第 54 卷 第 9 期 2005 年 9 月
1000-3290/2005/54(09)/3992-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.9, September, 2005

求解非线性差分方程孤立波解的直接代数法*

于亚璇[1)†]　王　琪[1)2)]　赵雪芹[1)3)]　智红燕[1)]　张鸿庆[1)2)]

[1)] (大连理工大学应用数学系,大连　116024)

[2)] (中国科学院数学机械化重点实验室,北京　100080)

[3)] (曲阜师范大学数学系,曲阜　273165)

(2004 年 11 月 16 日收到;2004 年 12 月 28 日收到修改稿)

推广了求解非线性差分方程孤立波解的直接代数法. 用此方法研究了 Hybrid 晶格方程,借助于符号计算 *Maple*,得到它的新孤波解. 这种方法也可用于求解其他的差分方程.

关键词: 微分-差分方程, Hybrid 晶格方程, 行波解, 孤波解

PACC: 0340K, 0290

1. 引　　言

众所周知,非线性偏微分方程的精确解,特别是孤波解,对研究自然界中众多的现象具有十分重要的意义. 近年来,对于连续变量的非线性微分方程,出现许多构造孤波解的有效方法[1—9]. 对于微分-差分方程,也有一些方法[10—12]. 但这些方法过于繁杂,不易使用. 本文基于齐次平衡法,推广了求解微分-差分方程的直接代数法——双曲函数法[13],并借助于符号计算 *Maple*,给出了 Hybrid 晶格方程[14]

$$u_n(t) = (1 + \alpha u_n(t) + \beta u_n^2(t))(u_{n-1}(t) - u_{n+1}(t)) \tag{1}$$

新的孤波解.

2. Hybrid 晶格方程的孤波解

Hybrid 晶格方程(1)由 Hirota[14] 研究过. 下面我们用上面的方法求解它的孤波解. 先对它做行波变换

$$\xi = dn - c_1 t + c_0,$$

那么方程(1)变为

$$c_1 \frac{\mathrm{d}u_n(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = (1 + \alpha u_n(\xi) + \beta u_n^2(\xi))(u_{n-1}(\xi) - u_{n+1}(\xi)). \tag{2}$$

通过平衡方程(2)中的 $c_1 \frac{\mathrm{d}u_n(\xi)}{\mathrm{d}\xi}$ 和 $-\beta u_n(\xi)(u_{n-1}(\xi) - u_{n+1}(\xi))$,得到平衡常数为 1,于是我们假设方程(2)有下列形式的解:

$$u_n(\xi) = A_0 + A_1 \tanh(\xi) + B_1 \operatorname{sech}(\xi), \tag{3}$$

经过计算有

$$\frac{\mathrm{d}u_n(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = A_1(1 - \tanh^2(\xi)) - B_1 \tanh(\xi)\operatorname{sech}(\xi), \tag{4}$$

$$u_{n-1}(\xi) = A_0 + \frac{A_1(\tanh(\xi) - \tanh(d))}{1 - \tanh(d)\tanh(\xi)} + \frac{B_1 \operatorname{sech}(\xi)\operatorname{sech}(d)}{1 - \tanh(d)\tanh(\xi)}, \tag{5}$$

$$u_{n+1}(\xi) = A_0 + \frac{A_1(\tanh(\xi) + \tanh(d))}{1 + \tanh(d)\tanh(\xi)} + \frac{B_1 \operatorname{sech}(\xi)\operatorname{sech}(d)}{1 + \tanh(d)\tanh(\xi)}. \tag{6}$$

将(3)—(6)式代入到方程(2)中得到了关于 $d, c_1, c_0, A_0, A_1, B_1$ 的代数方程. 令 $\tanh^i(\xi)\operatorname{sech}^j(\xi)$ $(i = 0, 1, \cdots, j = 0, 1)$ 的系数为零,得到关于 d, c_1, c_0,

* 国家重点基础研究发展规划项目(批准号:2004CB318000)资助的课题.

