第 54 卷 第 2 期 2005 年 2 月
1000-3290/2005/54(02)/0504-07
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.54, No.2, February, 2005

(2+1)维色散长波方程的新的类孤子解

曾 昕† 张鸿庆

(大连理工大学应用数学系,大连 116024)

(2004 年 3 月 30 日收到;2004 年 5 月 8 日收到修改稿)

应用一种新的修改的代数方法去求解(2+1)维色散长波方程,获得方程的大量新的精确解.这些解包括类孤子解、类周期解、类有理解、类双曲函数解、类 Jacobi 椭圆函数解等等.

关键词:(2+1)维色散长波方程,类孤子解,类有理解,类双曲函数解,类 Jacobi 椭圆函数解

PACC:0340,0290

1. 引 言

非线性发展方程的求解一直是数学物理工作者研究的重要课题之一,为了求得非线性偏微分方程尽可能多的解,人们已经找到了许多方法,如 Backlund 变换[1,2]、Darboux 变换[3]、齐次平衡法[4—6]以及各种 tanh 函数法[7—10]等.近年来,范恩贵提出了一种代数方法,获得了偏微分方程组的一系列精确解.本文通过改进文献[11]的方法,借助于 Maple 软件,获得了(2+1)维色散长波方程[12]的更多的精确解.

2. 新的修改的代数方法

给定一个非线性偏微分方程,有自变量 $x=(t,x_1,x_2,\cdots,x_m)$和因变量 u,我们用下面的形式寻找它的解

$$u=a_0(x)+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\phi^i(q(x))+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\phi^{-i}(q(x)),\tag{1}$$

并且

$$\phi'=\epsilon\sqrt{c_0+c_1\phi+c_2\phi^2+c_3\phi^3+c_4\phi^4},\tag{2}$$

其中 $\epsilon=\pm1$,c_i($i=0,\cdots,4$)是常数.为了确定 u,我们采用下面的四步.

步骤 1 通过平衡给定的非线性偏微分方程的最高阶导数项与最高阶非线性项来决定 n.

步骤 2 把(1)和(2)式带入给定的非线性偏微分方程,然后设 ϕ^i 和 $\phi^i\sqrt{\sum_{j=0}^{4}c_j\phi^j}$($i=0,\cdots,n$)的系数为零,我们将得到一系列关于 a_i,b_i($i=0,\cdots,n$)和 q 的偏微分方程.

步骤 3 求解步骤 2 所获得的一系列偏微分方程,解出 a_i,b_i($i=0,\cdots,n$)与 q.

步骤 4 方程(2)有下列形式的解:

(A)多项式解

$$\phi=\begin{cases}\epsilon\sqrt{c_0}\,q,c_1=c_2=c_3=c_4=0,c_0>0,\\ -\dfrac{c_0}{c_1}+\dfrac{1}{4}c_1q^2,c_2=c_3=c_4=0,c_1\neq0.\end{cases}\tag{3}$$

(B)指数解

$$\phi=\begin{cases}-\dfrac{c_1}{2c_2}+\exp(\epsilon\sqrt{c_2}\,q),c_3=c_4=0,c_0=\dfrac{c_1^{\,2}}{4c_2},c_2>0,\\ \dfrac{c_3}{2c_4}\exp\left(\dfrac{\epsilon c_3}{2\sqrt{-c_4}}q\right),c_0=c_1=c_2=0,c_4<0.\end{cases}\tag{4}$$

†E-mail:zx79723@sina.com

(C)三角函数解

$$\phi=\begin{cases}-\dfrac{c_1}{2c_2}+\dfrac{\varepsilon c_1}{2c_2}\sin(\sqrt{-c_2}\,q),\ c_0=c_3=c_4=0,c_2<0,\\ \varepsilon\sqrt{\dfrac{c_0}{c_2}}\sin(\sqrt{-c_2}\,q),\ c_1=c_3=c_4=0,c_0>0,c_2<0,\\ \sqrt{-\dfrac{c_2}{c_4}}\sec(\sqrt{-c_2}\,q),\ c_0=c_1=c_3=0,c_2<0,c_4>0,\\ -\dfrac{c_2}{c_3},\sec^2\left(\dfrac{\sqrt{-c_2}}{2}q\right),\ c_0=c_1=c_4=0,c_2<0,\\ \varepsilon\sqrt{\dfrac{c_2}{2c_4}}\tan\left(\sqrt{\dfrac{c_2}{2}}q\right),\ c_1=c_3=0,c_0=\dfrac{c_2{}^2}{4c_4},c_2>0,c_4>0,\\ -\dfrac{c_2\sec^2(\frac{1}{2}\sqrt{-c_2}\,q)}{2\varepsilon\sqrt{-c_2c_4}\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c_2}\,q\right)+c_3},\ c_0=c_1=0,c_2<0.\end{cases}\tag{5}$$

