

柱输运管中扩散超声速辐射波的能量

蓝 可 贺贤士 赖东显 李双贵

(北京应用物理与计算数学研究所 北京 100088)

(2006 年 4 月 26 日收到 2006 年 5 月 9 日收到修改稿)

采用对关于直角坐标系下两平板间粒子传输的辐射能流计算的理论模型,给出了柱输运管中与径向位置相关的谱辐射能流的计算公式. 研究表明,由于管壁的自由程远小于传输介质的自由程,从而导致辐射能流中几何因子随径向变化,并认为这是最近关于扩散超声速辐射波实验中测得的辐射波强度随径向呈拱形分布的又一个重要原因. 另外,还给出对横截面平均的谱辐射能流、以及当辐射与物质处于局部热平衡时的辐射能流的计算公式,并将其中的几何因子与人们传统的通过几何自由程获得的几何因子进行了比较. 为方便数值模拟,还给出了辐射能流公式中含有多重复杂积分的几何因子的拟合表达式.

关键词:柱管中扩散超声速辐射波传输,辐射能流,几何因子

PACC: 9530J

1. 引言

辐射输运是发生在高温等离子体中十分重要的现象,其输运特性决定于辐射与物质原子发生相互作用过程并决定是否亚声速和超声速传播密切相关. 多年来,它是实验室聚变等离子体、天体等离子体等关注的热点. 上世纪五六十年代,人们就利用辐射输运方程从理论上对辐射传输开始了研究^[1-3]. 近年来,随着大型激光器的问世,人们又开始通过实验手段来观测辐射传输现象^[4-7].

由于辐射输运方程的求解非常复杂、困难,因而人们通常采用扩散近似或辐射热传导近似来模拟和研究辐射传输问题. 在光学厚度较厚的情况下,扩散近似是一个非常有效的模型,即使在扩散近似条件不严格成立的情况下^[3]. 事实上,扩散近似的应用非常广泛,而人们对扩散近似下的各种物理现象的研究也一直在不断深入. 另外,人们对超声辐射波也非常感兴趣,因为当马赫数,即辐射波波阵面的速度与加热物质的声速之比,大于 3 时,流体力学的运动可以忽略,物质能够得到较均匀的加热. 最近,Back 等人利用他们的 Omega 激光器对扩散超声速辐射波进行了详细的观测^[8,9]. 他们以激光驱动黑腔(hohlraum)产生的 X 射线作为辐射源,利用掠入射光栅谱仪和 X 射线条纹相机探测从嵌套在环形金壁中的柱形 SiO₂ 泡沫里穿透出来的辐射波,如图 1

所示. 实验结果表明,中心处的辐射波先于边缘处穿透出来,且辐射波波阵面沿径向的变化呈拱形分布. 他们利用数值模拟手段对此现象进行了分析,认为这主要是由于管壁对辐射能的吸收造成的.

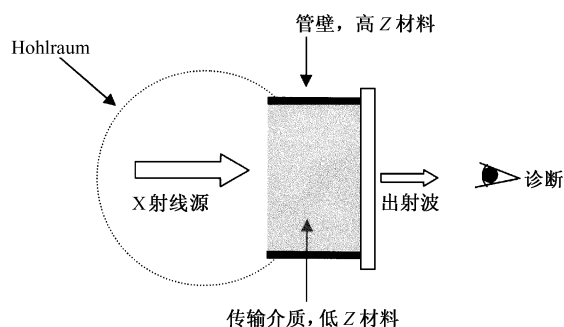


图 1 用黑腔(Hohlraum)产生的 X 射线做辐射源,研究辐射波沿柱输运管传输的实验示意图

在利用扩散近似或辐射热传导近似研究辐射沿柱输运管的传输时,需要计算辐射能流. 事实上,在某些情况下,辐射平均自由程比传输通道的几何线度大得多,这时光子的寿命主要取决于光子与固壁的碰撞,因此几何线度是影响辐射能流大小的重要因素.

为简化起见,人们在数值模拟中常采用对横截面平均的辐射能流或由简化模型得到的与径向位置无关的几何自由程来描述光子与通道壁之间的碰撞

和计算辐射能流^[10,11].对于柱输运管,几何自由程一般取为 $2R$ 或 $8R/3$,其中 R 为输运管半径.这样得到的辐射能流与径向位置无关.这显然与 Back 等人的实验观测结果不符.另外,数值结果表明,在某些情况下,采用 $8R/3$ 做几何自由程得到的扩散近似下的辐射波波阵面明显超前于通过解辐射输运方程获得的结果^[10].

文献 [12] 给出了直角坐标系中热传导近似下关于两平板间粒子传输的辐射能流的计算方法.本文将其理论模型运用到柱坐标情况,给出柱输运管中随径向位置变化的谱辐射能流的计算公式.我们的研究结果表明,除了管壁的吸能外,几何因素是导致中心处的辐射波先于边缘处穿透出来以及辐射波波前沿径向位置呈拱形分布的另一个重要原因.