† E-mail: yuyaxuan@126.com

A_0, A_1, B_1 的一个超定代数方程组：

$$c_1 B_1 + 2\tanh(d)\beta A_0^2 B_1 \operatorname{sech}(d) + 2\tanh(d)\alpha A_0 B_1 \operatorname{sech}(d) - 4\tanh(d)\beta A_1^2 B_1 + 2\tanh(d)\beta B_1^3 \operatorname{sech}(d) + 2B_1 \operatorname{sech}(d)\tanh(d) = 0, \tag{7}$$

$$-2\beta B_1^3 \operatorname{sech}(d) + 4\beta A_1^2 B_1 - c_1 B_1 \tanh(d) + 2\beta A_1^2 B_1 \operatorname{sech}(d) = 0, \tag{8}$$

$$\alpha A_1 B_1 \operatorname{sech}(d) + 2\beta A_0 B_1 A_1 + 2\beta A_0 A_1 B_1 \operatorname{sech}(d) + \alpha B_1 A_1 = 0, \tag{9}$$

$$c_1 A_1 + 2A_1 \tanh(d) + 4\tanh(d)\beta A_1 B_1^2 \operatorname{sech}(d) - 2\tanh(d)\beta A_1^3 + 2\tanh(d)\beta A_0^2 A_1 + 2\tanh(d)\alpha A_0 A_1 + 4\tanh(d)\beta B_1^2 A_1 + c_1 A_1 \tanh^2(d) = 0, \tag{10}$$

$$\alpha A_1^2 - 2\beta A_0 B_1^2 \operatorname{sech}(d) + 2\beta A_0 A_1^2 - \alpha B_1^2 \operatorname{sech}(d) = 0, \tag{11}$$

$$2\tanh(d)\beta B_1^2 A_1 + 4\tanh(d)\beta A_1 B_1^2 \operatorname{sech}(d) - 2\tanh(d)\beta A_1^3 + c_1 A_1 \tanh^2(d) = 0, \tag{12}$$

$$c_1 A_1 + 2A_1 \tanh(d) + 2\tanh(d)\beta A_0^2 A_1 + 2\tanh(d)\alpha A_0 A_1 + 2\tanh(d)\beta B_1^2 A_1 = 0, \tag{13}$$

$$2\beta A_0 A_1^2 + \alpha A_1^2 - \alpha B_1^2 \operatorname{sech}(d) - 2\beta A_0 B_1^2 \operatorname{sech}(d) = 0, \tag{14}$$

$$\alpha B_1 A_1 + 2\beta A_0 B_1 A_1 = 0, \tag{15}$$

应用 *Maple* 求解此方程组得到：

情况 1

$$A_0 = -\frac{\alpha}{2\beta},$$
$$A_1 = 0,$$
$$B_1 = \pm\frac{\sqrt{-\alpha^2 + 4\beta}}{2\beta}\sinh(d),$$
$$c_1 = \frac{\alpha^2 - 4\beta}{2\beta}\sinh(d), \tag{16}$$

其中 c_0, d 是任意常数且 $\alpha^2 \leqslant 4\beta$.

情况 2

$$A_0 = -\frac{\alpha}{2\beta},$$
$$A_1 = \pm\frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2\beta}\tanh(d),$$
$$B_1 = 0,$$
$$c_1 = \frac{\alpha^2 - 4\beta}{2\beta}\tanh(d), \tag{17}$$

其中 c_0, d 是任意常数且 $\alpha^2 \geqslant 4\beta$.

因而方程(1)是具有如下形式的孤波解：

根据情况 1

$$u_n(t) = -\frac{\alpha}{2\beta} \pm \frac{\sqrt{-\alpha^2 + 4\beta}}{2\beta}\sinh(d) \times \operatorname{sech}\left(dn + \frac{\alpha^2 - 4\beta}{2\beta}\tanh(d)t + c_0\right). \tag{18}$$

其中 c_0, d 是任意常数且 $\alpha^2 \leqslant 4\beta$.

根据情况 2

$$u_n(t) = -\frac{\alpha}{2\beta} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2\beta}\tanh(d) \times \tanh\left(dn + \frac{\alpha^2 - 4\beta}{2\beta}\tanh(d)t + c_0\right). \tag{19}$$

其中 c_0, d 是任意常数且 $\alpha^2 \geqslant 4\beta$.

