入(3)式得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2u_{n_rL}(r)}{\mathrm{d}r^2}+\left[(4n_r+2L+3)\right.\\&\left.\quad-r^2-\frac{L(L+1)}{r^2}\right]u_{n_rL}(r)\\&=0.\end{aligned}\tag{18}$$

用 $r^su_{n_rL}(r)$ 乘(18) 式的两端并积分$\int_0^\infty\cdots\mathrm{d}r$,明显地,方括号内的三项分别是 r^s,r^{s+2} 和 r^{s-2} 的平均值.而第一项分部积分二次得

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty r^su_{n_rL}(r)\frac{\mathrm{d}^2u_{n_rL}(r)}{\mathrm{d}r^2}\mathrm{d}r\\&=r^su_{n_rL}(r)\frac{\mathrm{d}u_{n_rL}(r)}{\mathrm{d}r}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty\Big(r^s\frac{\mathrm{d}u_{n_rL}(r)}{\mathrm{d}r}\\&\quad+sr^{s-1}u_{n_rL}(r)\Big)\frac{\mathrm{d}n_{n_rL}(r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r\\&=\left[r^su_{n_rL}(r)\frac{\mathrm{d}u_{n_rL}(r)}{\mathrm{d}r}-\frac{s}{2}r^{s-1}(u_{n_rL}(r))^2\right]\Big|_0^\infty\\&\quad+\frac{s(s-1)}{2}\langle n_rL|r^{s-2}|n_rL\rangle\end{aligned}$$

$$-\int_0^\infty r^s\left(\frac{\mathrm{d}u_{n_rL}(r)}{\mathrm{d}r}\right)^2\mathrm{d}r. \tag{19}$$

如果约定 s 的取值满足下列条件：

$$r^s u_{n_rL}(r)\frac{\mathrm{d}u_{n_rL}(r)}{\mathrm{d}r}\bigg|_0^\infty=0,\quad r^{s-1}(u_{n_rL}(r))^2\bigg|_0^\infty=0, \tag{20}$$

则我们就得到

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty r^s\left(\frac{\mathrm{d}u_{n_rL}(r)}{\mathrm{d}r}\right)^2\mathrm{d}r\\&=\left\{\frac{s(s-1)}{2}-L(L+1)\right\}\langle n_rL|r^{s-2}|n_rL\rangle\\&\quad+(4n_r+2L+3)\langle n_rL|r^s|n_rL\rangle\\&\quad-\langle n_rL|r^{s+2}|n_rL\rangle.\end{aligned} \tag{21}$$

再用 $r^{s+1}\dfrac{\mathrm{d}u_{n_rL}(r)}{\mathrm{d}r}$ 乘以(18)式各项并积分$\int_0^\infty\cdots\mathrm{d}r$，所有各项分部积分一次，并注意利用(20)式，结果得

$$\begin{aligned}&(s+1)\int_0^\infty r^s\left(\frac{\mathrm{d}u_{n_rL}(r)}{\mathrm{d}r}\right)^2\mathrm{d}r\\&=L(L+1)(s-1)\langle n_rL|r^{s-2}|n_rL\rangle\\&\quad-(4n_r+2L+3)(s+1)\langle n_rL|r^s|n_rL\rangle\\&\quad+(s+3)\langle n_rL|r^{s+2}|n_rL\rangle.\end{aligned} \tag{22}$$

对比(21)和(22)式，我们就可以得到不同幂次径向平均值之间所满足的另一个递推关系

$$\begin{aligned}&(s+2)\langle n_rL|r^{s+2}|n_rL\rangle\\&=(s+1)(4n_r+2L+3)\langle n_rL|r^s|n_rL\rangle\\&\quad-\frac{s[(2L+1)^2-s^2]}{4}\langle n_rL|r^{s-2}|n_rL\rangle.\end{aligned} \tag{23}$$

由(6)式可知，$r\to0$，$u_{n_rL}(r)\to r^{L+1}$；$r\to\infty$，$u_{n_rL}(r)\to r^{n_r+L+1}e^{-r^2/2}$. 所以(20)式的成立条件，即(23)式的使用条件为 $s>-(2L+1)$. (17)和(23)式不仅对于分析不同幂次径向平均值之间的关系是非常有用的，而且反复使用这两个递推公式并注意到归一化条件 $\langle n_rL|n_rL\rangle=1$，则可以计算出全部偶次幂的径向平均值的解析表达式. 部分结果如下：

$$\langle n_rL|r^2|n_rL\rangle=\frac{1}{2}(4n_r+2L+3), \tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\langle n_rL|r^4|n_rL\rangle\\&=\frac{1}{8}[3(4n_r+2L+3)^2\\&\quad-(2L+3)(2L-1)],\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}&\langle n_rL|r^6|n_rL\rangle\\&=\frac{1}{48}(4n_r+2L+3)[15(4n_r+2L+3)^2\\&\quad-5(2L+3)(2L-1)-4(2L+5)(2L-3)],\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&\langle n_rL|r^8|n_rL\rangle\\&=\frac{1}{8}\Big[\frac{7}{48}(4n_r+2L+3)^2[15(4n_r+2L+3)^2\\&\quad-5(2L+3)(2L-1)-4(2L+5)(2L-3)]\\&\quad-\frac{3}{16}(2L+7)(2L-5)[3(4n_r+2L+3)^2\\&\quad-(2L+3)(2L-1)]\Big],\end{aligned} \tag{27}$$