本文第 2 节给出柱输运管中随径向位置变化的谱辐射能流的推导过程,并定义表征几何线度对辐射能流影响大小的几何因子,给出其计算公式.由于与径向位置相关的几何因子中含两重复杂的积分,计算起来很费机时.为节省计算时间,第 3 节给出该几何因子的拟合公式.为了考察简化模型下的几何因子,第 4 节给出对横截面平均的谱辐射能流和几何因子,并与简化模型下的几何因子进行比较.对横截面平均的几何因子含三重复复杂的积分,同样地为节省计算时间,给出其拟合公式.第 5 节给出辐射热传导方程中能流的计算公式.

2. 与径向位置相关的谱辐射能流 $F_\nu(\mathbf{r})$

采用文献 [12] 中关于直角坐标系下两平板间粒子输运辐射能流的计算的理论模型,给出柱输运管中随径向位置变化的谱辐射能流的推导过程并给出几何因子的计算公式.

令 $f_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t)$ 为空间 $\mathbf{r}$ 处、 t 时刻,单位相空间一个量子态上沿 Ω 方向传播的频率为 ν 的光子数. $\mathbf{k} = k\Omega$, $ck = 2\pi\nu$, c 为光速. $\Omega = \Omega(\theta, \varphi)$, 如图 2. 在物质处于局部热动平衡的假设下,忽略散射过程,光子的输运方程为

$$\frac{\partial f_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t)}{\partial t} + c\Omega \cdot \nabla f_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) = c\kappa'_\nu(f_{\nu,p} - f_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t)), \quad (1)$$

其中 $f_{\nu,p} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ 是物质温度为 T 时的 Planck 谱分布, κ'_ν 为有效吸收系数.(1)式的解可以写成派尔斯

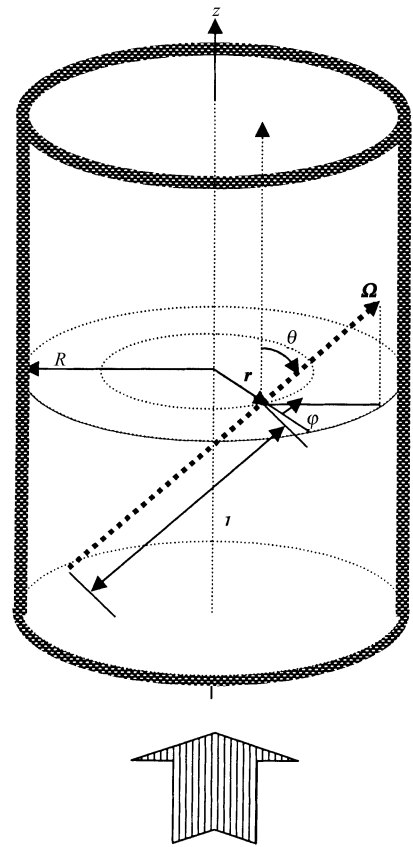


图 2 光子在柱输运管中传输示意图

积分形式

$$f_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \kappa'_\nu \left(\mathbf{r} - \Omega s, t - \frac{s}{c} \right) f_{\nu,p} \left(\mathbf{k}, \mathbf{r} - \Omega s, t - \frac{s}{c} \right) \times \exp \left(- \int_0^s \kappa'_\nu \left(\mathbf{r} - \Omega s', t - \frac{s'}{c} \right) ds' \right) ds, \quad (2)$$

这里 s 是逆 Ω 方向距 $\mathbf{r}$ 的距离.在 $\mathbf{r}$ 处, $s = 0$.

定义 $d\tau = \kappa'_\nu ds$, 由于光速很快,假设物质性能的变化在推迟时间 s/c 内可以忽略,则(2)式可写为

$$\begin{aligned} f_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) &\approx \int_0^\infty f_{\nu,p}(\mathbf{r} - \Omega s, t) e^{-\tau} d\tau \\ &= \int_0^\infty \left[f_{\nu,p}(\mathbf{r}, t) + \int_0^s \frac{df_{\nu,p}(\mathbf{r} - \Omega s', t)}{ds'} ds' \right] e^{-\tau} d\tau \\ &= f_{\nu,p}(\mathbf{r}, t) + \int_0^\infty e^{-\tau} d\tau \int_0^s \frac{df_{\nu,p}(\mathbf{r} - \Omega s', t)}{ds'} ds'. \quad (3) \end{aligned}$$

注意到 s 是逆 Ω 方向, $\frac{df_{\nu,p}}{ds}$ 可以进一步写为

$$\frac{df_{\nu,p}}{ds} = - \frac{1}{\kappa'_\nu} \Omega \cdot \nabla f_{\nu,p} \kappa'_\nu. \quad (4)$$

