

# 一种简化非 Gauss 场模型在随机介质中 光传播问题中的应用\*

陈京元<sup>1)</sup>† 陈式刚<sup>2)</sup> 王光瑞<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>中国工程物理研究院北京研究生部, 北京 100088)

<sup>2)</sup>北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(2004 年 11 月 10 日收到, 2004 年 12 月 9 日收到修改稿)

为了研究大气湍流间歇性的光传播效应, 构造出一种比较简单的非 Gauss 场模型(Poisson 场)用于描述大气介电常数(或折射率)随机起伏. 模型特征泛函含有四个待定函数, 根据大气湍流的统计均匀性, 介电起伏的单点概率分布函数, 以及介电起伏能谱可以选择或确定它们. 对在这种简化湍流中传播的光波平均场及二阶统计矩性质进行了理论分析, 并给出数值模拟的一个简单例子.

关键词: 光波传播, 大气湍流, 间歇性

PACC: 4220, 4725, 9265

## 1. 引 言

人们很早就意识到大气湍流对光波传播的影响. 当光波在大气中传播时, 由于大气湍流的作用, 其光束质量将会极大地恶化. 对于地基天文目标观测成像系统, 大气湍流使得目标成像模糊, 光能分散, 分辨率严重受限. 对于激光大气传输和通讯, 大气湍流使到达目标地的激光束能量集中度下降. 之所以如此, 主要原因在于: 大气湍流运动导致大气温度和密度的随机变化, 从而导致大气折射率的随机变化, 折射率的随机起伏进一步导致在其中传输光波的场量的随机起伏, 由此引起光束抖动、强度起伏、光束扩展和像点抖动等一系列光传输的大气湍流效应. 正是这些大气湍流效应导致大气中传输光束性能的急剧恶化.

光波在湍流大气中传输的理论是与大气湍流的机理密切相关的. 由于湍流本身的基本机理至今尚不十分清楚, 从理论上研究光波传输的大气湍流效应具有相当大的难度. 上世纪 60 年代以来, 通过以 Rytov, Tatarskii 等为代表的大批科学家的努力, 目前已经建立起解决湍流介质中光传播问题的一个比较

完整的理论体系<sup>[1]</sup>. 通过求解光学基本方程, Rytov, Tatarskii 等人最先建立起光场的统计性质与湍介质折射率随机起伏统计性质之间的关系. 这一工作是大多数后续工作的基础, 将它们应用到各种具体场合, 已结出了丰硕的果实. 现在, 以这些理论为指导, 人们已经能够解释光传输问题的大多数实验事实; 应用及工程实践中所遇到的各种问题, 也可以通过这些基本理论的应用而获得解答.

Tatarskii 等的理论是建立在 Kolmogorov 湍流理论(K41)基础之上的. Kolmogorov 在 1941 年建立的局地均匀各向同性湍流理论<sup>[2]</sup>, 是湍流漫长研究历史中一个重要里程碑, 它给出小尺度湍流一种普适的定量关系. 而且, 小尺度湍流规律的普适性从此成为湍流理论界根深蒂固的核心观念, 至今仍然影响着湍流理论研究的方方面面. K41 湍流理论在其建立初期受到大量的实验支持, 但随着实验技术的提高和理论研究的进一步深入, K41 湍流理论乃至小尺度湍流的普适性受到越来越广泛的怀疑. Kolmogorov 在 1962 年改进了 K41 的结果, 得到著名的 K62 理论. 这次改进的影响至今余波尚存, 目前人们仍然热衷于对 K41 进行各种形式的改造<sup>[3]</sup>. 这种改造是本质性的, 而并非只是数值精度上的提高,

\* 国家重点基础研究专项经费, 国家自然科学基金(批准号: 10147201, 10247003), 激光技术创新基金(批准号: 20030512), 国家自然科学基金重点项目(批准号: 10335010), 中国工程物理研究院科学技术基金(批准号: 200404430)资助的课题.

† E-mail: jingyuan\_chen@yahoo.com.cn

它将导致对 K41 湍流图景及小尺度湍流普适性概念的全面的更新. 现在人们普遍认为, 尽管对 K41 的偏离只是一个经验事实, 其存在性亦由于不同程度实验的含糊性而未得到充分证实, 但我们似乎已经不可能回到 K41 意义上的普适性了. 实际上, 甚至小尺度湍流本身也依赖于不同流的性质, 即小尺度湍流的普适性要比 K62 意义上的普适性更为弱化, 乃至根本就不具备什么普适性<sup>[4]</sup>.

问题的核心集中在湍流的阵发性或间歇性上<sup>[5]</sup>. 粗言之, 间歇性指对 Gauss 分布的偏离. 更明确地说, 小概率事件比 Gauss 平庸分布所预期的更有可能出现, 而且随着尺度的逐渐减小, 这种偏离越来越大. 湍流界长期的研究表明, 湍流场具有间歇性, 表现在非平庸(非 Gauss)的统计特性, 大尺度相干结构的出现, 以及反常标度性质(偏离 K41 理论)等方面. 标量场同样表现出间歇性, 研究表明, 标量场具有比速度场更大的间歇性, 而且即使是 Gauss 型速度场, 其上标量场也具有反常标度性质并出现相干结构. 间歇性反映了湍流结构在时空中的不均匀出现或涨落的反常性质, 可以用多重分形结构唯象地描述.

