

Birkhoff 系统的守恒量与稳定性 *

许志新

(江苏科技大学船舶与海洋工程学院, 镇江 212003)
(2005 年 3 月 24 日收到, 2005 年 4 月 18 日收到修改稿)

利用 Birkhoff 系统的守恒量来研究系统的稳定性. 如果守恒量的组合能够成为 Liapunov 函数, 便可用来研究系统的平衡稳定性和运动稳定性.

关键词: Birkhoff 系统, 守恒量, Liapunov 稳定性

PACC: 0320

1. 引言

由 Poincaré 和 Liapunov 创立的运动稳定性理论已有百年历史. 一百年来, 运动稳定性在数学、力学、航空、航海、航天、新技术和高技术中得到广泛应用, 发挥了越来越大的作用^[1,2]. Liapunov 直接法, 即第二方法是研究稳定性的重要方法. 但是, 正如文献[3]指出的: “应用 Liapunov 直接法的主要困难, 在构造 Liapunov 函数. 有时候可以求得首次积分, 这些首次积分尽管本身的符号不定, 但加以组合之后可以得到 Liapunov 函数. 这样一情况, Malkin 曾加以引用, 但功劳应归于 Chetaev. 它是与自旋抛射体运动的稳定性有关的”. Birkhoff 系统是一类约束力学系统, 它是 Hamilton 系统的一种自然推广, 它在量子物理^[4], 力学^[5]以及计算数学^[6]上都有重要应用. Birkhoff 系统的对称性与守恒量研究已有许多结果^[7-13]. Birkhoff 系统的稳定性研究也有一些结果^[2]. 本文研究 Birkhoff 系统的守恒量与稳定性, 期望由系统的守恒量来找到 Liapunov 函数而判断系统的稳定性. 首先, 研究 Birkhoff 系统的守恒量; 其次, 由守恒量构造 Liapunov 函数; 最后, 举例说明结果的应用.

2. Birkhoff 系统的守恒量

Birkhoff 方程为^[4,5,9]

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = 0, \quad (\mu, \nu = 1, \dots, 2n) \quad (1)$$

其中 $B = B(t, a)$ 为 Birkhoff 函数, $R_\mu = R_\mu(t, a)$ 为 Birkhoff 函数组. Birkhoff 系统的 Noether 理论指出, 如果无限小变换的生成元 $\xi_0 = \xi_0(t, a)$, $\xi_\mu = \xi_\mu(t, a)$ 和规范函数 $G_N = G_N(t, a)$ 满足如下 Noether 等式

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t} \dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t} \right) \xi_0 + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \right) \xi_\mu - B \xi_0 + R_\mu \xi_\mu G_N = 0, \quad (2)$$

则 Birkhoff 系统(1)有如下 Noether 守恒量^[7]

$$I_N = R_\mu \xi_\mu - B \xi_0 + G_N = \text{const}. \quad (3)$$

对于自洽 Birkhoff 系统, 有

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Noether 等式(2)有解

$$\xi_0 = -1, \xi_\mu = 0, G_N = 0, \quad (5)$$

而守恒量式(3)给出

$$I_N = B(a) = \text{const}. \quad (6)$$

3. 由守恒量构造 Liapunov 函数

如果 Birkhoff 系统的一个守恒量或几个守恒量的组合可以成为 Liapunov 函数, 则这个或这些守恒量可以用来判断系统的稳定性.

下面举例说明:

* 国家自然科学基金(批准号: 10272021)资助的课题.

例 1 二阶 Birkhoff 系统为

$$R_1 = 0, R_2 = a^1,$$

$$B = \frac{1}{2}(a^2)^2 + \frac{1}{2}\omega^2(a^1)^2 - \frac{\omega^2}{16b^2}(a^1)^4, \quad (7)$$

其中 ω, b 为常数. 试研究系统平衡位置 $a_0^1 = a_0^2 = 0$ 的稳定性.

Birkhoff 方程 (1) 给出

$$\dot{a}^2 = \omega^2 a^1 - \frac{\omega^2}{4b^2}(a^1)^3, \quad -\dot{a}^1 = a^2, \quad (8)$$

其中一个平衡位置为

$$a_0^1 = a_0^2 = 0, \quad (9)$$

因系统的 Birkhoff 函数 B 是守恒量, 并且在平衡位置 (9) 的邻域内是正定的, 因此它可作为 Liapunov 函数, 有

$$V = B = \frac{1}{2}(a^2)^2 + \frac{1}{2}\omega^2(a^1)^2 - \frac{\omega^2}{16b^2}(a^1)^4, \quad \dot{V} = 0. \quad (10)$$

由 Liapunov 定理知, 平衡位置 (9) 是稳定的.

