

组合 Bose 场的分数自旋和分数统计性^{*}

王永龙^{1)†} 李子平^{2)‡} 许长谭¹⁾

1) 临沂师范学院凝聚态物理研究所, 临沂 276005)

2) 中国高等科学技术中心, 北京 100080)

3) 北京工业大学应用数理学院, 北京 100022)

(2005 年 3 月 21 日收到, 2005 年 8 月 24 日收到修改稿)

对组合 Bose 子场, 采用 FS (Faddeev-Senjanovic) 路径积分量子化方法进行量子化. 从量子 Noether 定理出发, 给出量子分数自旋和分数统计性质.

关键词: 路径积分量子化, 分数自旋, 分数统计

PACC: 1110, 1130, 1235

自 1982 年 Tsui D C, Stormer H L 和 Gossard A C 发现分数量子 Hall 效应以来, 对理论工作者提出新的挑战. 其中最成功的理论是 Laughlin 理论, 在填充因子分母为奇数的分数量子 Hall 效应中, 描述关联较强的 Coopers 对的基态和准粒子态的波函数与实验符合得较好^[1-3]. 但 Laughlin 理论不能说明具有分数量子 Hall 效应系统的对称性质, 不能对其物理性质有全面的理解^[4]. 本文将从 FS 路径积分量子化方法, 首先对组合 Bose 场进行量子化, 进而讨论该系统的分数自旋和分数统计性质.

为实现分数量子 Hall 效应和整数量子 Hall 效应的统一描述, Girvin 和 MacDonald 对 Laughlin 波函数作规范变换^[5], 得到 Bose 子系统的波函数, 并且这个波函数给出准长程序. 基于文献 [6—8] 中提出的理论, 将整数和分数量子 Hall 效应置于同一基础之上. 当 Fermi 子统计系统引入统计规范场 CS (Chern-Simons) 项后, 组合 Fermi 子系统满足 Bose 统计. 将 CS 项和 Bose 流体 ϕ 场耦合, 得到组合 Bose 子体系的 CSLG (Chern-Simons-Landau-Ginzburg) 作用量^[4]

$$I = \int d^3x \mathcal{L}, \quad (1)$$

其中

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{CS}} + \mathcal{L}_{\phi}, \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_{\text{CS}} = \frac{e\pi}{2\theta\Phi_0} \epsilon^{\mu\nu\rho} a_{\mu} \partial_{\nu} a_{\rho}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\phi} = & \phi^{\dagger} (i\hbar\partial_t - eA_0 - ea_0) \phi \\ & - \frac{1}{2m} \left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A} - \frac{e}{c}\mathbf{a} \right) \phi \right|^2 \\ & - \frac{1}{2} \int d^3y \phi^{\dagger}(x) \phi^{\dagger}(y) \\ & \times V(x-y) \phi(x) \phi(y), \end{aligned} \quad (4)$$

ϕ 为 Bose 流体场, A_{μ} 为电磁场, a_{μ} 为 CS 规范场, Φ_0 为单位磁通, θ 为 CS 规范场参数.

采取 FS 路径积分量子化方案对组合 Bose 场进行量子化, 该系统 Lagrange 量为 (2) 式. 相应于场 $\phi, \phi^{\dagger}, a_{\mu}$ 的正则动量为

$$\pi_{\phi^{\dagger}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^{\dagger}} = -i\hbar\phi, \quad (5a)$$

$$\pi_{\phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = i\hbar\phi^{\dagger}, \quad (5b)$$

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_i} = \frac{e\pi}{2\theta\Phi_0} \epsilon^{ij\rho} a_{\mu} \partial_i a_{\rho}, \quad (i, j = 1, 2), \quad (5c)$$

$$\pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_0} = 0. \quad (5d)$$

初级约束和正则 Hamilton 量密度分别为

$$\Lambda^0 = \pi_0 \approx 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c = & \pi_{\phi^{\dagger}} \dot{\phi}^{\dagger} + \pi_{\phi} \dot{\phi} + \pi_{\mu} \dot{a}_{\mu} - \mathcal{L} \\ = & -\frac{e\pi}{2\theta\Phi_0} \epsilon^{\mu\nu\rho} a_{\mu} \partial_{\nu} a_{\rho} + \frac{1}{2} \pi_{\phi^{\dagger}} \dot{\phi}^{\dagger} \\ & + \frac{1}{2} \pi_{\phi} \dot{\phi} + \phi^{\dagger} (eA_0 + ea_0) \phi \end{aligned}$$

^{*} 山东省教育厅科技发展计划项目 (批准号: J02G52), 北京市自然科学基金 (批准号: J942005) 资助的课题.