(D)双曲函数解

$$\phi=\begin{cases}-\dfrac{c_1}{2c_2}+\dfrac{\varepsilon c_1}{2c_2}\sinh(2\sqrt{c_2}\,q),\ c_0=c_3=c_4=0,c_2>0,\\ \varepsilon\sqrt{\dfrac{c_0}{c_2}}\sinh(\sqrt{c_2}\,q),\ c_1=c_3=c_4=0,c_0>0,c_2>0,\\ \sqrt{-\dfrac{c_2}{c_4}}\operatorname{sech}(\sqrt{c_2}\,q),\ c_0=c_1=c_3=0,c_2>0,c_4<0,\\ -\dfrac{c_2}{c_3}\operatorname{sech}^2\left(\dfrac{\sqrt{c_2}}{2}q\right),\ c_0=c_1=c_4=0,c_2>0,\\ \varepsilon\sqrt{-\dfrac{c_2}{2c_4}}\tanh\left(\sqrt{-\dfrac{c_2}{2}}q\right),\ c_1=c_3=0,c_0=\dfrac{c_2{}^2}{4c_4},c_2<0,c_4>0,\\ \dfrac{c_2\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c_2}\,q\right)}{3\varepsilon\sqrt{c_2c_4}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{c_2}\,q\right)-c_3},\ c_0=c_1=0,c_2>0.\end{cases}\tag{6}$$

(E)有理解

$$\phi=\begin{cases}-\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{c_4}\,q},\ c_0=c_1=c_2=c_3=0,c_4>0,\\ \dfrac{4c_3}{c_3{}^2q^2-4c_4},\ c_0=c_1=c_2=0.\end{cases}\tag{7}$$

(F)双周期 Jacobi 椭圆函数解

$$\phi=\begin{cases}\sqrt{-\dfrac{c_2m^2}{c_4(2m^2-1)}}\operatorname{cn}\left(\sqrt{\dfrac{c_2}{2m_2-1}}q\right),\ c_0=c_3=0,c_0=\dfrac{c_2{}^2m^2(m^2-1)}{c_4(2m^2-1)^2},c_2>0,c_4<0,\\ \sqrt{-\dfrac{c_2}{c_4(2-m^2)}}\operatorname{dn}\left(\sqrt{\dfrac{c_2}{2-m^2}}q\right),\ c_1=c_3=0,c_0=\dfrac{c_2{}^2(1-m^2)}{c_4(-2+m^2)^2},c_2>0,c_4<0,\\ \varepsilon\sqrt{-\dfrac{c_2m^2}{c_4(m^2+1)}}\operatorname{sn}\left(\sqrt{-\dfrac{c_2}{m_2+1}}q\right),\ c_1=c_3=0,c_0=\dfrac{c_2{}^2m^2}{c_4(m^2+1)^2},c_2<0,c_4>0.\end{cases}\tag{8}$$

(G)双周期 Weierstrass 椭圆形式解

$$\phi=\mathscr{G}\left(\frac{\sqrt{c_3}}{2}q,g_2,g_3\right),\ c_2=c_4=0,c_3>0,\tag{9}$$

其中 $g_2=-\frac{4c_1}{c_3}$ 和 $g_3=-\frac{4c_0}{c_3}$ 称作 Weierstrass 椭圆函数不变量.

把 $a_i,b_i(i=0,\cdots,n),\phi$ 带入(1)式,得到待求的非线性偏微分方程的类孤子解、类周期解、类有理解等.

3. 方法的应用

本文把这种方法应用到(2+1)维色散长波方程上.