根据非 Gauss 随机介质中光场统计矩方程(见本文第二部分), 求解随机介质中光场的统计性质, 必须具备介质介电起伏  $\tilde{\epsilon}$  的特征泛函, 也就是说, 必须知道随机介质的完全统计描述. 对于一般非 Gauss 随机场, 这是很苛刻的要求. 光在随机介质中的传播理论之所以总是假设介质起伏是 Gauss 的, 原因在于很难构造一个比较简单的满足 Markov 性质的非 Gauss 场具体实例. 就笔者所知范围, Possion 场<sup>[6]</sup>及 Tatarskii 对它的推广<sup>[7]</sup>(广义 Possion 场)是少有的可以获得特征泛函的非 Gauss 场, 由于这种非 Gauss 场模型含有较多的未知函数, 因此适当选择有关待定函数后, 可将它们用于不同的具体问题中去. 本文结合湍流研究的有关结果以及随机介质中光传播理论的要求选择或定出 Tatarskii 的非 Gauss 场模型中的有关待定函数, 并进一步考虑光波在这种非 Gauss 随机场中传播时的统计性质.

本文给出非 Gauss 随机介质中传播的光场统计矩方程, 这里给予平均场及二阶矩方程特别的重视, 介绍 Tatarskii 的非 Gauss 场简化模型, 确定该简化非 Gauss 场模型的有关待定函数. 所有待定函数确定之后, 就可以研究传播光场统计性质, 重点考虑了光波平均场和二阶统计矩, 给出数值模拟的一个简单例子.

## 2. 非 Gauss 随机介质中光场统计矩方程

本节给出 Markov 性假设仍然成立时非 Gauss 随机介质中光场统计矩方程. 记空间位置  $\mathbf{r}$  处的光波场为  $u(\mathbf{r}) = u(\boldsymbol{\rho}, z) \exp(ik_0 z)$ , 其中  $z$  为传播方向坐标,  $\boldsymbol{\rho}$  表横截方向坐标,  $k_0$  为波数, 容易推出一般统计矩(以  $\dots$  表统计平均)

$$M_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}'_m; Z) = u(\boldsymbol{\rho}_1, z) \dots u(\boldsymbol{\rho}_n, z) \times u^*(\boldsymbol{\rho}'_1, z) \dots u^*(\boldsymbol{\rho}'_m, z), \quad (1)$$

所满足的方程为

$$2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{M_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}'_m; iz)}{P_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}'_m; iz; 0)} \right] + \frac{\hat{L}_{nm} M_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}'_m; iz)}{P_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}'_m; iz; 0)} = 0, \quad (2)$$

或

$$\left[ 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} + \hat{L} + 2ik_0 \Omega_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}'_m; iz) \right] \times M_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}'_m; iz) = 0, \quad (3)$$

其中, 算符

$$\hat{L}_{nm} = \sum_{i=1}^n \Delta_{\Gamma}(\boldsymbol{\rho}_i) - \sum_{j=1}^m \Delta_{\Gamma}(\boldsymbol{\rho}'_j), \quad (4)$$

$$\Omega_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}'_m; iz) = - \frac{\partial}{\partial z} [\ln P_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}'_m; iz; 0)], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & P_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}'_m; iz; z') \\ &= \Phi \left\{ \frac{k_0}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \alpha(\cdot - \boldsymbol{\rho}_i) - \sum_{j=1}^m \alpha(\cdot - \boldsymbol{\rho}'_j) \right]; iz, z' \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{ik_0}{2} \int_z^{z'} \left[ \sum_{i=1}^n \tilde{\epsilon}(\boldsymbol{\rho}_i, \xi) - \sum_{j=1}^m \tilde{\epsilon}(\boldsymbol{\rho}'_j, \xi) \right] d\xi \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中(6)式中函数  $\Phi$  表示随机场特征泛函. 例如, 对于一般随机场  $f(x)$ , 其特征泛函定义为

$$\mathcal{Q}[u(\cdot)] = \exp \left[ i \int f(x) u(x) dx \right],$$

这里  $u(\cdot)$  表示任意函数.

下面着重分析平均场及二阶矩方程. 平均场方程为

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{\rho}, z)}{\partial z} - \frac{u(\boldsymbol{\rho}, z)}{P(\boldsymbol{\rho}, z; 0)} \frac{\partial P(\boldsymbol{\rho}, z; 0)}{\partial z} + \frac{1}{2ik_0} \Delta u(\boldsymbol{\rho}, z) = 0, \quad (7)$$

对统计均匀媒质,  $P(\boldsymbol{\rho}; Z; 0) = P(z)$ , 即此函数不依

依赖于  $\rho$ , 可进一步将方程化简为

$$2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{u(\rho, iz)}{P(z)} \right] + \Delta \left[ \frac{u(\rho, iz)}{P(z)} \right] = 0. \quad (8)$$

可以看出,  $\frac{u(\rho, iz)}{P(z)}$  的方程与均匀介质中光场

$u_0(z, \rho)$  的方程相同, 这样, 容易求出此方程的解为

$$u(\rho, iz) = P(z)u_0(\rho, iz). \quad (9)$$

取  $n = m = 1$ , 即得二阶矩满足的方程

$$2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{M_{11}(\rho, \rho', iz)}{M_{11}(\rho, \rho', iz, 0)} \right] + \frac{\Delta_1 - \Delta'_1}{P_{11}(\rho, \rho', iz, 0)} M_{11}(\rho, \rho', iz) = 0, \quad (10)$$

