第 54 卷 第 2 期 2005 年 2 月
1000-3290/2005/54(02)/0496-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.2,February,2005

关于 Lagrange 系统和 Hamilton 系统的 Mei 对称性

方建会[1)]　彭　勇[2)]　廖永潘[2)]

[1)] (石油大学(华东)物理科学与技术学院,东营　257061)

[2)] (河西学院物理系,张掖　734000)

(2004 年 3 月 24 日收到;2004 年 6 月 2 日收到修改稿)

对 Lagrange 系统和 Hamilton 系统 Mei 对称性的研究表明,Mei 对称性的两种表述对 Lagrange 系统是等价的,给出一类 Mei 对称性,而对 Hamilton 系统不等价,给出两类 Mei 对称性.

关键词:Lagrange 系统,Hamilton 系统,Mei 对称性,守恒量
PACC:0320,1130

1. 引　言

力学系统的对称性与守恒量之间有着密切联系.用对称性理论研究力学系统的守恒量是数理学科的一个近代发展方向,主要有 Noether 对称性[1]、Lie 对称性[2]和 Mei 的形式不变性[3,4].Mei 的形式不变性是梅凤翔提出的不同于 Noether 对称性和 Lie 对称性的一种新的对称性,关于这方面的研究已取得一些重要成果[5—18].由于 Mei 的形式不变性与 Lie 对称性在寻求守恒量方面具有等同地位,为了使三种对称性的称谓相统一,人们已把 Mei 的形式不变性称为 Mei 对称性[17,18].本文对 Lagrange 系统和 Hamilton 系统 Mei 对称性的研究表明,对 Lagrange 系统,Mei 对称性的两种表述是等价的,给出同一类 Mei 对称性,而对 Hamilton 系统,Mei 对称性的两种表述不等价,给出两类不同的 Mei 对称性.

2. Mei 对称性的两种表述

Noether 对称性是 Hamilton 作用量在无限小变换下的一种不变性.Lie 对称性是微分方程在无限小变换下的一种不变性.Mei 对称性是不同于 Noeher 对称性和 Lie 对称性的一种新的对称性,Mei 对称性有两种表述:

表述 1　Mei 对称性是指力学系统运动微分方程中的动力学函数经历无限小变换后仍满足原来方程的一种不变性[19,20].

表述 2　Mei 对称性是指力学系统运动微分方程的形式在无限小变换下保持不变[6,7].

3. Lagrange 系统的 Mei 对称性

设力学系统由 N 个质点组成,系统的位形由 n 个广义坐标 q_s $(s=1,\cdots,n)$ 确定,系统受到的约束是理想的完整约束,则系统的运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0, \tag{1}$$

其中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 是系统的 Lagrange 函数.

引进无限小变换

$$\begin{aligned} t^* &= t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\\ q_s^*(t^*) &= q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \end{aligned} \tag{2}$$

在无限小变换(2)下,$L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 变成 $L^*=L(t^*,\boldsymbol{q}^*,\dot{\boldsymbol{q}}^*)$.

按 Mei 对称性的第一种表述有

定义 1　在无限小变换(2)下,如果 Lagrange 系统(1)的动力学函数仍满足原来方程,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L^*}{\partial q_s}=0, \tag{3}$$

则称这种不变性为 Lagrange 系统(1)的 Mei 对称性.

按 Mei 对称性的第二种表述有

定义 2　在无限小变换(2)下,如果 Lagrange 系统运动微分方程(1)的形式保持不变,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L^*}{\partial q_s}=0, \tag{4}$$

则称这种不变性为 Lagrange 系统(1)的 Mei 对称性.

由于(3)式与(4)式相同,因此,Mei 对称性的两

种表述给出的定义 1 和定义 2 是同一对称性,对 Lagrange 系统(1)Mei 对称性的两种表述是等价的.

判据 1　对 Lagrange 系统(1),若无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_s 满足

$$E_s\left(X^{(1)}(L)\right)=0, \tag{5}$$

则相应的不变性是系统的 Mei 对称性.其中

$$E_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{6}$$

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\sum_{s=1}^{n}(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}. \tag{7}$$

证明　展开 L^* 有

$$L^*=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon X^{(1)}(L)+O\varepsilon^2, \tag{8}$$

将(8)式代入方程(3)或(4),并利用方程(1),忽略 ε^2 及以上高阶小量项,便可得(5)式.