[†] E-mails: wyl-ong@eyou.com 或 wylong@emails.bjtu.edu.cn

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2m} \left| \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \mathbf{a} \right) \phi \right|^2 \\
& + \frac{1}{2} \int d^2 r_2 \phi^+ (\mathbf{r}_1) \phi^+ (\mathbf{r}_2) \mathcal{V}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \phi(\mathbf{r}_1) \phi(\mathbf{r}_2).
\end{aligned} \quad (7)$$

总 Hamilton 量密度为

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_c + \lambda^0(t) \Lambda_0. \quad (8)$$

根据平均场理论^[9]和文献 10 对(7)式中规范场 $\mathbf{a}$ 进行等效表述为

$$A_0 + a_0 = \nu_{\text{eff}} A_0, \quad (9)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{a} = \nu_{\text{eff}} \mathbf{A}. \quad (10)$$

(8)式可表示为

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_T = & \frac{1}{2} \pi_{\phi^+} \dot{\phi}^+ + \frac{1}{2} \pi_{\phi} \dot{\phi} - \frac{e\pi}{2\theta\Phi_0} (\nu_{\text{eff}} - 1)^2 \\
& \times \epsilon^{\mu\nu\rho} A_{\mu} \partial_{\nu} A_{\rho} + \phi^+ (e\nu_{\text{eff}} A_0) \phi \\
& + \frac{1}{2m} \left| \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{c} \nu_{\text{eff}} \mathbf{A} \right) \phi \right|^2 \\
& + \frac{1}{2} \int d^2 r_2 \phi^+ (\mathbf{r}_1) \phi^+ (\mathbf{r}_2) \\
& \times \mathcal{V}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \phi(\mathbf{r}_1) \phi(\mathbf{r}_2) + \lambda^0(t) \pi_0 \quad (11)
\end{aligned}$$

由初级约束(6)式的自治性得次级约束

$$\begin{aligned}
\Lambda^1 = \{ \pi, \mathcal{H}_T \} = & - \frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial A_0} \\
= & - \frac{e\pi}{\theta\Phi_0} (\nu_{\text{eff}} - 1) \epsilon^{\mu\nu} \partial_{\mu} A_{\nu} - \phi^+ \mathcal{V}(e\nu_{\text{eff}}) \\
\approx & 0 \quad (12)
\end{aligned}$$

为第一类约束.而次级约束(12)式的自治性不产生新约束. Λ_0 和 Λ_1 均为第一类约束.

根据 FS 路径积分量子化方案,相应于第一类约束引入规范条件,这里选取库仑规范和库仑规范的自治条件为规范条件,即

$$\Omega_0 = \partial_i A_i \approx 0, \quad (13)$$

$$\Omega_1 = A_0 \approx 0, \quad (14)$$

那么系统(2)式的 Green 函数生成泛函为

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[J, K, U] = & \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}(\Lambda) \mathcal{D}(\Omega) \det |\{ \Lambda^I, \Omega_n \}| \\
& \times \exp \left\{ i \int d^3 x \left(\mathcal{L}_{\text{eff}}^p + J\varphi + K\pi + U\lambda \right) \right\},
\end{aligned} \quad (15)$$

其中 J, K 和 U 分别为相应于 $\varphi = (\phi^+, \phi, A_{\mu})$, $\pi = (\pi_{\phi^+}, \pi_{\phi}, \pi_{A_{\mu}})$ 和 $\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \mu_1, \mu_2)$ 场量引入的外源. $|\{ \Lambda^I, \Omega_n \}|$ 与场量无关,可从生成泛函中略去.根据 δ 函数性质和 Grannman 积分性质(15)式可化为