例 2 二阶 Birkhoff 系统为

$$R_1 = 0, R_2 = a^1 - t,$$

$$B = \frac{1}{2}(a^1)^2 + \frac{1}{2}(a^2)^2 + t(a^1 - a^2). \quad (11)$$

试研究系统的运动

$$a_0^1 = 1 - t, a_0^2 = 2 + t \quad (12)$$

的稳定性.

Birkhoff 方程 (1) 给出

$$\dot{a}^2 = a^1 + t,$$

$$-\dot{a}^1 = a^2 - t - 1. \quad (13)$$

Noether 等式 (2) 给出

$$-(\dot{a}^2 + a^1 - a^2)\xi_0 + (\dot{a}^2 - a^1 - t)\xi_1 + (-a^2 + t)\xi_2 - B\xi_0 + (a^1 - t)\xi_2 + \dot{G}_N = 0. \quad (14)$$

它有如下解:

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = a^1 + t, \xi_2 = a^2 - t, \quad G_N = \frac{1}{2}(a^1 + t - 1)^2 + \frac{1}{2}(a^2 - t - 2)^2 - (a^1 - t)(a^2 - t). \quad (15)$$

而守恒量式 (3) 给出

$$I_N = \frac{1}{2}[a^1 - (1 - t)]^2 + \frac{1}{2}[a^2 - (t + 2)]^2. \quad (16)$$

它对于扰动

$$\zeta_1 = a^1 - (1 - t), \zeta_2 = a^2 - (t + 2) \quad (17)$$

来说是正定的, 因此可选作 Liapunov 函数, 有

$$V = I_N = \frac{1}{2}(\zeta_1^2 + \zeta_2^2), \dot{V} = 0. \quad (18)$$

由 Liapunov 定理知, 运动 (12) 是稳定的.

4. 结 论

利用 Liapunov 第二方法来研究系统的稳定性, 其关键是构造 Liapunov 函数. 直到现在, 人们还没有 Liapunov 函数构造的统一方法, 还在不断地构造它. 本文对 Birkhoff 系统提出一个构造方法, 其基本思想是在系统的守恒量中找到适当的函数作为 Liapunov 函数.

[1] Wang Z L 1992 *Stability of Motion and Its Applications* (Beijing: Higher Education Press) (in Chinese) [王照林 1992 运动稳定性及其应用 (北京: 高等教育出版社)]

[2] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F and Zhu H P 1997 *Stability of Motion of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、朱海平 1997 约束力学系统的运动稳定性 (北京: 北京理工大学出版社)]

[3] Rosenberg R M 1977 *Analytical Dynamics of Discrete Systems* (New York: Plenum Press)

[4] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics II* (New York: Springer-Verlag)

[5] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F and Wu H B 1996 *Dynamics of*

Birkhoffian System (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学 (北京: 北京理工大学出版社)]

[6] Su H L and Qin M Z 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 329

[7] Mei F X 1993 *Science in China A* **36** 1456

[8] Mei F X, Zhang Y F and Shang M 1999 *Mech. Res. Commun.* **26** 7

[9] Mei F X 2001 *Int. J. Non-Linear Mech.* **36** 817

[10] Guo Y X, Luo S K, Shang M and Mei F X 2001 *Rep. Math. Phys.* **47** 313

[11] Chen X W, Luo S K and Mei F X 2002 *Appl. Math. Mech.* **23** 53

[12] Zhang Y and Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2419 (in Chinese) [张毅、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2419]

[13] Xu X J, Mei F X and Qin M C 2004 *Chin. Phys.* **13** 1999

Conserved quantity and stability of Birkhoffian system^{*}

Xu Zhi-Xin

(*School of Naval Architecture & Ocean Engineering , Jiangsu University of Science and Technology ,Zhengjiang 212003 ,China*)

(Received 24 March 2005 ; revised manuscript received 18 April 2005)

Abstract

It is showed that Stability of Birkhoffian system can be determined by its conserved quantities. If a conserved quantity or a combination of some conserved quantities became a Liapunov function ,then it can be used to study the stability of equilibrium and the stability of motion of the system.

Keywords : Birkhoffian system , conserved quantity , Liapunov stability

PACC : 0320

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 10272021).