定理 1　如果在无限小变换(2)下,Lagrange 系统(1)是 Mei 对称性的,且存在规范函数 $G_M=G_M(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足条件

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)=-\dot{G}_M, \tag{9}$$

则系统存在如下守恒量:

$$I_M=L\xi_0+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_M=\mathrm{const}. \tag{10}$$

证明　(10)式对 t 求导,然后将(9)式代入,并利用方程(1)便可得证.

4. Hamilton 系统的 Mei 对称性

Hamilton 系统的运动微分方程为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\qquad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}, \tag{11}$$

其中 $H=H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$是系统的 Hamilton 函数.

引入无限小变换

$$\begin{aligned}t^*&=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),\\ q_s^*(t^*)&=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),\\ p_s^*(t^*)&=p_s(t)+\varepsilon\eta_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),\end{aligned} \tag{12}$$

在无限小变换(12)下,$H=H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$变成 $H^*=H(t^*,\boldsymbol{q}^*,\boldsymbol{p}^*)$.

按 Mei 对称性的第一种表述有

定义 3　在无限小变换(12)下,如果 Hamilton 系统(11)的动力学函数仍满足原来方程,即

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H^*}{\partial p_s},\qquad \dot{p}_s=-\frac{\partial H^*}{\partial q_s}, \tag{13}$$

则称这种不变性为 Hamilton 系统(11)的 Mei 对称性(第一类 Mei 对称性).

按 Mei 对称性的第二种表述有

定义 4　在无限小变换(12)下,如果 Hamilton 系统(11)的运动微分方程的形式保持不变,即

$$\dot{q}_s^*=\frac{\partial H^*}{\partial p_s},\qquad \dot{p}_s^*=-\frac{\partial H^*}{\partial q_s}, \tag{14}$$

则称这种不变性为 Hamilton 系统(11)的 Mei 对称性(第二类 Mei 对称性).

由于(13)式不同于(14)式,因此,对 Hamilton 系统(11),Mei 对称性的两种表述是不等价的,按两种表述给出的定义 3 和定义 4 是不同的对称性,我们分别称为第一类 Mei 对称性和第二类 Mei 对称性.

判据 2　对 Hamilton 系统(11),若无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_s}\left(X^{(0)}(H)\right)&=0,\\ \frac{\partial}{\partial q_s}\left(X^{(0)}(H)\right)&=0,\end{aligned} \tag{15}$$

则相应的不变性是系统的第一类 Mei 对称性.其中

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\sum_{s=1}^{n}\eta_s\frac{\partial}{\partial p_s}. \tag{16}$$

证明　展开 H^*,有

$$\begin{aligned}H^*&=H(t^*,\boldsymbol{q}^*,\boldsymbol{p}^*)\\ &=H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})+\varepsilon X^{(1)}(H)+O(\varepsilon^2)\\ &=H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})+\varepsilon X^{(0)}(H)+O(\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{17}$$

其中

$$X^{(1)}=X^{(0)}+\sum_{s=1}^{n}(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}+\sum_{s=1}^{n}(\dot{\eta}_s-\dot{p}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{p}_s}. \tag{18}$$

将(17)式代入方程(13),并利用方程(11),忽略 ε^2 及以上高阶小项,便可得(15)式.

判据 3　对 Hamilton 系统(11),若无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_s-\frac{\partial}{\partial p_s}\left(X^{(0)}(H)\right)&=0,\\ \dot{\eta}_s+\frac{\partial}{\partial q_s}\left(X^{(0)}(H)\right)&=0,\end{aligned} \tag{19}$$

则相应的不变性是系统的第二类 Mei 对称性.

证明 将 q_s^* 和 p_s^* 对 t 求导,得

$$\begin{aligned} \dot{q}_s^* &= \dot{q}_s + \varepsilon\dot{\xi}_s, \\ \dot{p}_s^* &= \dot{p}_s + \varepsilon\dot{\eta}_s, \end{aligned} \tag{20}$$

将(17)式和(20)式代入方程(14),并利用方程(11),忽略 ε^2 及以上高阶小项,便可得(19)式.