在重介质中, κ'_ν 很大; 在轻介质中, κ'_ν 小. 由于光子沿 z 方向传输, 光子主要在轻介质中变化, 故可以取下列近似:

$$\frac{1}{\kappa'_\nu} \left. \nabla f_{\nu,p} \right|_{\text{轻}} \gg \frac{1}{\kappa'_\nu} \left. \nabla f_{\nu,p} \right|_{\text{重}} \approx 0. \quad (5)$$

令 $\tau_{\nu,b}$ 为 ν 光子由 r 点逆 Ω 方向到输运管内边界 (重介质) 的光学长度, 那么 $\tau \leq \tau_{\nu,b}$ 表示 τ 点在轻介质中, 否则表示在管壁里. 于是有

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \frac{df_{\nu,p}}{ds'} ds' &= - \int_0^\tau \Omega \cdot \nabla f_{\nu,p} \frac{1}{\kappa'_\nu} d\tau' \\ &= \begin{cases} - \Omega \cdot \nabla f_{\nu,p} \frac{1}{\kappa'_\nu} \tau & \tau \leq \tau_{\nu,b} \\ - \Omega \cdot \nabla f_{\nu,p} \frac{1}{\kappa'_\nu} \tau_{\nu,b} & \tau > \tau_{\nu,b} \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

由于 (3) 式积分中有 $e^{-\tau}$ 因子, 对于积分有贡献的, 只是离 r 点附近几个 τ (几个自由程) 区间. 如果在这个区间, 介质变化是均匀的, 可以把 $\Omega \cdot \nabla f_{\nu,p} \frac{1}{\kappa'_\nu}$ 用 $s = 0$ 的值近似. 将 (6) 式代入 (3) 式, 并利用 $\int_0^{\tau_{\nu,b}} \tau e^{-\tau} d\tau + \tau_{\nu,b} \int_{\tau_{\nu,b}}^\infty e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-\tau_{\nu,b}}$, 得

$$\begin{aligned} f_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) &= f_{\nu,p}(\mathbf{r}, t) \\ &\quad - \Omega \cdot \nabla f_{\nu,p} \frac{1}{\kappa'_\nu} \Big|_{\mathbf{r},t} (1 - e^{-\tau_{\nu,b}}). \end{aligned} \quad (7)$$

这样, 平均每单位立体角上, 与径向位置 r 有关的 ν 光子的谱辐射能流 F_ν 为

$$\begin{aligned} F_\nu &= \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{2h\nu^3}{c^2} f_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) \Omega d\Omega \\ &= - \frac{1}{4\pi} \frac{2h\nu^3}{c^2} \nabla f_{\nu,p} \frac{1}{\kappa'_\nu} \int_\Omega (1 - e^{-\tau_{\nu,b}}) \Omega d\Omega \\ &= - \frac{1}{3} \frac{1}{\kappa'_\nu} \nabla I_{\nu,p} \cdot \left(\mathbf{I} - \frac{3}{4\pi} \int_\Omega e^{-\tau_{\nu,b}} \Omega \Omega d\Omega \right) \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\mathbf{I}$ 为单位张量. 令 l_b 为由 r 点逆 Ω 方向到输运管内边界 (重介质) 的距离, 则 $\tau_{\nu,b} = \kappa'_\nu l_b$. 由图 2 和图 3 得

$$\begin{aligned} l_b &= \frac{\sqrt{R^2 - r^2 + r^2 \cos^2 \varphi} + r \cos \varphi}{\sin \theta} \\ &= R \frac{\sqrt{1 - \xi^2 + \xi^2 \cos^2 \varphi} + \xi \cos \varphi}{\sin \theta}, \end{aligned} \quad (9)$$

这里 $\xi = r/R$, 为对管半径 R 归一化的相对径向位置. 将 $\tau_{\nu,b} = \kappa'_\nu l_b$ 和 l_b 的表达式 (9) 代入 (8) 式, 并定义输运管中 ν 光子的光学半径 $\tau_R = \kappa'_\nu R$, 我们看到 (8) 式等号右边括号里的部分是 τ_R 和 ξ 的函数.

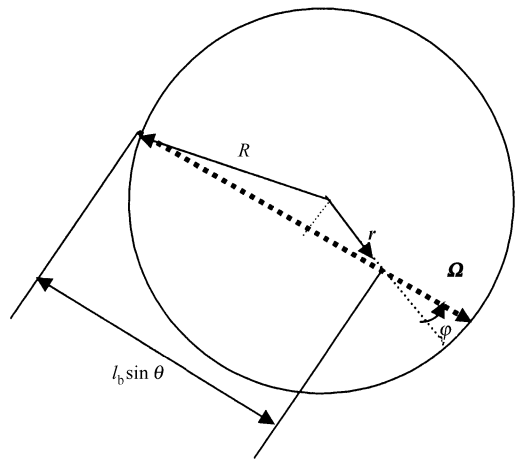


图 3 沿 Ω 方向传输的光线在柱横截面上的投影

我们定义这一部分为几何因子 $\eta(\tau_R, \xi)$, 表征几何线度对 ν 光子谱辐射能流的影响. 仅考虑 z 方向的辐射流, 则

$$\begin{aligned} \eta(\tau_R, \xi) &= 1 - \frac{3}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^\pi \exp\left(-\tau_R \frac{\sqrt{1 - \xi^2 + \xi^2 \cos^2 \varphi} + \xi \cos \varphi}{\sin \theta}\right) \\ &\quad \times \sin \theta \cos^2 \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