$$\langle n_rL|r^{-2}|n_rL\rangle=\frac{2}{2L+1}, \tag{28}$$

$$\langle n_rL|r^{-4}|n_rL\rangle=\frac{4n_r+2L+3}{2(L-1/2)(L+1/2)(L+3/2)}, \tag{29}$$

$$\langle n_rL|r^{-6}|n_rL\rangle=\frac{3(4n_r+2L+3)^2-(2L+3)(2L-1)}{8(L-3/2)(L-1/2)(L+1/2)(L+3/2)(L+5/2)}, \tag{30}$$

$$\langle n_rL|r^{-8}|n_rL\rangle=\frac{(4n_r+2L+3)[15(4n_r+2L+3)^2-5(2L+3)(2L-1)-4(2L+5)(2L-3)]}{48(L-5/2)(L-3/2)(L-1/2)(L+1/2)(L+3/2)(L+5/2)(L+7/2)}. \tag{31}$$

3. 奇次幂平均值的解析表达式

利用(9)和(10)式，RSNSO 的径向幂次平均值可以表示成

$$\begin{aligned}\langle n_rL|r^s|n_rL\rangle&=\int_0^\infty r^s[u_{n_rL}(r)]^2\mathrm{d}r\\&=\frac{[\widetilde{N}_{n_rL}]^2}{2}\int_0^\infty(r^2)^{(2L+s+1)/2}e^{-r^2}\\&\quad\times[L_{n_r}^{L+1/2}(r^2)]^2\mathrm{d}(r^2).\end{aligned} \tag{32}$$

利用含有广义拉盖尔多项式的积分公式[18]

$$\int_0^\infty z^\lambda e^{-z} L_n^\mu(z) L_{n'}^{\mu'}(z) dz$$
$$= (-1)^{n+n'} \Gamma(\lambda+1) \times \sum_k \binom{\lambda-\mu}{n-k}\binom{\lambda-\mu'}{n'-k}\binom{\lambda+k}{k}$$
$$(\mathrm{Re}(\lambda) > -1), \tag{33}$$

则得平均值的计算公式为

$$\langle n_r L | r^s | n_r L\rangle = \frac{n_r!\Gamma(L+(s+3)/2)}{\Gamma(n_r+L+3/2)} \times \sum_k \binom{s/2}{n_r-k}^2 \binom{L+(s+1)/2+k}{k}$$
$$= \frac{n_r!\Gamma(L+(s+3)/2)}{\Gamma(n_r+L+3/2)} \times \sum_i \binom{s/2}{i}^2 \binom{L+(s+1)/2+n_r-i}{n_r-i}. \tag{34}$$

当 s 为偶数时,求和号中 i 取 0 到 $\min(n_r, |s/2|)$ 之间的整数,这时由上式算出的径向平均值的值与前面我们用两个递推关系算出的结果是完全一致的,当然其过程要复杂得多. 当 s 为奇数时,i 取 0 到 n_r 之间的整数,为此令 $s=2k+1, k=0,1,2,\cdots$,则得奇次幂平均值的计算公式为

$$\langle n_r L | r^{2k+1} | n_r L\rangle = \frac{n_r!\Gamma(L+k+2)}{\Gamma(n_r+L+3/2)} \times \sum_{i=0}^{n_r} \binom{k+1/2}{i}^2 \binom{L+k+1+n_r-i}{n_r-i}. \tag{35}$$

由于 $n_r=0,1,2,\cdots$,因此经具体的计算可得

$$\langle 0L | r^{2k+1} | 0L\rangle = \frac{\Gamma(L+k+2)}{\Gamma(L+3/2)}, \tag{36}$$

$$\langle 1L | r^{2k+1} | 1L\rangle = \frac{\Gamma(L+k+2)}{\Gamma(L+5/2)} \times (L+k^2+2k+9/4), \tag{37}$$

$$\langle 2L | r^{2k+1} | 2L\rangle = \frac{\Gamma(L+k+2)}{\Gamma(L+7/2)} \times [(L+k+2)(L+3k+2k^2+7/2)+(k^2-1/4)^2/2], \tag{38}$$

$$\langle 3L | r^{2k+1} | 3L\rangle = \frac{\Gamma(L+k+2)}{\Gamma(L+9/2)} \times [(L+k+3)(L+k+2) \times (L+4k+3k^2+19/4) + (k^2-1/4)^2 \times (3L+2k+k^2/3+27/4)/2]. \tag{39}$$

4. 讨 论

由(1)式可知,当实参数 A 和 b 同时等于零时,RSNSO 就退化为 SO,这时

$$L = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+4(|m|+s)(|m|+s+1)}-1\right] = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+4l(l+1)}-1\right] = l. \tag{40}$$