定理 2 在无限小变换(12)下,如果 Hamilton 系统(11)具有第一类 Mei 对称性或第二类 Mei 对称性,且存在规范函数 $G_M = G_M(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 满足条件

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\eta_s + p_s\dot{\xi}_s\right) - H\dot{\xi}_0 - X^{(0)}(H) = -\dot{G}_M, \tag{21}$$

则系统存在守恒量

$$I_M = \sum_{s=1}^{n} p_s\xi_s - H\xi_0 + G_M = \text{const}. \tag{22}$$

证明 (22)式对 t 求导,然后将(21)式代入,并利用方程(11)便可得证.

5. 结 论

对 Lagrange 系统(1),Mei 对称性的两种表述是等价的,两种表述给出的对称性是同一类 Mei 对称性.对 Hamilton 系统(11),Mei 对称性的两种表述不等价,Mei 对称性的第一种表述给出的对称性是第一类 Mei 对称性,Mei 对称性的第二种表述给出的对称性是第二类 Mei 对称性.从(15)和(19)式可知,Hamilton 系统(11)具有第一类 Mei 对称性时,不一定具有第二类 Mei 对称性,反之亦然.

[1] Noether A E 1918 *Math*. *Phys*. **K Ⅰ Ⅱ 235**

[2] Lutzky M 1979 *J*. *Phys*. *A*:*Math*. *Gen*. **12** 973

[3] Mei F X 2000 *J*. *Beijing Inst*. *Technol*. **9** 120

[4] Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 177

[5] Wang S Y and Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 373

[6] Mei F X 2001 *J*. *Beijing Inst*. *Technol*. **21** 535(in Chinese)[梅凤翔 2001 北京理工大学学报 **21** 535]

[7] Wang S Y and Mei F X 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 5

[8] Chan X W, Luo S K and Mei F X 2002 *Appl*. *Math*. *Mech*. **23** 47 (in Chinese)[陈向炜、罗绍凯、梅凤翔 2002 应用数学和力学 **23** 47]

[9] Li R J, Qiao Y F and Meng J 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1(in Chinese)[李仁杰、乔永芬、孟 军 2002 物理学报 **51** 1]

[10] Fang J H, Xue Q Z and Zhao S Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2183 (in Chinese)[方建会、薛庆忠、赵嵩卿 2002 物理学报 **51** 2183]

[11] Ge W K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 939(in Chinese)[葛伟宽 2002 物理学报 **51** 939]

[12] Luo S K 2002 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **19** 449

[13] Luo S K 2002 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **38** 257

[14] Qiao Y F, Zhang Y L and Han G C 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1051 (in Chinese)[乔永芬、张耀良、韩广才 2003 物理学报 **52** 1051]

[15] Chan P S and Fang J H 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1044(in Chinese) [陈培胜,方建会 2003 物理学报 **52** 1044]

[16] Fang J H, Yan X H and Chan P S 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1561 (in Chinese)[方建会,闫向宏,陈培胜 2003 物理学报 **52** 1561]

[17] Fang J H 2003 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **40** 269

[18] Luo S K 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2941(in Chinese)[罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[19] Mei F X 2001 *J*. *Beijing Inst*. *Technol*. **22** 133(in Chinese)[梅凤翔 2002 北京理工大学学报 **22** 133]

[20] Mei F X 2003 *Mech*. *Engin*. **25** 1(in Chinese)[梅凤翔 2003 力学与实践 **25** 1]

On Mei symmetry of Lagrangian system and Hamiltonian system

Fang Jian-Hui[1)]　Peng Yong[2)]　Liao Yong-Pan[2)]

[1)] (College of Physics Science and Technology, University of Petroleum, Dongying　257061, China)

[2)] (Department of Physics, Hexi University, Zhangye　734000, China)

(Received 24 March 2004; revised manuscript received 2 June 2004)

Abstract

In this paper, the symmetries of Lagrange system and Hamilton system have been studied. It is indicated that two kinds of description of Mei symmetry are equivalent for Lagrange system, so only one kind of Mei symmetry can be given; however, they are not equivalent for Hamilton system, so two kinds of Mei symmetry can be given.

Keywords: Lagrangian system, Hamiltonian system, Mei symmetry, conserved quantity

PACC: 0320, 1130