定义 ν 光子的物质自由程 $l_{\nu,m} = \frac{1}{\kappa'_\nu}$, 于是 τ_R 和 F_ν 可分别写为

$$\tau_R = R/l_{\nu,m}, \quad (11)$$

$$F_\nu = - \frac{1}{3} \eta(\tau_R, \xi) l_{\nu,m} \nabla I_{\nu,p}. \quad (12)$$

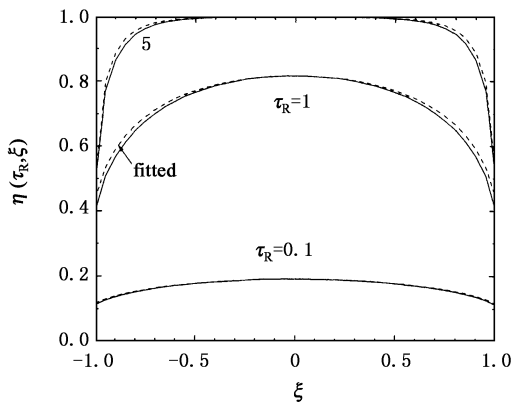


图 4 不同 τ_R 下, 用 (10) 式计算得到的 $\eta(\tau_R, \xi)$ 与用 (16) 式拟合的结果的比较 (实线为 (10) 式计算的结果, 虚线为用 (16) 式拟合的结果. 当 $\tau_R = 0.1$ 时, 二者基本上完全重合)

在图 4 中, 给出了不同 τ_R 下, $\eta(\tau_R, \xi)$ 随 ξ 的变化. 由图 4 可以看到, $\eta(\tau_R, \xi)$ 随 ξ 的增大而明显

下降;当光学半径 $\tau_R \geq 0.1$ 时,在管壁 $\xi = 1$ 处的 $\eta(\tau_R, \xi)$ 约为中心处,即 $\xi = 0$ 处的 50% .这意味着,辐射能流的大小随径向位置呈拱形分布,中心处最大,管壁处最小.由(5)式可知,这是由于管壁的自由程远小于传输介质的自由程所导致的.

近年来 Back 等人的扩散超声速辐射波实验^[8,9]已经证实从柱输运管中穿透出来的辐射波强度明显随径向位置变化,呈拱形分布,即中心处最强,管壁处的最弱.他们根据扩散近似下的数值模拟结果进行了分析,考虑了视角因子(viewfactor)、管壁材料的膨胀(即通常说的等离子体堵口)和管壁的吸能等因素的影响,认为管壁的吸能是形成拱形分布的主要原因.而我们的结果表明,几何因子随径向变化是使得辐射波强度沿径向呈拱形分布的另一个重要原因.

然而人们在用扩散近似模拟辐射输运时,通常所取的几何自由程是常数^[10,11]几何因子不随径向位置变化,故由数值模拟得到的出射波强度随径向位置的变化很小.这样获得的数值模拟结果显然不符合实验结果.

从(10)式看到, $\eta(\tau_R, \xi)$ 是 τ_R 和 ξ 的函数,它的计算公式里含有两重复杂的数值积分,数值计算起来很费机时.为节省机时,在下一节里给出 $\eta(\tau_R, \xi)$ 的拟合公式.

3. 几何因子 $\eta(\tau_R, \xi)$ 的拟合公式

将(10)式中对 φ 的积分分成 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 和 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 两段,并定义 $s = \sin \theta$, $f = 2\varphi/\pi$,把(10)式整理写成如下形式:

$$\begin{aligned} \eta(\tau_R, \xi) &= 1 - \frac{3}{2} \int_0^1 df \int_0^1 s \sqrt{1 - s^2} ds \\ &\quad \times \exp\left(-\tau_R \frac{\sqrt{1 - \xi^2 + \xi^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} f} + \xi \cos \frac{\pi}{2} f}{s}\right) \\ &\quad - \frac{3}{2} \int_0^1 df \int_0^1 s \sqrt{1 - s^2} ds \\ &\quad \times \exp\left(-\tau_R \frac{\sqrt{1 - \xi^2 + \xi^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} f} - \xi \cos \frac{\pi}{2} f}{s}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

定义对 f 积分的 ξ 的函数 $A(\xi)$ 和 $B(\xi)$:

$$A(\xi) \equiv \int_0^1 \left(\sqrt{1 - \xi^2 + \xi^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} f \right)} + \xi \cos \left(\frac{\pi}{2} f \right) \right) df, \tag{14}$$

$$B(\xi) \equiv \int_0^1 \left(\sqrt{1 - \xi^2 + \xi^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} f \right)} - \xi \cos \left(\frac{\pi}{2} f \right) \right) df, \tag{15}$$