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[J, K, U] = & \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi \mathcal{D}\lambda \exp \left\{ i \int d^3 x \left(\mathcal{L}_{\text{eff}}^p \right. \right. \\
& \left. \left. + J\varphi + K\pi + U\lambda \right) \right\},
\end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^p = \mathcal{L}^p + \mathcal{L}_m, \quad (17)$$

$$\mathcal{L}^p = \pi_{\phi^+} \dot{\phi}^+ + \pi_{\phi} \dot{\phi} + \pi_{A_{\mu}} \dot{A}_{\mu} - \mathcal{H}_c, \quad (18)$$

$$\mathcal{L}_m = \lambda^I \Lambda_I + \mu_n \Omega_n. \quad (19)$$

如果在下面整体变换

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \Delta x^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon_{\sigma} \tau^{\mu\sigma}(x, \varphi, \pi),$$

$$\varphi'(x') = \varphi(x) + \Delta\varphi(x) = \varphi(x) + \epsilon_{\sigma} \xi^{\sigma}(x, \varphi, \pi),$$

$$\pi'(x') = \pi(x) + \Delta\pi(x) = \pi(x) + \epsilon_{\sigma} \eta^{\sigma}(x, \varphi, \pi) \quad (20)$$

下,有效作用量 $I_{\text{eff}}^p = \int d^2 x \mathcal{L}_{\text{eff}}^p$ 不变(其中 ϵ_{σ} ($\sigma = 1, 2, \dots, r$) 是无穷小参数),且变换的 Jacobi 行列式为 1,由正则量子 Noether 定理,有量子守恒荷^[11-13]

$$Q^{\sigma} = \int_V d^3 x [\pi(\xi^{\sigma} - \varphi_{,\mu} \tau^{\mu\sigma}) - \mathcal{H}_{\text{eff}} \tau^{0\sigma}] = \text{const}, \quad (21)$$

其中 $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ 是与 $\mathcal{L}_{\text{eff}}^p$ 联系的有效 Hamilton 量密度.在 (x, y) 平面内旋转变换下,由(5)式和(21)式可得该系统的角动量量子守恒量为

$$\begin{aligned}
L = & \int d^2 x \epsilon^{\mu\nu} \left\{ [x_i \pi_{\phi^+} \partial_j \phi^+ + x_i \pi_{\phi} \partial_j \phi] \right. \\
& + \left(\frac{e\pi}{2\theta\Phi_0} (\nu_{\text{eff}} - 1)^2 \frac{S_{ij}^{\nu j} \epsilon_i^j A_j A_j}{2} \right. \\
& \left. \left. + \frac{e\pi}{2\theta\Phi_0} (\nu_{\text{eff}} - 1)^2 x_i \epsilon_i^j A_j \partial_j A_j \right] \right\}. \quad (22)
\end{aligned}$$

(22)式中右边第二项通过计算为零,第三项根据磁通量子化^[9]

$$\int d^2 x \epsilon^{\mu\nu} \partial_{\mu} A_{\nu} = n\Phi_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (23)$$

可得

$$\int d^2 x \frac{e\pi}{2\theta\Phi_0} (\nu_{\text{eff}} - 1)^2 x_i \epsilon_i^j A_j \partial_j A_j = \frac{n^2 e\pi}{2\theta} (\nu_{\text{eff}} - 1)^2 \Phi_0, \quad (24)$$

其中 θ 为任意常数.上式表明该系统具有分数自旋和分数统计特点.(22)式右边第一项为轨道角动量;第三项为附加项理解为自旋算符给出的分数自旋.