或

$$\left[ 2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} + (\Delta_1 - \Delta'_1) + 2ik_0 \Omega_{11}(\rho, \rho', iz) \right] \times M_{11}(\rho, \rho', iz) = 0. \quad (11)$$

如果媒质是统计均匀的, 此时  $P_{11}(\rho, \rho', iz, 0)$  仅依赖于观察点距离, 引入新的变量  $s = \rho_1 - \rho'_1$  及

$R = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho'_1)$ , 则方程可改写为

$$ik_0 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{M_{11}(s, R, iz)}{P_{11}(s, iz)} \right] + \frac{1}{P_{11}(s, iz)} \frac{\partial^2 M_{11}(s, R, iz)}{\partial s \partial R} = 0, \quad (12)$$

或

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} + \Omega_{11}(s, iz) - \frac{i}{k_0} \frac{\partial^2}{\partial s \partial R} \right] M_{11}(s, R, iz) = 0. \quad (13)$$

如果光源为统计均匀完全相干光, 初始条件  $M_{11}(s, R, 0) = M_{11}(s, 0)$ , 显然二阶矩  $M_{11}(s, R, iz) = M_{11}(s, iz)$  也不依赖于  $R$ , 于是上式最后一项消失, 此时容易求出解为

$$M_{11}(s, iz) = P_{11}(s, iz) \times M_{11}(s, 0). \quad (14)$$

对于一般初始条件, 二阶矩方程的解可以表示为

$$M_{11}(s, R, iz) = \left( \frac{k_0}{2\pi z} \right) \iint ds_0 dR_0 M_{11}(s_0, R_0, 0) \times \exp \left\{ \frac{ik_0}{z} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) + \int_0^z \Omega_{11} \left[ s_0 + \frac{\xi}{z} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0), iz \right] d\xi \right\}. \quad (15)$$

### 3. 非 Gauss 场简化模型

Tatarskii 建立的非 Gauss 随机场模型为<sup>[7]</sup>

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{概率 } p_0, \\ \xi_1 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) & \text{概率 } p_1, \\ \xi_1 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) + \xi_2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) & \text{概率 } p_2, \\ \sum_{n=0}^N \xi_n g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n) & \text{概率 } p_N, \end{cases} \quad (16)$$

此随机场包含下列随机参数: 激发的幅度  $\xi_i$ , 激发的数量  $N$ , 以及激发的位置  $\mathbf{r}_i$ . 一般假设对于不同  $i$ ,  $\xi_i$  是统计无关的. 函数  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)$  是依赖于激发位置的确定性函数, 表示激发的形状. 根据 Tatarskii 的分析, 可以对有关随机变量进行统计平均, 获得随机场特征泛函, 最终结果可表示为

$$\begin{aligned} \Phi[u(\cdot)] &= \exp \left[ i \int \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right] \\ &= \Psi \left( \int W(\mathbf{r}') \varphi \left( \int g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right) d\mathbf{r}' \right). \end{aligned} \quad (17)$$

类似地, 可写出如下多变量(或多点)特征函数

$$\begin{aligned} \chi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) &\equiv \exp \left\{ i \left[ \sum_{k=1}^m \lambda_k \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}_k) \right] \right\} \\ &= \Psi \left( \int W(\mathbf{r}) \varphi \left( \sum_{k=1}^m \lambda_k g(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}) d\mathbf{r} \right) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

上面两式中  $\Psi$ ,  $W$ , 及  $\varphi$  是分别描述各个随机参数统计特征的函数. 其中  $\Psi$  为激发数量  $N$  阶乘矩的母函数, 定义为  $\Psi(A) \equiv A^N = \sum_{n=0}^{\infty} P_n A^n$ ;  $\varphi$  为激发幅度  $\xi_i$  的特征函数, 即  $\varphi(\lambda) = \exp(i\lambda\xi_i)$ ;  $W(\mathbf{r})$  则是激发位置  $\mathbf{r}_i$  的概率分布函数. 当  $N$  满足 Poisson 分布时, 这一个随机场即为经典 Poisson 场.

容易求出模型各阶统计量的具体表达式. 这里给出两点关联函数的表达式, 我们以后将用它确定有关待定函数  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)$ .

两点关联函数  $B_{\tilde{\epsilon}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}') - \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}')$  可通过两变量特征函数由下式求出:

$$\begin{aligned} B_{\tilde{\epsilon}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= - \frac{\partial^2 \chi(\lambda, \lambda')}{\partial \lambda \partial \lambda'} \Big|_{\lambda=\lambda'=0} \\ &\quad + \left( \frac{\partial \chi(\lambda, \lambda')}{\partial \lambda} \frac{\partial \chi(\lambda, \lambda')}{\partial \lambda'} \right) \Big|_{\lambda=\lambda'=0} \end{aligned} \quad (19)$$

代入(18)式, 并考虑到  $\varphi'(0) = i\xi$ ,  $\varphi''(0) = -\xi^2$ ,  $\Psi'(1) = N$ , 及  $\Psi''(1) = N(N-1)$ , 则可得

$$B_{\xi}(r, r') = N \xi^2 \int W(r'')g(r, r'')g(r', r'')dr'' \\ + \xi^2 [N(N-1) - N^2] \int W(r'') \\ \times g(r, r'')dr'' \int W(r'')g(r', r'')dr'' \quad (20)$$