而 l 就是通常意义下的角量子数,于是前面给出的 RSNSO 的径向平均值的解析表达式和递推关系就退化为 SO 的径向平均值的解析表达式和递推关系[6,8]. 当参数 $b=0$ 时,RSNSO 就退化为 NSO,这时

$$L = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+4[A+(|m|+s)(|m|+s+1)]}-1\right] = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+4[A+l(l+1)]}-1\right]. \tag{41}$$

当参数 $A=0$ 时,RSNSO 就退化为文献[10—15]讨论过的 RSO,这时

$$L = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+4[(\sqrt{b+m^2}+s)(\sqrt{b+m^2}+s+1)]}-1\right] \quad (|m|, s=0,1,2,\cdots). \tag{42}$$

由此可知,本文给出的平均值的解析表达式和递推关系可分别用来表示 RSNSO,NSO,RSO 和 SO 的径向平均值的解析表达式和递推关系. 这说明,本文给出的有关结果具有普遍性.

[1] Goldhammer P 1963 *Rev. Mod. Phys.* **35** 40

[2] Zeng J Y 1997 *Quantum Mechanics* (Vol Ⅰ) (2nd ed) (Beijing: Science Press) Chapt 6 (in Chinese) [曾谨言 1997 量子力学(卷Ⅰ) 第二版(北京:科学出版社)第 6 章]

[3] Mayer M G, Jensen J H D 1995 *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure* (New York: Wiley)

[4] Hou C F, Sun X D, Zhou Z X *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 385 (in Chinese) [侯春风、孙秀冬、周忠祥等 1999 物理学报 **48** 385]

[5] Chen C Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 607(in Chinese)[陈昌远 2000 物理学报 **49** 607]
[6] Pan L H 2001 *Acta Quantum Opt. Sin.* **7** 150(in Chinese)[潘丽华 2001 量子光学学报 **7** 150]
[7] Zha Z W 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 723(in Chinese)[查新未 2002 物理学报 **51** 723]
[8] Di Y M 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 786(in Chinese)[狄尧明 2003 物理学报 **52** 786]
[9] Chen C Y, Liu Y W 1999 *High Energy Phys. Nucl. Phys.* **23** 865 (in Chinese)[陈昌远、刘友文 1999 高能物理与核物理 **23** 865]
[10] Quesne C 1988 *J. Phys. A* **21** 3093
[11] Carpio-Bernido M V, Bernido C C 1989 *Phys. Lett.* A **134** 395
[12] Zhedanov A S 1993 *J. Phys. A* **26** 4633
[13] Wang D Y, Huang B W 1999 High Energy *Phys. Nucl. Phys.* **23** 1078 (in Chinese)[王德云、黄博文 1999 高能物理与核物理 **23** 1078]
[14] Chen C Y, Sun D S 2001 *Acta Photon. Sin.* **30** 104(in Chinese)[陈昌远、孙东升 2001 光子学报 **30** 104]
[15] Sun D S, Chen C Y 2001 *Acta Photon. Sin.* **30** 539(in Chinese)[孙东升、陈昌远 2001 光子学报 **30** 539]
[16] Cheng T L, Chen C Y 2001 *Acta Quantum Opt. Sin.* **7** 67 (in Chinese)[成天龙、陈昌远 2001 量子光学学报 **7** 67]
[17] Chen C Y, Sun D S, Liu Y W *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 468 (in Chinese)[陈昌远、孙东升、刘友文等 2002 物理学报 **51** 468]
[18] Wang Z X, Guo D R 1979 *Introduction to Special Function*(Beijing: Science Press) pp.361—365 (in Chinese)[王竹溪、郭敦仁 1979 特殊函数概论(北京 科学出版社)第 361—365 页]
[19] Landau L D, Lifshitz E M 1977 *Quantum Mechanics*(*Non-Relativistic Theory*) 3rd ed(New York: Pergamon Press) Appendix f

Explicit expressions and recurrence formulas of the radial average values for a kind of non-harmonic oscillator model potentials*

Chen Chang-Yuan　Lu Fa-Lin　Sun Dong-Sheng　Liu Cheng-Lin
(*Department of Physics, Yancheng Teachers College, Yancheng* 224002, *China*)
(Received 30 May 2003; revised manuscript received 24 July 2003)

Abstract

In this paper, two recurrence formulas are derived for the radial average values of a kind of non-harmonic oscillator model potentials; these non-harmonic oscillator model potentials are ring-shaped non-spherical oscillator, non-spherical oscillator, and ring-shaped oscillator. Explicit expressions for their radial average values are given.

Keywords: ring-shaped non-spherical oscillator, non-spherical oscillator, ring-shaped oscillator, radial average values, explicit expressions, recurrence formulas
PACC: 0365, 0230

* Project supported by the Natural Science Foundation of the Education Bureau of Jiangsu Province, China (Grant No. 02KJB140007), and the Special Foundation of Yancheng Teachers College, China.