(2+1)维色散长波方程

$$\begin{cases} u_{ty}+v_{xx}+\frac{1}{2}(u^2)_{xy}=0, \\ v_t+(uv+u+u_{xy})_x=0 \end{cases} \tag{10}$$

是 Boiti 等人在得到弱 Lax 对的相容性条件时首先得到的,当 $x=y$ 时,系统(10)约化为经典的 Boussinesq 方程.这个方程组的孤立子解已经被一些学者研究过.为了寻找系统(10)的更多的精确解,通过使用我们的方法,根据步骤 1,可设系统(10)的解有下面的形式:

$$\begin{cases} u=s_0+s_1\phi(q)+s_2\phi^{-1}(q), \\ v=S_0+S_1\phi(q)+S_2\phi^2(q)+S_3\phi^{-1}(q) \\ \quad +S_4\phi^{-2}(q). \end{cases} \tag{11}$$

其中 $q=kx+p$(k 是非零常数).$s_i(i=0,\cdots,2)$,$S_j(j=0,\cdots,4)$,p 是 y,t 的任意函数.把方程组(11)和方程(2)带入系统(10),并在 Maple 的帮助下,搜集 ϕ^i 与 $\phi^i\sqrt{\sum_{j=0}^r c_j\phi^j}$ $(i=0,\cdots,2)$的系数,然后设系数为零,我们得到下面的关于 $s_i(i=0,\cdots,2)$,$S_j(j=0,\cdots,4)$和 p 的一系列偏微分方程.

通过使用 Maple 软件见解这一系列偏微分方程,得到

情况 1

$$\phi=kx-\int 4\frac{c_0\Psi_2(y)}{k(-c_1^2+4c_2c_0)}\mathrm{d}y+4\frac{c_0y}{k(c_1^2-4c_2c_0)}+\Phi_2(t),$$

$$s_0=\frac{-2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_2(t)\right)\sqrt{c_0}+k^2c_1}{2k\sqrt{c_0}},$$

$$s_1=0, s_2=-2k\sqrt{c_0}, S_0=\Psi_2(y),$$

$$S_1=0, S_2=0, S_3=4\frac{c_1c_0(1+\Psi_2(y))}{-c_1^2+4c_2c_0},$$

$$S_4=8\frac{c_0^2(1+\Psi_2(y))}{-c_1^2+4c_2c_0}. \tag{12}$$

情况 2

$$\phi=kx-\int 4\frac{c_0\Psi_1(y)}{k(-c_1^2+4c_2c_0)}\mathrm{d}y+4\frac{c_0y}{k(c_1^2-4c_2c_0)}+\Phi_1(t),$$

$$s_0=\frac{-2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_1(t)\right)\sqrt{c_0}+k^2c_1}{2k\sqrt{c_0}},$$

$$s_1=0, s_2=2k\sqrt{c_0}, S_0=\Psi_1(y),$$

$$S_1=0, S_2=0, S_3=4\frac{c_1c_0(1+\Psi_1(y))}{-c_1^2+4c_2c_0},$$

$$S_4=8\frac{c_0^2(1+\Psi_1(y))}{-c_1^2+4c_2c_0}. \tag{13}$$

因此根据方程组(3)—(9)与方程组(11)以及情况 1、情况 2,我们可以获得系统(10)的下列解.

由情况 1,可以得到以下解.

(Ⅰ)若 $c_2=c_3=c_4=0$, $c_1\neq 0$,则有多项式解

$$\begin{cases} u_{11}=\frac{-2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_2(t)\right)\sqrt{c_0}+k^2c_1}{2\sqrt{c_0}k}-8\frac{\sqrt{c_0}kc_1}{-4c_0+c_1^2q2}, \\ v_{11}=\Psi_2(y)-16\frac{c_0(1+\Psi_2(y))(4c_0+c_1^2q^2)}{(-4c_0+c_1^2q^2)^2}. \end{cases} \tag{14}$$

这里 $q=kx+\int 4\frac{c_0\Psi_2(y)}{kc_1^2}\mathrm{d}y+4\frac{c_0y}{kc_1^2}+\Phi_2(t)$,$\Phi_2(t)$ 是 t 的任意函数,$\Psi_2(y)$ 是 y 的任意函数.

(Ⅱ)若 $c_1=c_3=c_4=0, c_0>0, c_2<0$,则有三角函数解

$$\begin{cases} u_{12}=-\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_2(t)}{k}-\frac{2k\sqrt{c_2}}{\pm\sin(\sqrt{-c_2}q)}, \\ v_{12}=\Psi_2(y)-2\frac{1+\Psi_2(y)}{\sin^2(\sqrt{-c_2}q)}. \end{cases} \tag{15}$$

这里 $q=kx-\int\frac{\Psi_2(y)}{kc_2}\mathrm{d}y-\frac{y}{kc_2}+\Phi_2(t)$,$\Phi_2(t)$ 是 t 的任意函数,$\Psi_2(y)$ 是 y 的任意函数.