一般而言,上式第二项为 0,因为或者  $\theta = 0$ ,或者两个积分为 0.所以

$$B_{\xi}(r, r') = N \xi^2 \int W(r'')g(r, r'')g(r', r'')dr'' \quad (21)$$

下面列出单点(一般由于统计均匀,特征函数并不依赖于点的具体位置)特征函数,我们将用它确定另一个特定函数  $\varphi(\lambda)$ :

$$\Theta(\lambda) = \Psi \left( \int W(r)\varphi(\lambda g(r_0, r))dr \right) = \Psi(A), \quad (22)$$

其中

$$A \equiv \int W(r)\varphi(\lambda g(r_0, r))dr = A(\lambda).$$

## 4. 有关限制和选择

上述非 Gauss 场模型包含  $\varphi(\lambda)$ ,  $\Psi(A)$ ,  $W(r)$  及  $g(r, r_i)$  四个任意函数.可以根据不同的考虑选择这些函数,但它们至少应该满足如下一些基本限制条件:

首先,它们必须具有自身所代表对象的一般性质.例如,  $W(r)$  应该是非负且归一化的正定函数,而  $\varphi(\lambda)$  及  $\Psi(\exp(i\lambda))$  须为某正定函数的 Fourier 变换,并且满足  $\varphi(0) = \Psi(1) = 1$ .

其次,应该适当选择这些函数,使随机场具有湍流场的一些已知特征.比如,必须使某具有 Kolmogorov 幂率性质的惯性区能谱.我们将使用 Kolmogorov 能谱及 Sinai-Yakhot 的单点概率分布函数<sup>[8]</sup>确定  $g(r, r_i)$  与  $\varphi(\lambda)$  两个函数的具体形式.

此外,我们考虑统计均匀的随机介质,这将给出其他一些限制.

### 4.1. 统计均匀对激发形状及激发位置分布函数的要求

由于统计均匀,关联函数有如下性质:

$B_{\xi}(r, r') = B_{\xi}(r - r')$ .为满足这一性质,由(21)式,必须要求

$$g(r, r') = g(r - r'). \quad (23)$$

统计均匀也要求激发位置是均匀分布的.这意味着,在体积  $V$  内,分布保持为常数,即

$$W(r) = \begin{cases} V^{-1} & r \in V, \\ 0 & r \notin V, \end{cases} \quad (24)$$

并且当  $V \rightarrow \infty$  时,存在极限

$$\gamma = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{N}{V}. \quad (25)$$

这样,关联函数变为如下形式(在有限但足够大体积  $V$  内):

$$B_{\xi}(r, r') = \gamma \xi^2 \int_V g(r - r'')g(r' - r'')dr'' \quad (26)$$

### 4.2. 统计均匀对激发数量分布函数的限制

由于我们考虑  $V \rightarrow \infty$ ,  $N = F_1 \rightarrow \infty$  时情形,所以要求  $\Psi(A)$  允许这一极限的存在性.在体积  $V$  内

$$A(\lambda) = \int W(r)\varphi(\lambda g(r_0 - r))dr \\ = \int W(r) [1 + \varphi(\lambda g(r_0 - r)) - 1] dr \\ = 1 + \frac{1}{V} \int_V [\varphi(\lambda g(r_0 - r)) - 1] dr \\ = 1 + \frac{L_V(\lambda)}{V},$$

其中  $L_V(\lambda) = \int_V [\varphi(\lambda g(r_0 - r)) - 1] dr$ .所以,这

要求  $V \rightarrow \infty$  时,  $\frac{N}{V} \rightarrow \gamma$ , 并且极限  $\lim_{V \rightarrow \infty} \Psi \left( 1 + \frac{L_V(\lambda)}{V} \right)$  存在.如果  $V \rightarrow \infty$  时,  $L_V(\lambda) \rightarrow L$ , 则可将

$\Psi(A)$  按  $\varepsilon = \frac{L}{V}$  展开,有

$$\Psi(A) = \Psi \left( 1 + \frac{L}{V} \right) = \Psi(1 + \varepsilon) \\ = 1 + \gamma L + \frac{(\gamma L)^2}{2!} \frac{F_2}{F_1^2} + \dots \\ = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma L)^n}{n!} \frac{F_n}{F_1^n}, \quad (27)$$

其中  $F_n \equiv N(N-1)\dots(N-n+1)$  为  $n$  阶阶乘.

易于发现,当激发数目满足 Poisson 分布时,可以保证上述极限的存在性.此时有  $F_n = F_1^n$ ,  $\Psi(A) = \exp[(A-1)N]$ .当然,其他分布,如二分布等也能满足要求.我们选择 Poisson 分布这种分布形式,于是随机场特征泛函及单点特征函数分布变为如下形式:

$$\Phi[u(\cdot)] = \exp\left\{\gamma \int_V \left[ \varphi \int_V g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times u(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right] - 1 \right\} d\mathbf{r}', \quad (28)$$

$$\Theta(\lambda) = \exp\left\{\gamma \int_V \left[ \varphi(\lambda g(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})) - 1 \right] d\mathbf{r} \right\}. \quad (29)$$

这里还包含  $\varphi(\lambda)$  及  $g(\mathbf{r})$  两个待定函数, 它们的具体形式可以根据湍流单点概率分布函数  $P(\tilde{\varepsilon})$  及能谱函数  $\Phi(k)$  予以确定.