则 $\eta(\tau_R, \xi)$ 可以用下式拟合得到:

$$\begin{aligned} \eta(\tau_R, \xi) &= 1 - \frac{3}{2} \int_0^1 s \sqrt{1 - s^2} ds e^{-\tau_R \frac{A(\xi)}{s}} \\ &\quad - \frac{3}{2} \int_0^1 s \sqrt{1 - s^2} ds e^{-\tau_R \frac{B(\xi)}{s}}. \end{aligned} \tag{16}$$

通过数值模拟,得到 $A(\xi)$ 和 $B(\xi)$ 的拟合公式:

$$A(\xi) = \frac{1 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3}{1 + a_4 \xi + a_5 \xi^2 + a_6 \xi^3}, \tag{17}$$

$$B(\xi) = \frac{1 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 - (1 + b_1 + b_2) \xi^3}{1 + b_3 \xi + b_4 \xi^2 + b_5 \xi^3}, \tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= -0.39441, a_2 = -0.69377, a_3 = 0.20825, \\ a_4 &= 1.0266, a_5 = 0.17152, a_6 = -0.050637; \\ b_1 &= 1.6139, b_2 = -5.6123, b_3 = 2.2488, \\ b_4 &= -3.9001, b_5 = 0.91804. \end{aligned}$$

进一步地,根据中值定理,分别定义 $\bar{s}_A, \bar{s}_B$ 为 s 在(16)式右边两个积分中的中值,并定义 $\tau_{R,A}(\xi) = \tau_R A(\xi)$, $\tau_{R,B}(\xi) = \tau_R B(\xi)$,最后得到 $\eta(\tau_R, \xi)$ 的拟合公式为

$$\begin{aligned} \eta_{\text{拟}}(\tau_R, \xi) &= 1 - \frac{3}{2} \bar{s}_A \sqrt{1 - \bar{s}_A^2} e^{-\frac{\tau_{R,A}(\xi)}{\bar{s}_A}} \\ &\quad - \frac{3}{2} \bar{s}_B \sqrt{1 - \bar{s}_B^2} e^{-\frac{\tau_{R,B}(\xi)}{\bar{s}_B}}, \end{aligned} \tag{19}$$

这里 $\bar{s}_A, \bar{s}_B$ 是 τ_R 和 ξ 的函数,可以用下式来拟合:

$$\bar{s}_A = \frac{s_0 + s_1 \tau_{R,A}(\xi) + s_2 \tau_{R,A}^2(\xi) + s_3 \tau_{R,A}^3(\xi)}{1 + s_4 \tau_{R,A}(\xi) + s_5 \tau_{R,A}^2(\xi) + s_6 \tau_{R,A}^3(\xi)}, \tag{20}$$

$$\bar{s}_B = \frac{s_0 + s_1 \tau_{R,B}(\xi) + s_2 \tau_{R,B}^2(\xi) + s_3 \tau_{R,B}^3(\xi)}{1 + s_4 \tau_{R,B}(\xi) + s_5 \tau_{R,B}^2(\xi) + s_6 \tau_{R,B}^3(\xi)}, \tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned} s_0 &= 0.356822, s_1 = 6.6356, s_2 = 12.091, \\ s_3 &= 2.2606, s_4 = 18.056, s_5 = 20.698. \end{aligned}$$

图 4 给出了不同 τ_R 下 $\eta(\tau_R, \xi)$ 与 $\eta_{\text{拟}}(\tau_R, \xi)$ 的计算结果. 可以看到, 二者符合得很好, 最大误差低于 10% .

4. 对柱横截面平均的谱辐射能流 $\bar{F}_\nu(r)$ 和几何因子 $\bar{\eta}(\tau_R)$

在数值模拟中, 人们常用由简化模型得到的几何自由程来计算辐射能流. 本节给出对横截面平均的谱辐射能流和几何因子, 并与简化模型下的几何因子比较.

将 F_ν 对柱横截面求平均, 由(12)式得

$$\begin{aligned}\bar{F}_\nu &= \frac{2\pi}{S} \int_0^R F_\nu r dr \\ &= -\frac{1}{3} \bar{\eta}(\tau_R) \cdot l_{\nu,m} \nabla I_{\nu,p},\end{aligned}\tag{22}$$

这里 $S = \pi R^2$ 为柱横截面, $\bar{\eta}(\tau_R)$ 为 $\eta(\tau_R, \xi)$ 对横截面平均的几何因子:

$$\bar{\eta}(\tau_R) = 2 \int_0^1 \eta(\tau_R, \xi) \xi d\xi.\tag{23}$$

令 $f = \frac{\varphi}{\pi}$, $s = \sin\theta$, 经整理得

$$\begin{aligned}\bar{\eta}(\tau_R) &= 1 - 6 \int_0^1 \xi d\xi \int_0^1 df \int_0^1 ds \cdot s \sqrt{1-s^2} \\ &\times \exp\left(-\tau_R \frac{\sqrt{1-\xi^2 + \xi^2 \cos^2(\pi f)} + \xi \cos(\pi f)}{s}\right).\end{aligned}\tag{24}$$