其中第二项中 $\frac{1}{2} S_{ij}^{\nu j} \epsilon_i^j A_j A_j$ 为自旋角动量.这里组合 Bose 子看作是带有 $2p$ 个量子磁通的 Bose 子^[14, 15].依照文献 15 中的方法有

$$\nu_{\text{eff}} = \pm \frac{1}{2p \pm 1}, \quad (p = 0, 1, 2, \dots), \quad (25)$$

那么(24)式可表示为

$$\int d^2x \frac{e\pi}{2\theta\Phi_0}(\nu_{\text{eff}}-1)^2 x_i \epsilon_{ij}^{\gamma} A_j \partial_j A_j \\ = \frac{m^2 e\pi}{2\theta(2p\pm1)^2} \Phi_0, \tag{26}$$

其中 $m=2np=0,2,4,\dots$. 自旋算符 S 为

$$S = \frac{m^2 e\pi}{2\theta(2p\pm1)^2} \Phi_0. \tag{27}$$

如果一带有一单位电荷的粒子态表示为 $|1\rangle_{\text{any}}$. 那么有

$$e^{i\beta S} |1\rangle_{\text{any}} = e^{i\beta\left(\frac{m^2\pi}{2\theta(2p\pm1)^2}\right)} |1\rangle_{\text{any}}, \tag{28}$$

其中 β 是旋转参数. 自旋算符 S 的本征值写为 s . 那么, 可得本征值和 CS 项中组合系数满足的关系为

$$s = \frac{m^2\pi}{2\theta(2p\pm1)^2}. \tag{29}$$

如果取 β 为 2π , $\theta = \frac{m^2}{(2p\pm1)^2}$ ($p=0,1,2,\dots$), 该粒子态满足费米统计, s 取半整数值. 当 $\theta = m^2\pi/2p(2p\pm1)^2$ ($p=0,1,2,\dots$) 时, 该粒子态满足玻色统计, s 取整数值. 当 θ 取其他值时, 该粒子态满足分数统计性. 该系统的量子对称性将在文献 [16] 中给出更详细讨论.

[1] Haldane F D M 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 605

[2] Clark R G , Mallett J R , Haynes S R *et al* 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1747

[3] Simmons J R , Wei H P , Engel W L *et al* 1989 *Phys. Rev. Lett.* **63** 1731

[4] Khare A 2000 *Fractional Statistics and Quantum Theory* (Beijing : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.) 287

[5] Girvin S M , MacDonald A H 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 1252

[6] Zhang S C , Hansson H , Kivelson S 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 82

[7] Zhang C , Hansson H , Kivelson S 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 980

[8] Lee D H , Zhang S C 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 1220

[9] Zhang L , Ge M L 2000 *The Latest Questions of Quantum Mechanism* (Tsinghua University Press) 274 (in Chinese) [张 礼、葛墨林 2000 量子力学的前沿问题(清华大学出版社) 第 274 页]

[10] Shizuya K 2002 *Physica* **E12** 68

[11] Li Z P 1996 *Science in China* **A39** 738

[12] Li Z P 1996 *Inter. J. Theor. Phys.* **35** 1353

[13] Li Z P 1996 *Acta. Phys. Sin.* **45** 1601 (in Chinese) [李子平 1996 物理学报 **45** 1601]

[14] Xie X C 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 389

[15] Lopez A , Fradkin F 1991 *Phys. Rev. B* **44** 5246

[16] Wang Y L *Int. J. Theor. Phys.* (in press)

Fractional spins and fractional statistics of composite Boson field^{*}

Wang Yong-Long¹⁾ Li Zi-Ping²⁾ Xu Chang-Tan¹⁾

1) *Institute of Condensed Matter of Physics , Linyi Normal University , Linyi 276005 , China)*

2) *China Center of Advanced Science and Technology (World Laboratory) , Beijing 100080 , China)*

3) *College of Applied Science , Beijing University of Technology , Beijing 100022 , China)*

(Received 21 March 2005 ; revised manuscript received 24 August 2005)

Abstract

The composite Boson fields are quantized in FS(Faddeev-Senjanovic) path integral quantized formalism. The fractional spins and fractional statistics is obtained by using the quantum Noether theorem.

Keywords : path-integral quantization , fractional spins , fractional statistics

PACC : 1110 , 1130 , 1235

^{*} Project supported by Scientific and Technological Development Plan of the Department of Education Shandong Province (Grant No. J02G52) , and the Foundation of Beijing Municipal Natural Science (Grant No. 1942005).