(Ⅲ)若 $c_1=c_3=0, c_0=\frac{c_2^2}{4c_4}, c_2>0, c_4>0$,则有三角函数解

$$\begin{cases} u_{13} = -\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_2(t)}{k} - \dfrac{k\sqrt{2c_2}}{\pm\tan\left(\sqrt{\dfrac{c_2}{2}}q\right)}, \\ v_{13} = \Psi_2(y) + \dfrac{1+\Psi_2(y)}{\tan^2\left(\sqrt{\dfrac{c_2}{2}}q\right)}. \end{cases} \tag{16}$$

这里 $q = kx - \int \dfrac{\Psi_2(y)}{c_2 k}\mathrm{d}y - \dfrac{y}{c_2 k} + \Phi_2(t)$,$\Phi_2(t)$ 是 t 的任意函数,$\Psi_2(y)$ 是 y 的任意函数.

(Ⅳ)若 $c_1 = c_3 = c_4 = 0$,$c_0 > 0$,$c_2 > 0$,则有双曲函数解

$$\begin{cases} u_{14} = -\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_2(t)}{k} - \dfrac{2k\sqrt{-c_2}}{\pm(\sinh(\sqrt{c_2}q))}, \\ v_{14} = \Psi_2(y) + \dfrac{2(1+\Psi_2(y))}{\sinh^2(\sqrt{c_2}q)}. \end{cases} \tag{17}$$

这里 $q = kx - \int \dfrac{\Psi_2(y)}{kc_2}\mathrm{d}y - \dfrac{y}{kc_2} + \Phi_2(t)$,$\Phi_2(t)$ 是 t 的任意函数,$\Psi_2(y)$ 是 y 的任意函数.

(Ⅴ)若 $c_1 = c_3 = 0$,$c_0 = \dfrac{c_2^{\ 2}}{4c_4}$,$c_2 < 0$,$c_4 > 0$,则有双曲函数解

$$\begin{cases} u_{15} = -\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_2(t)}{k} - \dfrac{k\sqrt{-2c_2}}{\pm\tanh\left(\sqrt{\dfrac{-c_2}{2}}q\right)}, \\ v_{15} = \Psi_2(y) - \dfrac{1+\Psi_2(y)}{\tanh^2\left(\sqrt{-\dfrac{c_2}{2}}q\right)}. \end{cases} \tag{18}$$

这里

$$q = kx - \int \frac{\Psi_2(y)}{c_2 k}\mathrm{d}y - \frac{y}{c_2 k} + \Phi_2(t),$$

$\Phi_2(t)$ 是 t 的任意函数,$\Psi_2(y)$ 是 y 的任意函数.

(Ⅵ)若 $c_0 = c_3 = 0$,$c_0 = \dfrac{c_2^{\ 2}}{4c_4}$,$c_2 > 0$,$c_4 < 0$,则有双周期 Jacobi 椭圆函数解

$$\begin{cases} u_{16} = -\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_2(t)}{k} - \dfrac{2k\sqrt{c_0}}{\sqrt{-\dfrac{m^2 c_2}{(2m^2-1)c_4}}\left(\mathrm{cn}\left(\sqrt{\dfrac{c_2}{2m^2-1}}q\right)\right)}, \\ v_{16} = \Psi_2(y) - \dfrac{2c_0(1+\Psi_2(y))c_4(2m^2-1)}{c_2^{\ 2}m^2\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\dfrac{c_2}{2m^2-1}}q\right)}. \end{cases} \tag{19}$$

这里 $q = kx - \int \dfrac{\Psi_2(y)}{kc_2}\mathrm{d}y - \dfrac{y}{kc_2} + \Phi_2(t)$,$\Phi_2(t)$ 是 t 的任意函数,$\Psi_2(y)$ 是 y 的任意函数.