可以看到, $\bar{\eta}(\tau_R)$ 是 ν 光子光学半径 τ_R 的函数. 当 $\tau_R = 0$ 时, $\bar{\eta}(\tau_R) = 0$; 当 $\tau_R \rightarrow \infty$ 时, $\bar{\eta}(\tau_R) = 1$. 图 5 给出了 $\bar{\eta}(\tau_R)$ 随 τ_R 的变化. 由图 5 可见, $0 \leq \bar{\eta}(\tau_R) \leq 1$, 而且 $\bar{\eta}(\tau_R)$ 随 τ_R 的增大而增大. 由(22)式看到, $\bar{\eta}(\tau_R)$ 越接近 1, 表示几何线度对辐射能流的影响越小; 反之, 则越大. 这意味着, 当一个 ν 光子的光学半径 τ_R 很大时, 该光子的辐射能流主要取决于其物质自由程, 受输运管的几何线度的影响很小. 当 $\tau_R \rightarrow \infty$ 时, 由(22)式得到

$$\bar{F}_\nu = -\frac{1}{3} l_{\nu,m} \nabla I_{\nu,p},\tag{25}$$

即对 $\tau_R \gg 1$ 的光子, 谱辐射能流 $\bar{F}_\nu$ 与输运管半径 R 无关.

从(24)式看到, J 的计算包含三重复杂的积分, 数值模拟中很费机时. 我们用下面的拟合公式来计算 $\bar{\eta}(\tau_R)$:

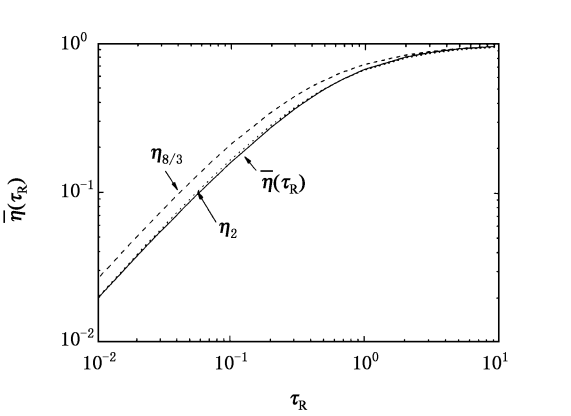


图 5 $\bar{\eta}(\tau_R)$ 与 $\eta_2, \eta_{8/3}$ 随 τ_R 的变化

$$\bar{\eta}_{\text{拟}} = \frac{a_1 \tau_R + a_2 \tau_R^2 + a_3 \tau_R^3}{1 + a_4 \tau_R + a_5 \tau_R^2 + a_3 \tau_R^3},\tag{26}$$

其中

$$\begin{aligned}a_1 &= 1.9958, a_2 = 38.682, a_3 = 22.829, \\ a_4 &= 23.408, a_5 = 46.897.\end{aligned}$$

表 1 给出了不同 τ_R 下, $\bar{\eta}_{\text{拟}}$ 与 $\bar{\eta}(\tau_R)$ 的比较. 计算结果表明, (26) 式的最大拟合误差小于 1% .

表 1 几何因子 $\bar{\eta}(\tau_R)$ 和 $\bar{\eta}_{\text{拟}}, \eta_2$ 及 $\eta_{8/3}$ 的比较. 其中 $\bar{\eta}_{\text{拟}}$ 是用拟合公式(26)算得的结果

τ_R	0.01	0.1	0.4	1	2	10
$\bar{\eta}(\tau_R)$	0.019	0.16	0.43	0.67	0.82	0.96
$\bar{\eta}_{\text{拟}}$	0.019	0.16	0.43	0.67	0.82	0.96
η_2	0.020	0.17	0.44	0.67	0.80	0.95
$\eta_{8/3}$	0.026	0.21	0.52	0.73	0.84	0.96

对于柱输运管, 人们常用到的几何自由程有 $8R/3$ 和 $2R$, 对应的几何因子分别为 $\eta_{8/3} = \frac{1}{1 + l_{\nu,m}(8R/3)}$, $\eta_2 = \frac{1}{1 + l_{\nu,m}(2R)}$. 图 5 和表 1 分别给出了不同 τ_R 下, $\eta_{8/3}, \eta_2$ 与 $\bar{\eta}(\tau_R)$ 的比较. 可以看到, 当 $\tau_R > 5$ 时, 三者均趋近于 1, 几何线度几乎不影响辐射能流; 当 $\tau_R < 1$ 时, η_2 与 $\bar{\eta}(\tau_R)$ 很接近, 但 $\eta_{8/3}$ 大了约 30%. 特别地, 当 $\tau_R \ll 1$ 时, 由(26)式得, $\bar{\eta}_{\text{拟}} \approx \eta_2 \approx 2\tau_R$. 这时, 由(22)式得

$$\bar{F}_\nu \approx -\frac{2}{3} R \nabla I_{\nu,p},\tag{27}$$

因而对 $\tau_R \ll 1$ 的光子, 谱辐射能流 $\bar{F}_\nu$ 正比于输运管半径 R .