注 文献[13]中的解可由本文的方法给出，即第二个解，但据我们所知解一为新解.

3. 结　　论

本文将文献[13]中的差分方程的 tanh 方法加以推广，给出了求解非线性微分差分方程的直接代数法. 应用此方法可以求得更多的孤波解. 此方法可以在计算机上编程实现，从而可以求解一大批具有相似的多项式形式的微分-差分方程. 其中文中所讨论的 Hybrid 晶格方程在研究物体微粒的相互作用时有重要应用. 通过本文方法求出了它们新的孤波解.

[1] Ablowita M J and Clarkson P A 1991 *Solitions, nonlinear evolution equations and inverse scatting* (New York: Cambridge University Press)

[2] Lamb G L 1971 *Rev. Mod. Phys.* **43** 99

[3] Hirota R 1971 *Phys. Rev. Lett.* **27** 1192

[4] Tang X Y and Lou S Y 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 62

Lou S Y 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 10

[5] Zhi H Y, Wang Q, Zhang H Q 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1002 (in Chinese) [智红燕、王 琪、张鸿庆 2005 物理学报 **54** 1002]
Chen Y and Wang Q 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 1796
Chen Y and Li B 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 5
Chen Y and Li B 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 302
Chen Y, Li B and Zhang H Q 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 940

[6] Yan Z Y, Zhang H Q and Fan E G 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆、范恩贵 1999 物理学报 **48** 1]
Yan Z Y and Zhang H Q 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **11** 1962 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆 1999 物理学报 **11** 1962]
Lou S Y 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 1937 (in Chinese) [楼森岳 1998 物理学报 **47** 1937]

[7] Zhang Y F 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2109 (in Chinese) [张玉峰 2003 物理学报 **52** 2109]
Zhang Y F 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1623 (in Chinese) [张玉峰、郭福奎 2004 物理学报 **53** 1623]

[8] Zhang J F 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1648 (in Chinese) [张解放 2001 物理学报 **50** 1648]
Zhang J F 2000 *Chin*. *Phys*. **9** 1

[9] Liu S D, Fu Z T, Liu S K and Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1923 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵 强 2002 物理学报 **51** 1923]
Liu S D, Fu Z T, Liu S K and Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 10 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵 强 2002 物理学报 **51** 10]

[10] Hirota R, Hu X B and Tang X Y 2003 *J*. *Math*. *Anal*. *Appl*. **288** 326
Zhao J X, Li C X and Hu X B 2004 *J*. *Phys*. *Soc*. *Japan* **73** 1159
Qian X M, Lou S Y and Hu X B 2004 *J*. *Phys*. A **37** 2401

[11] Qian X M and Lou S Y 2003 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **39** 501
Qian X M and Lou S Y 1995 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **24** 171

[12] Chen Z Y, Bi J B and Chen D Y 2004 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **41** 387

[13] Baldwin D, Göktas Ü and Hereman W 2004 *Comput*. *Phys*. *Commun*. **163** 203

[14] Hirota R and Iwao M 2000 *Time-discretization of soliton equations* (in :J. Grabmeier, E. Kaltofen, Vweispfenning (Eds.))

A direct algebraic method to obtain solitary solutions of nonlinear differential-difference equations*

Yu Ya-Xuan[1)] Wang Qi[1)2)] Zhao Xue-Qin[1)3)] Zhi Hong-Yan[1)] Zhang Hong-Qing[1)2)]

[1)] (*Department of Applied Mathematics*, *Dalian University of Technology*, *Dalian* 116024, *China*)

[2)] (*Key Laboratory of Mathematics Mechanization*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100080)

[3)] (*Department of Mathematics*, *Qufu Normal University*, *Qufu* 273165, *China*)

(Received 16 November 2004; revised manuscript received 28 December 2004)

Abstract

In this letter, we extend a direct method for constructing solitary solutions of nonlinear differential-difference equations. Hybrid lattice equations are chosen to illustrate this method. As a result, several solitary solutions are obtained with the help of *Maple*. This method can also be used in other nonlinear differential-difference equations.

Keywords: differential-difference equations, Hybrid lattice equation, travelling wave solution, solitary solution

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2004CB318000).