(Ⅶ)若 $c_1 = c_3 = 0$,$c_0 = \dfrac{c_2^{\ 2}m^2(m^2-1)}{c_4(2m^2-1)^2}$,$c_2 > 0$,$c_4 < 0$,则有双周期 Jacobi 椭圆函数解

$$\begin{cases} u_{17} = -\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_2(t)}{k} - \dfrac{2\sqrt{c_0}k}{\sqrt{-\dfrac{c_2}{c_4(2-m^2)}}\mathrm{dn}\left(\sqrt{\dfrac{c_2}{2-m^2}}q\right)}, \\ v_{17} = \Psi_2(y) - \dfrac{2c_0(1+\Psi_2(y))c_4(2-m^2)}{c_2^{\ 2}\mathrm{dn}^2\left(\sqrt{\dfrac{c_2}{2-m^2}}q\right)}. \end{cases} \tag{20}$$

这里 $q = kx - \int \dfrac{\Psi_2(y)}{kc_2}\mathrm{d}y - \dfrac{y}{kc_2} + \Phi_2(t)$,$\Phi_2(t)$ 是 t 的任意函数,$\Psi_2(y)$ 是 y 的任意函数.

(Ⅷ)若 $c_1 = c_3 = 0$,$c_0 = \dfrac{m^2 c_2^{\ 2}}{(m^2+1)c_4}$,$c_2 < 0$,$c_4 > 0$,则有双周期 Jacobi 椭圆函数解

$$
\begin{cases}
u_{18} = -\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_2(t)}{k} - \dfrac{2\sqrt{c_0}\,k}{\pm\sqrt{-\dfrac{c_2 m^2}{c_4(m^2+1)}}\,\mathrm{sn}\left(\sqrt{-\dfrac{c_2}{m^2+1}}\,q\right)}, \\
v_{18} = \Psi_2(y) - \dfrac{2c_0(1+\Psi_2(y))c_4(m^2+1)}{c_2{}^2 m^2 \mathrm{sn}^2\left(\sqrt{-\dfrac{c_2}{m^2+1}}\,q\right)}.
\end{cases}
\tag{21}
$$

这里 $q = kx - \int \dfrac{\Psi_2(y)}{kc_2}\mathrm{d}y - \dfrac{y}{kc_2} + \Phi_2(t)$，$\Phi_2(t)$ 是 t 的任意函数，$\Psi_2(y)$ 是 y 的任意函数.

由情况 2，可以得到以下解.

（Ⅰ*）若 $c_2 = c_3 = c_4 = 0$，$c_1 \neq 0$，则有多项式解

$$
\begin{cases}
u_{21} = \dfrac{-2\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_1(t)\right)\sqrt{c_0} + k^2 c_1}{2\sqrt{c_0}\,k} + 8\dfrac{\sqrt{c_0}\,kc_1}{-4c_0 + c_1{}^2 q^2}, \\
v_{21} = \Psi_1(y) - 16\dfrac{c_0(1+\Psi_1(y))(4c_0 + c_1{}^2 q^2)}{(-4c_0 + c_1{}^2 q^2)^2}.
\end{cases}
\tag{22}
$$

这里 $q = kx + \int 4\dfrac{c_0\Psi_1(y)}{kc_1{}^2}\mathrm{d}y + 4\dfrac{c_0 y}{kc_1{}^2} + \Phi_1(t)$，$\Phi_1(t)$ 是 t 的任意函数，$\Psi_1(y)$ 是 y 的任意函数.

（Ⅱ*）若 $c_1 = c_3 = c_4 = 0$，$c_0 > 0$，$c_2 < 0$，则有三角函数解

$$
\begin{cases}
u_{22} = -\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_1(t)}{k} + \dfrac{2k\sqrt{c_2}}{\pm\sin(\sqrt{-c_2}\,q)}, \\
v_{22} = \Psi_1(y) - 2\dfrac{1+\Psi_1(y)}{\sin^2(\sqrt{-c_2}\,q)}.
\end{cases}
\tag{23}
$$

这里 $q = kx - \int \dfrac{\Psi_1(y)}{kc_2}\mathrm{d}y - \dfrac{y}{kc_2} + \Phi_1(t)$，$\Phi_1(t)$ 是 t 的任意函数，$\Psi_1(y)$ 是 y 的任意函数.