可以求出此 Poisson 型非 Gauss 随机场的  $n$  阶累积函数为

$$C_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = \gamma \xi^n \int g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \dots \times g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) d\mathbf{r}, \quad (30)$$

容易看出, Gauss 场相当于这种非 Gauss 场的如下极限情况:  $\gamma \rightarrow \infty, \gamma \xi^2 = \text{const}, \gamma \xi^n \rightarrow 0$  对所有  $n \geq 3$ . 这样 Gauss 场的特例也可以纳入这种非 Gauss 场模型的范围之中.

#### 4.3. Markov 性的要求

随机介质中光传播理论要求沿传播方向( $z$  方向)介质统计无关. 将特征泛函写为

$$\Phi[u(\cdot); z, z'] = \exp\left[ i \int_z^{z'} d\xi \int u(\boldsymbol{\rho}, \xi) \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}, \xi) d\boldsymbol{\rho} \right]. \quad (31)$$

如果随机介质在区间  $[0, z']$  及  $[z', z]$  统计无关, 则  $z$  方向关联长度为 0, 特征泛函满足如下关系:

$$\Phi[u(\cdot); z, 0] = \Phi[u(\cdot); z', 0] \times \Phi[u(\cdot); z, z']. \quad (32)$$

对于我们考虑的非 Gauss 场模型, 特征泛函为

$$\Phi[u(\cdot); z, 0] = \exp\left\{ \gamma \int_0^z d\xi' \int_S \left[ \varphi \left( \int_0^{\xi'} d\xi \int_S g(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \tilde{\varepsilon}(\xi') \right) \times u(\boldsymbol{\rho}, \xi) d\boldsymbol{\rho} \right] - 1 \right\} d\boldsymbol{\rho}', \quad (33)$$

如果令

$$g(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'; z, z') = \delta(z - z') f(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'), \quad (34)$$

则有

$$\Phi[u(\cdot); z, 0] = \exp\left\{ \gamma \int_0^z d\xi' \int_S \left[ \varphi \left( \int_S f(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \right) \times u(\boldsymbol{\rho}', \xi) d\boldsymbol{\rho}' \right] - 1 \right\} d\boldsymbol{\rho}'. \quad (35)$$

显然, 当  $0 < z' < z$  时, 特征泛函满足 (32) 式.

这样, 随机场  $n$  阶累积函数可以写为

$$C_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = \delta(z_1 - z_2) \delta(z_2 - z_3) \dots \delta(z_{n-1} - z_n) \times R_n(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2, \dots, \boldsymbol{\rho}_{n-1} - \boldsymbol{\rho}_n), \quad (36)$$

其中

$$R_n(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2, \dots, \boldsymbol{\rho}_{n-1} - \boldsymbol{\rho}_n; iz) = \gamma \xi^n \int f(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1) \dots f(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n) d\boldsymbol{\rho}. \quad (37)$$

## 5. 确定另外两个待定函数

### 5.1. 确定函数 $g(\mathbf{r})$ 或 $f(\boldsymbol{\rho})$

由 (26) 式及关联函数与二维能谱函数的关系, 有

$$\gamma \xi^2 \int f(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') f(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}'') d\boldsymbol{\rho}'' = \int \Phi(k) \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{k}. \quad (38)$$

利用 Fourier 变换, 可得

$$f(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\gamma \xi^2}} \int \sqrt{\Phi(k)} \times \exp[i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho} + s(k)] d\mathbf{k}. \quad (39)$$

这里,  $s(-k) = -s(k)$  为任意奇函数.

这样, 函数  $f(\boldsymbol{\rho})$  可通过能谱求得. 考虑  $s(k) = 0$  的最简单情形, 此时  $f(\boldsymbol{\rho}) = f(-\boldsymbol{\rho})$ . 需要注意, 随机场仅仅包含乘积  $\xi g(\mathbf{r})$ , 因此, 只要对  $f(\boldsymbol{\rho})$  进行适当标度, 就可以任意选择  $\xi^2$  值而不影响结论.

在上式中代入各向同性 Kolmogorov 湍谱  $\Phi_n(k) = CC_n^2 k^{-11/3}$ , 即可求得  $f(\boldsymbol{\rho})$  的函数形式为

$$f(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)}{2^{5/6} \Gamma\left(\frac{11}{12}\right)} \frac{C_n \sqrt{C}}{\sqrt{\gamma \xi^2}} \rho^{-1/6} = f_0 \rho^{-1/6}. \quad (40)$$

由于  $\xi^2$  的任意性, 可将  $f_0$  选为 1. 这样  $\gamma$  将随湍流强度  $C_n^2$  而变动.

上式在  $\rho = 0$  处出现奇异性, 这是由于 Kolmogorov 湍谱没有考虑内外尺度效应, 因此, 上面结果只给出  $f(\boldsymbol{\rho})$  在惯性区的特征. 为得到其他区域的函数形式, 可使用 Kolmogorov 谱的各种修正谱. 例如, 使用 Karman-Tatarskii 谱<sup>[9]</sup> 可求出  $f(\boldsymbol{\rho})$  在三个不同区域的如下渐进级数解 ( $L_i = \sqrt{2\pi}/\kappa_i, L_0 = 2\pi/k_0$ ).