一般地, 人们在用扩散近似或辐射热传导近似模拟 X 射线的传输时, 常用 $\eta_{8/3}$ 计算辐射能流. 通过与求解辐射输运方程获得的结果(下面简称为输运结果)比较发现^[10], 采用 $\eta_{8/3}$ 得到的扩散下的辐射能流快于前者, 辐射波波头明显超前. 我们的研究表

明,在辐射波的波头,主要是高频光子的贡献,而高频光子的吸收系数 κ'_ν 一般较小, τ_R 通常远小于 1. 这样的情况下,如前所述, $\eta_{8/3}$ 比 $\bar{\eta}(\tau_R)$ 大 30%, 故用 $\eta_{8/3}$ 得到的扩散下的高频光子的能流比输运结果快得多,从而使得辐射波波头超前.

5. 辐射热传导方程中的能流

当辐射与物质处于温度为 T 的局部热动平衡, 谱分布为 Planck 分布时,人们一般求解的是辐射热传导方程. 这里给出辐射热传导方程中能流的计算公式. 将 (4) 式改写成

$$\frac{df_{\nu,p}}{ds} = \frac{df_{\nu,p}}{dT} \frac{dT}{ds} = - \frac{df_{\nu,p}}{dT} \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla T}{\kappa'_\nu} \quad (28)$$

同样采用第 2 节的均匀介质近似, 把 $\frac{df_{\nu,p}}{dT} \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla T}{\kappa'_\nu}$ 用 $s = 0$ 的值近似, 由 (3) 式得

$$f_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) = f_{\nu,p}(\mathbf{r}, t) - \frac{df_{\nu,p}}{dT} \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla T}{\kappa'_\nu} \Big|_{r,t} (1 - e^{-\bar{\tau}_b}), \quad (29)$$

这里 $\bar{\tau}_b$ 是 $\tau_{\nu b}$ 对 ν 的平均. 这样, 总辐射能流 F (对 ν 和 Ω 积分) 为

$$\begin{aligned} F &= \int c \boldsymbol{\Omega} f_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) h\nu \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \\ &= \int \int_0^\infty \frac{2h\nu^3}{c^2} f_\nu(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) d\nu d\Omega \\ &= - \frac{l_R c}{3} 4aT^3 \nabla T \cdot \left\{ \mathbf{I} - \frac{3}{4\pi} \int \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega} e^{-\bar{\tau}_b(\boldsymbol{\Omega})} d\Omega \right\}, \end{aligned} \quad (30)$$

其中 a 为辐射密度常量, l_R 为 Rossland 平均自由程,

$$l_R = \frac{\int_0^\infty \frac{df_p}{dT} \frac{8\pi h\nu^3}{\kappa'_\nu c^3} d\nu}{\int_0^\infty \frac{df_p}{dT} \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} d\nu}$$

$$= \frac{1}{4aT^3} \int_0^\infty \frac{df_p}{dT} \frac{8\pi h\nu^3}{\kappa'_\nu c^3} d\nu. \quad (31)$$

将 F 对柱横截面求平均, 得到辐射平均流

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \frac{2\pi}{\pi R^2} \int_0^R F r dr \\ &= - \frac{l_R c}{3} 4aT^3 \nabla T \left(1 - \frac{3}{4\pi} \frac{2}{R^2} \int_0^R \int_0^\Omega e^{-\bar{\tau}_b} \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega} d\Omega r dr \right) \\ &= - \frac{l_R c}{3} 4aT^3 \nabla T \cdot \bar{\eta}(\bar{\tau}_R), \end{aligned} \quad (32)$$

这里的 $\bar{\eta}(\bar{\tau}_R)$ 与上一节中的 $\bar{\eta}(\tau_R)$ 形式一样, 但计算中所用的是对 ν 平均的光学半径 $\bar{\tau}_R$.