（Ⅲ*）若 $c_1 = c_3 = 0$，$c_0 = \dfrac{c_2{}^2}{4c_4}$，$c_2 > 0$，$c_4 > 0$，则有三角函数解

$$
\begin{cases}
u_{23} = -\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_1(t)}{k} + \dfrac{k\sqrt{2c_2}}{\pm\tan\left(\sqrt{\dfrac{c_2}{2}}\,q\right)}, \\
v_{23} = \Psi_1(y) + \dfrac{1+\Psi_1(y)}{\tan^2\left(\sqrt{\dfrac{c_2}{2}}\,q\right)}.
\end{cases}
\tag{24}
$$

这里

$$q = kx - \int \frac{\Psi_1(y)}{c_2 k}\mathrm{d}y - \frac{y}{c_2 k} + \Phi_1(t),$$

$\Phi_1(t)$ 是 t 的任意函数，$\Psi_1(y)$ 是 y 的任意函数.

（Ⅳ*）若 $c_1 = c_3 = c_4 = 0$，$c_0 > 0$，$c_2 > 0$，则有双曲函数解

$$
\begin{cases}
u_{24} = -\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_1(t)}{k} + \dfrac{2k\sqrt{-c_2}}{\pm\sinh(\sqrt{c_2}\,q)}, \\
v_{24} = \Psi_1(y) + \dfrac{2(1+\Psi_1(y))}{\sinh^2(\sqrt{c_2}\,q)}.
\end{cases}
\tag{25}
$$

这里

$$q = kx - \int \frac{\Psi_1(y)}{kc_2}\mathrm{d}y - \frac{y}{kc_2} + \Phi_1(t),$$

$\Phi_1(t)$ 是 t 的任意函数，$\Psi_1(y)$ 是 y 的任意函数.

（Ⅴ*）若 $c_1 = c_3 = 0$，$c_0 = \dfrac{c_2{}^2}{4c_4}$，$c_2 < 0$，$c_4 > 0$，则有双曲函数解

$$
\begin{cases}
u_{25} = -\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_1(t)}{k} + \dfrac{k\sqrt{-2c_2}}{\pm\tanh\left(\sqrt{\dfrac{-c_2}{2}}\,q\right)}, \\
v_{25} = \Psi_1(y) - \dfrac{1+\Psi_1(y)}{\tanh^2\left(\sqrt{-\dfrac{c_2}{2}}\,q\right)}.
\end{cases}
\tag{26}
$$

这里

$$q = kx - \int \frac{\Psi_1(y)}{c_2 k}\mathrm{d}y - \frac{y}{c_2 k} + \Phi_1(t),$$

$\Phi_1(t)$ 是 t 的任意函数，$\Psi_1(y)$是 y 的任意函数.

（Ⅵ*）若 $c_0 = c_3 = 0$，$c_0 = \dfrac{c_2^2}{4c_4}$，$c_2 > 0$，$c_4 < 0$，则有双周期 Jacobi 椭圆函数解

$$\begin{cases} u_{26} = -\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_1(t)}{k} + \dfrac{2k\sqrt{c_0}}{\sqrt{-\dfrac{m^2 c_2}{(2m^2-1)c_4}}\left(\mathrm{cn}\left(\sqrt{\dfrac{c_2}{2m^2-1}}q\right)\right)}, \\ v_{26} = \Psi_1(y) - \dfrac{2c_0(1+\Psi_1(y))c_4(2m^2-1)}{c_2^2 m^2 \mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\dfrac{c_2}{2m^2-1}}q\right)}. \end{cases} \tag{27}$$

这里 $q = kx - \int \dfrac{\Psi_1(y)}{kc_2}\mathrm{d}y - \dfrac{y}{kc_2} + \Phi_1(t)$，$\Phi_1(t)$ 是 t 的任意函数，$\Psi_1(y)$ 是 y 的任意函数.

（Ⅶ*）若 $c_1 = c_3 = 0$，$c_0 = \dfrac{c_2^2 m^2(m^2-1)}{c_4(2m^2-1)^2}$，$c_2>0$，$c_4<0$，则有双周期 Jacobi 椭圆函数解

$$\begin{cases} u_{27} = -\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_1(t)}{k} + \dfrac{2\sqrt{c_0}k}{\sqrt{-\dfrac{c_2}{c_4(2-m^2)}}\mathrm{dn}\left(\sqrt{\dfrac{c_2}{2-m^2}}q\right)}, \\ v_{27} = \Psi_1(y) - \dfrac{2c_0(1+\Psi_1(y))c_4(2-m^2)}{c_2^2 \mathrm{dn}^2\left(\sqrt{\dfrac{c_2}{2-m^2}}q\right)}. \end{cases} \tag{28}$$

这里 $q = kx - \int \dfrac{\Psi_1(y)}{kc_2}\mathrm{d}y - \dfrac{y}{kc_2} + \Phi_1(t)$，$\Phi_1(t)$ 是 t 的任意函数，$\Psi_1(y)$ 是 y 的任意函数.