当  $\rho < L_i/\pi$  时,

$$f(\boldsymbol{\rho}) = \frac{C_n \sqrt{C}}{\sqrt{\gamma \xi^2}} \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{11}{12}\right) \kappa_0^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m! n! \Gamma(m+1)} \times \left(\frac{L_i}{L_0}\right)^{2n} \left\{ \left(\frac{1}{L_0}\right)^2 \left(\frac{\pi\rho}{L_0}\right)^{2m} \Gamma(m+n+1) \right\}$$

$$\times \Gamma\left[-m-n-\frac{1}{12}\right] + \left(\frac{1}{L_i}\right)^2 \left(\frac{L_i}{L_0}\right)^{11/6} \left(\frac{\pi\rho}{L_i}\right)^{2m} \\ \times \Gamma\left[-n+m+\frac{1}{12}\right] \Gamma\left[n+\frac{11}{12}\right] \}. \quad (41)$$

当  $L_i/\pi < \rho < L_0/\pi$  时,

$$f(\rho) = \frac{C_n \sqrt{C}}{\sqrt{\gamma} \xi^2} \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{11}{12}\right) \kappa_0^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!n!} \left(\frac{\pi\rho}{L_0}\right)^{2m} \\ \times \left\{ \left(\frac{1}{L_0}\right)^2 \left(\frac{L_i}{L_0}\right)^{2n} \right. \\ \times \frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma\left[-m-n-\frac{1}{12}\right]}{\Gamma(m+1)} \\ \left. + \left(\frac{1}{\pi\rho}\right)^2 \left(\frac{\pi\rho}{L_0}\right)^{11/6} \left(\frac{L_i}{\pi\rho}\right)^{2n} \right. \\ \left. \times \frac{\Gamma\left[-m+n+\frac{1}{12}\right] \Gamma\left[m+\frac{11}{12}\right]}{\Gamma\left(m-n+\frac{11}{12}\right)} \right\}. \quad (42)$$

当  $\rho > L_0/\pi$  时,

$$f(\rho) = \frac{C_n \sqrt{C}}{\sqrt{\gamma} \xi^2} \frac{2}{\Gamma\left(\frac{11}{12}\right) \kappa_0^\alpha} \left\{ \frac{\left(\frac{\pi\rho}{L_0}\right)^{17/12}}{\rho^2 \exp\left[\left(\frac{L_i}{L_0}\right)^2 + \kappa_0 \rho\right]} \right. \\ \left. + \frac{\kappa_0^2}{2} \exp\left[-\left(\frac{\pi\rho}{L_i}\right)^2\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\pi L_0 \rho}{L_i^2}\right)^{2n} \right\}. \quad (43)$$

显然,在惯性区,仍然有  $f(\rho) \sim \rho^{1/6}$ .

## 5.2. 确定函数 $\varphi(\lambda)$

现在只剩下  $\varphi(\lambda)$  这一个待定函数,由于我们具有随机湍流场单点分布函数或与之等价特征函数(两者构成 Fourier 变换对)的一些信息,所以可以通过寻找使泛函

$$F[\varphi(\lambda)] = \sum_{\lambda_n} |\Theta(\lambda_n) - \exp\{\gamma \int_S [\varphi(\lambda_n) f(\rho)] \\ - 1 |d\rho\}|^2, \quad (44)$$

取值最小的  $\varphi(\lambda)$  函数形式从而确定这一待定函数.

我们寻找与分布函数

$$P(\xi) = \sum_{n=1}^K A_n \exp[-a_n^2(\xi - \alpha_n)^2], \quad (45)$$

相应的如下  $\varphi(\lambda)$  的函数形式

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi) \exp(i\lambda\xi) d\xi \\ = \sum_{n=1}^K \frac{A_n \sqrt{\pi}}{a_n} \exp\left(i\lambda\alpha_n - \frac{\lambda^2}{4a_n^2}\right), \quad (46)$$

归一化条件  $\varphi(0) = 1$  要求

$$\sum_{n=1}^K \frac{A_n \sqrt{\pi}}{a_n} = 1. \quad (47)$$

泛函  $F[\varphi(\lambda)]$  中  $\Theta(\lambda)$  可以由湍流研究的有关实验或理论结果得到.我们使用 Sinai 及 Yakhot 由条件耗散率方法所得被动标量单点概率分布函数<sup>[8]</sup>

$$P(\tilde{\theta}) = \frac{1}{\chi(1+\tilde{\theta}^2)^{3/2}} \quad (48)$$

得到这一函数.

根据折射率涨落与位温  $\tilde{\theta}$ 、比湿  $\tilde{q}$  两个被动标量涨落的关系<sup>[10]</sup>

$$\tilde{n} = A\tilde{\theta} + B\tilde{q}, \quad (49)$$

其中常数  $A, B$  分别为

$$A = \frac{\partial n}{\partial \theta} = \frac{-77.6}{(v-1)} \frac{P}{T^2} \left(1 + \frac{15466}{T} q\right) \times 10^{-6},$$

$$B = \frac{\partial n}{\partial q} = \frac{77.6 \times 7733}{T^2} \times 10^{-6},$$

容易求得

$$\Theta(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\tilde{\epsilon}) \exp(i\lambda\tilde{\epsilon}) d\tilde{\epsilon} \\ = AB\lambda^2 K_1(A|\lambda|) K_1(B|\lambda|), \quad (50)$$

其中  $K_1(\cdot)$  为第二类变形 Bessel 函数.