6. 结 论

我们采用文献 [12] 中关于直角坐标系下两平板间粒子输运辐射能流计算的理论模型, 给出了随径向位置变化的谱辐射能流的计算公式. 研究结果表明, 由于管壁的自由程远小于传输介质的自由程, 辐射能流的大小与径向位置有关, 辐射能流中表征几何线度影响大小的几何因子 $\bar{\eta}(\tau_R, \xi)$ 随 ξ 的增大而明显下降. 我们指出, 这是导致辐射波波阵面沿径向呈拱形分布的另一个重要原因. 我们进一步给出了对横截面平均的谱辐射能流的计算公式, 以及当辐射与物质处于局部热动平衡时辐射热传导方程中能流的计算公式, 并将其中的几何因子 $\bar{\eta}(\tau_R)$ 与采用 $2R$ 和 $8R/3$ 做几何自由程得到的几何因子 $\eta_2, \eta_{8/3}$ 进行了比较. 结果表明, 当 $\tau_R < 1$ 时, η_2 与 $\bar{\eta}(\tau_R)$ 很接近, 但 $\eta_{8/3}$ 大了约 30%; 当 $\tau_R > 5$ 时, 三者均趋于 1, 几何线度对辐射能流的影响可以忽略不计. 为节省数值模拟时间, 我们分别给出了随径向变化的几何因子和对横截面平均的几何因子的拟合公式, 前者的最大拟合误差小于 10%, 后者的小于 1%.

谨以此文献给于敏院士八十华诞.

- [1] Pomraning G C 1973 *The Equations of Radiation Hydrodynamics* (Pergamon Press ,Oxford)p50
- [2] Marshak R E 1958 *Phys. Fluids* **1** 24
- [3] Zel 'dovich ,Raizer 1980 *Physics of Shock Waves and High-temperature Hydrodynamic Phenomena* ,edited by Wallace D. Hayes and Ronald F. Probstein (Dover Publications ,Inc. Mineola ,New York)p598
- [4] Hoarty D ,Willi O ,Barringer L ,Vickers C ,Watt R ,Nazarov W 1999 *Phys. Plasmas* **6** 2171
- [5] Sigel R ,Eidmann K ,Lavarenne F ,Schmalz R F 1990 *Phys. Fluids B* **2** 199
- [6] Afshar-rad T ,Desselberger M ,Dunne M ,Edwards J ,Foster J M ,Hoarty D ,Jones M W ,Rose S J ,Rosen P A ,Taylor R ,Willi O 1990 *Phys. Rev. Lett.* **73** 74
- [7] Massen J ,Tsakiris G D ,Eidmann K ,Földes I B ,Löwer Th ,Sigel R ,Witkowski S ,Nishimura N ,Endo T ,Shiraga H ,Takagi M ,Kato Y ,Nakai S 1994 *Phys. Rev. E* **50** 5130
- [8] Back C A ,Bauer J D ,Hammer J H ,Lasinski B F ,Turner R E ,Rambo P W ,Landen O L ,Suter L J ,Rosen M D ,Hsing W H 2000 *Phys. Plasmas* **7** 2125
- [9] Back C A ,Bauer J D ,Landen O L ,Turner R E ,Lasinski B F ,Hammer J H ,Rosen M D ,Suter L J ,Hsing W H 2000 *Phys. Rev. Lett* **84** 274
- [10] Lai D X ,Li S G ,Xu Y ,Feng T G ,Li J H ,Lan K ,Meng G W 2005 GF-A0091791 (in Chinese) 赖东显、李双贵、许 琰、冯庭桂、李敬宏、蓝 可、孟广为 2005 FG-A0091791
- [11] Zhang J ,Chang T Q 2004 *Fundamentals of the Target Physics for Laser Fusion* (Beijing :National Defense Industry Press)p358 (in Chinese) 张 钧、常铁强 2004 激光聚变靶物理基础(国防工业出版社)第 358 页]
- [12] Yu M 1996 *A collection of Yu Min 's Theses* (Beijing :Institute of Applied Physics and Computational Mathematics)p168(in Chinese) [于 敏 1996 于敏论文集 (北京应用物理与计算数学研究所)第 168 页]

Radiative energy flux of diffusive supersonic wave in a cylinder

Lan Ke He Xian-Tu Lai Dong-Xian Li Shuang-Gui

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics , Beijing 100088 ,China)

(Received 26 April 2006 ; revised manuscript received 9 May 2006)

Abstract

The calculation of radiative energy flux is very important in the study of diffusive supersonic wave transfer when the radiative thermal conduction approximation is used. In this paper , a formula of radial position-dependent spectral energy flux is given for the diffusive supersonic wave in a low density filled cylinder with a high density wall. A geometrical factor is defined to describe the influence of the radial size of the cylinder on the radiative energy flux. From the formula , the geometrical factor decreases with the radial position from center to edge , due to the much shorter mean free path in the wall than in the fill. This is another important reason in causing a significant curvature in the radiation front , which was observed in recent diffusive supersonic wave experiments. In addition , expressions for calculating the averaged spectral energy flux over the cylinder cross-section and the energy flux in local thermal equilibrium are given. The geometrical factor in the expression of the averaged spectral energy flux is compared with the conventional geometrical factor obtained via geometrical free path which people usually used in their simulation. Finally , to make the simulation easy , approximate expressions are given for the geometrical factors.

Keywords : diffusive supersonic wave transfer in cylinder , energy flux , geometrical factor

PACC : 9530J