（Ⅷ*）若 $c_1 = c_3 = 0$，$c_0 = \dfrac{m^2 c_2^2}{(m^2+1)c_4}$，$c_2<0$，$c_4>0$，则有双周期 Jabobi 椭圆函数解

$$\begin{cases} u_{28} = -\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_1(t)}{k} + \dfrac{2\sqrt{c_0}k}{\pm\sqrt{-\dfrac{c_2 m^2}{c_4(m^2+1)}}\mathrm{sn}\left(\sqrt{-\dfrac{c_2}{m^2+1}}q\right)}, \\ v_{28} = \Psi_1(y) - \dfrac{2c_0(1+\Psi_1(y))c_4(m^2+1)}{c_2^2 m^2 \mathrm{sn}^2\left(\sqrt{-\dfrac{c_2}{m^2+1}}q\right)}. \end{cases} \tag{29}$$

这里 $q = kx - \int \dfrac{\Psi_1(y)}{kc_2}\mathrm{d}y - \dfrac{y}{kc_2} + \Phi_1(t)$，$\Phi_1(t)$ 是 t 的任意函数，$\Psi_1(y)$ 是 y 的任意函数.

4. 结　　论

通过使用这种改进的代数方法，我们获得了(2+1)维色散长波方程的一系列的类孤子解.实践证明本文方法还可用于求解一大类(2+1)维偏微分方程或(3+1)维偏微分方程，有关结果在另文给出.

[1] Lamb G L Jr 1980 *Elements of Solition Theory*(New York：Wiley)

[2] Chen Y，Li B and Zhang H Q 2003 *Chaos Solitions and Fractals* **17** 693

Chen Y，Yan Z Y and Zhang H Q 2002 *Theor. Math. Phys.* **132** 970

Li B，Chen Y and Zhang H Q 2002 *Phys. Lett.* A **305** 377

[3] Lou S Y and Lu J Z 1996 *J. Phys.* A **29** 4029

Lou S Y 2002 *Phys. Lett.* A **277** 94

Zhou Z J and Li Z B 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 262(in Chinese)[周振江、李志斌 2003 物理学报 **52** 262]

[4] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[5] Fan E G and Zhang H Q 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1254(in Chinese)[范恩贵、张鸿庆 1997 物理学报 **46** 1254]

[6] Fan E G and Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353(in Chinese)[范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[7] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212

Fan E G 2002 *Phys. Lett.* A **294** 26
Fan E G 2001 *Phys. Lett.* A **285** 373
Fan E G and Hon Y C 2002 *Z. Naturforsch* A **57** 692
[8] Gao Y T and Tian B 2001 *Comput. Phys. Commun.* **133** 158
Tian B and Gao Y T 2002 *Z. Naturforsch* A **57** 39
[9] Yan Z Y 2001 *Phys. Lett.* A **292** 100
Yan Z Y and Zhang H Q 2001 *Phys. Lett.* A **285** 355
Yan Z Y and Zhang H Q 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 382
[10] Wang M L 1996 *Phys. Lett.* A **216** 67
Wang M L, Wang Y M and Zhou Y B 2002 *Phys. Lett.* A **303** 45
[11] Fan E G and Hon Y C 2003 *Chaos, Solitions and Fractals* **15** 559
Fan E G 2003 *Chaos, Solitions and Fractals* **16** 819
[12] Zhang J F 2000 *Commun. Theor. Phys.* **33** 577

New soliton-like solutions to the (2 + 1)-dimensional dispersive long wave equations

Zeng Xin Zhang Hong-Qing
(*Department of Applied Mathematies, Dalian University of Technology, Dalian* 116024, *China*)
(Received 30 March 2004; revised manuscript received 8 May 2004)

Abstract

In this paper, we solve the (2 + 1)-dimensional dispersive long wave equation by using a new modified algebraic method, and obtain abundant new exact solutions. These solutions contain soliton-like solutions, periodic-like solutions, hyperbolic-like function solutions, Jacobi-like elliptic function solutions and so on.

Keywords: (2 + 1)-dimensional dispersive long wave equation, soliton-like solutions, periodic-like solutions, hyperbolic-like function solutions, Jacobi-like elliptic function solutions
PACC: 0340, 0290