将(40)(46)(50)式代入泛函  $F[\varphi(\lambda)]$  的表达式,该式成为  $A_n, a_n$  及  $\alpha_n$  等共  $3K$  个参数的函数.这样,问题转化为寻求使泛函值最小的参数值.

这些参数可由数值方法确定.选择较大的  $K$  值可提高求解精度,但问题的难度将大大增加.另外,问题的解与积分区域也有关系.我们给出  $K=1$  积分区域为径长 16 单位圆域时的一个适当的  $\varphi(\lambda)$  函数形式如下:

$$\varphi(\lambda) = \frac{A_1 \sqrt{\pi}}{a_1} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{4a_1^2}\right), \quad (51)$$

其中  $A_1 = 5.4812, a_1 = 9.7152$ .

## 6. 光场统计性质

我们已经确定了随机场特征泛函的所有待定函数.现在可以将它用于随机介质中光波涨落性质的研究之中了.

先看平均场方程(7).此时有

$$P(\rho; z, 0) = \Phi\left[\frac{k_0}{2} \delta(\cdot - \rho); z, 0\right] \\ = \exp\left\{\gamma \int_0^z d\xi \int_S \left[\varphi\left(\frac{k_0}{2} \delta(\rho - \rho')\right) - 1\right] d\rho'\right\}$$

$$= \exp\left\{-\gamma z \int_s \left[1 - \varphi\left(\frac{k_0}{2} f(\boldsymbol{\rho})\right)\right] d\boldsymbol{\rho}\right\}$$

$$= P(z). \quad (52)$$

可见跟 Gauss 场情形相同,光场沿传播方向仍然按指数规律衰减.在 Gauss 场的情形,

$$1 - \varphi\left(\frac{k_0}{2} f(\boldsymbol{\rho})\right) = \frac{1}{8} k_0^2 \xi^2 f^2(\boldsymbol{\rho}),$$

于是有

$$P(z) = \exp\left[-\frac{1}{8} k_0^2 \gamma z \xi^2 \int_s f^2(\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{8} k_0^2 A(0)z\right], \quad (53)$$

这就是熟知的在 Gauss 场中传播时的结果.当随机介质场不是 Gauss 场时,结果不仅与决定能谱函数(二阶统计)的  $f(\boldsymbol{\rho})$  有关,还与随机场的各高阶统计性质有关.对简化非 Gauss 场模型,可求出衰减因子为

$$\gamma \int_s \left[1 - \varphi\left(\frac{k_0}{2} f(\boldsymbol{\rho})\right)\right] d\boldsymbol{\rho}$$

$$= \gamma \int_s \left[1 - \sum_{n=1}^K \frac{A_n \sqrt{\pi}}{a_n}\right]$$

$$\times \exp\left(\frac{i}{2} \alpha_n k_0 f_0 \rho^{-1/6} - \frac{k_0^2 f_0^2}{16 a_n^2} \rho^{-1/3}\right) d\boldsymbol{\rho}. \quad (54)$$

由于此衰减因子一般是复数,故衰减可能振荡式地进行;这是与 Gauss 随机场中传播时不同的一个特征.

现在看光场二阶矩方程(10).类似于上述平均场的讨论,此时有

$$P_{11}(s = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z) = P_{11}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}'; z, 0)$$

$$= \Phi\left\{\frac{k_0}{2} [\delta(\cdot - \boldsymbol{\rho}) - \delta(\cdot - \boldsymbol{\rho}')]; z, 0\right\}$$

$$= \exp\left\{-\gamma z \int_s \left[1 - \varphi\left(\frac{k_0}{2} f(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'')\right)\right] d\boldsymbol{\rho}''\right\}$$

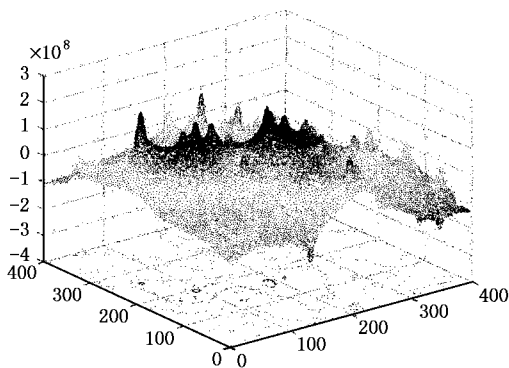


图1 折射屏折射率分布三维图

$$= \exp\left\{-\gamma z \int_s \left[1 - \varphi\left(\frac{k_0}{2} f(\boldsymbol{\rho}) - \frac{k_0}{2} f(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}'')\right)\right] d\boldsymbol{\rho}''\right\}$$

$$= \exp\left\{-\gamma z \int_s \left[1 - \varphi\left(\frac{k_0}{2} f(\boldsymbol{\rho}) - \frac{k_0}{2} f(\boldsymbol{\rho} - s)\right)\right] d\boldsymbol{\rho}\right\}. \quad (55)$$

在 Gauss 场情形,上式变为

$$P_{11}(s, z) = \exp\left\{-\frac{1}{8} k_0^2 \gamma z \xi^2 \int_s [f(\boldsymbol{\rho}) - f(\boldsymbol{\rho} - s)]^2 d\boldsymbol{\rho}\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{4} k_0^2 [A(0) - A(s)]\right\}$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{8} k_0^2 z D_2(s)\right], \quad (56)$$

与已知结果一致.

对我们的非 Gauss 场简化模型,代入已经确定的待定函数具体形式,即可得到具体结果.对此过程这里不再继续进行.下面只将此特征函数在 Gauss 场附近按级数展开,说明一个在 Gauss 型随机场中传播时不可能发生的现象.将(55)式展开到三阶累积量,有

$$P_{11}(s, z) = \exp\left\{-\frac{1}{8} k_0^2 \gamma z \xi^2 \int_s [f(\boldsymbol{\rho}) - f(\boldsymbol{\rho} - s)]^2 d\boldsymbol{\rho} - \frac{i}{48} k_0^3 \gamma z \xi^3 \int_s [f(\boldsymbol{\rho}) - f(\boldsymbol{\rho} - s)]^3 d\boldsymbol{\rho} + \dots\right\}, \quad (57)$$

结果一般为复数.这与在 Gauss 场中传播时有所不同,因为后者结果总是实数.

## 7. 数值模拟结果示例

上面几节对简化非 Gauss 随机介质模型在光传播问题中的应用进行了详细地理论说明,本节对模

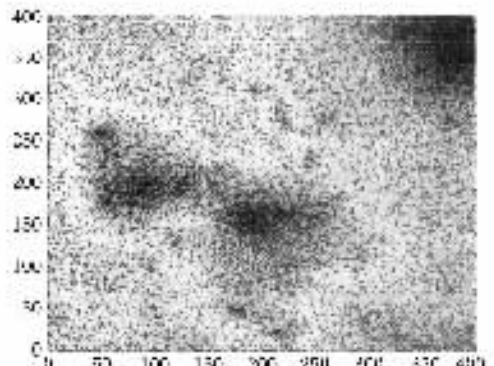


图2 折射屏折射率分布二维图

型的数值模拟给予简要说明. 本文的简化模型是很容易在数值模拟中实现的, 算法的关键是构造如下随机场:

$$\tilde{\epsilon}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{n=1}^N \xi_n g(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n), \quad (58)$$

式中,  $N$  为具有 Poisson 分布的随机数, 其均值为  $N = \gamma S$ ,  $S$  表模拟屏的大小, 其中  $\gamma$  为自由参数, 其值取决于湍流强度;  $\xi_n$  是分布函数满足(45)式的

随机变量;  $g(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n)$  可由(40)式确定, 其中  $\boldsymbol{\rho}_n$  为  $S$  上的均匀分布.

图 1 和图 2 分别给出按上述非 Gauss 简化湍流模型建立的一个随机折射屏的三维及二维示例. 这里有关的模拟参数  $\gamma$  为 1;  $\xi^2$  为  $1 \times 10^{-12}$  (它与湍流强度有关, 此时相应的  $C_n^2$  约为  $1 \times 10^{-12}$ ); 屏尺寸  $400 \times 400$  网格, 屏上像素大小为 0.1m; 形状函数  $g(r)$  考虑内尺度效应, 内尺度选为 0.5m.

- [1] Rytov S M, Kravtsov Y A, Tatarskii V L 1989 *Principles of Statistical Radiophysics* (Springer-Verlag, Heidelberg) Vol. 3 and Vol. 4
- [2] Monin A S, Yagolom A M 1975 *Statistical Fluid Mechanics* (MIT press, Cambridge, MA) Vol. 2
- [3] Streenivasan K R 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 383
- [4] Celani A 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2385
- [5] Frisch U 1995 *Turbulence* (Cambridge University Press)

- [6] Feynman R P, Hibbs A R 1965 *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York: McGraw-Hill)
- [7] Tatarskii V I 1995 *Wave in Random Media* **5** 243
- [8] Sinai Y G and Yakhot V 1989 *Phys. Rev. Lett.* **63** 1962
- [9] Sasiela R J 1993 *Electromagnetic Wave Propagation in Turbulence: Evaluation and Application of Mellin Transforms* (Springer-Verlag, New York) p27
- [10] Hill R J 1978 *Radio Science* **13** 953

## Applications of a simplified non-Gaussian field model to wave propagation in turbulent media \*

Chen Jing-Yuan<sup>1)</sup> Chen Shi-Gang<sup>2)</sup> Wang Guang-Rui<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Graduate School, China Academy of Engineering Physics, Beijing 100088, China

<sup>2)</sup> Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China

(Received 10 November 2004; revised manuscript received 9 December 2004)

### Abstract

In order to study the optical effects of turbulent intermittency, a simplified non-Gaussian random field model has been constructed, which can model atmospheric dielectric permittivity (or refractive-index) fluctuation approximately. Four arbitrary functions enter into the characteristic functional of this model. Using the properties of the atmospheric turbulence, such as the statistical homogeneity, the single-point probability distribution and the spectrum of the refractive-index fluctuations, these functions can be selected or determined. With these given functions, we have studied the statistical properties, especially the mean field and the mutual coherence function, of a plane partially coherent incident wave. A simple example of numerical simulation has also been presented.

**Keywords:** wave propagation, atmospheric turbulence, intermittency

**PACC:** 4220, 4725, 9265

\* Project supported by the Special Foundation for Major State Basic Research Project of China, by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10147201 and 10247003), the Innovation Funds for Laser Technology (Grant No. 20030512), the Major Program of National Natural Science Foundation (Grant No. 10335010) and the Science Foundation of Chinese Academy of Engineering Physics (Grant No. 20040430).