

关于 Noether 对称性的两种理解^{*}

吴惠彬[†] 梅凤翔

(北京理工大学理学院, 北京 100081)
(2005 年 11 月 4 日收到, 2006 年 1 月 25 日收到修改稿)

介绍了对 Lagrange 系统 Noether 对称性的两种理解, 一种理解为 Lagrange 函数的不变性, 另一种理解为作用量的不变性. 研究表明, 这两种理解是不同的. 在一些条件下, Lagrange 函数的不变性可以成为作用量的不变性, 在另一些条件下, 作用量的不变性可以成为 Lagrange 函数的不变性. 将 Noether 对称性理解为作用量的不变性是合理的.

关键词: Lagrange 系统, Noether 对称性, 作用量的不变性, Lagrange 函数的不变性

PACC: 0320

1. 引言

力学系统的对称性与不变量的研究, 是数理科学, 特别是分析力学的一个近代发展方向. 对称性主要有 Noether 对称性^[1-10]、Lie 对称性^[11, 12]和形式不变性^[13, 14]. 关于 Noether 对称性, 文献 [15] 指出: 他们所作的处理是基于 Lagrange 函数的不变性, 但是许多作者是基于作用量的不变性. 这样, 关于 Noether 对称性就出现了两种理解: 一种是作用量在群的无限小变换下的不变性, 另一种是 Lagrange 函数在群的无限小变换下的不变性. 于是提出如下问题: 这两种理解是一样的吗? 如果不一样, 哪个是合理的理解? 本文就这两个问题进行了研究.

2. 作用量的不变性

研究 Lagrange 系统, 其微分方程为

$$E_s(L) = 0 \quad (s = 1, \dots, n), \quad (1)$$

式中, $L = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数, 而

$$E_s = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s} \quad (2)$$

为 Euler 算子. 研究时间和广义坐标的无限小变换

$$\begin{aligned} t^* &= t + \epsilon \xi_0(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\ q_s^*(t^*) &= q_s(t) + \epsilon \xi_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \end{aligned} \quad (3)$$

式中, ϵ 为一无限小参数, ξ_0, ξ_s 为无限小生成元. Hamilton 作用量在群的无限小变换(3)式下的准不变性归结为 Noether 等式^[16]

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + \dot{G}_N = 0, \quad (4)$$

式中, $G_N = G_N(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 为规范函数, 而

$$X^{(1)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \dot{\xi}_0) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \quad (5)$$

如果存在规范函数 G_N 使无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足 Noether 等式(4), 那么 Lagrange 系统(1)存在 Noether 守恒量

$$I_N = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \dot{\xi}_0) + G_N = \text{const.} \quad (6)$$

特别地, 若 Hamilton 作用量是无限小群变换(3)式的不变量, 则 Noether 等式(4)成为

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) = 0. \quad (7)$$

这正是文献 [1] 的结果.

3. Lagrange 函数的不变性

假设 Lagrange 函数 L 经群的无限小变换(3)式变为 L^* , 于是有

$$\begin{aligned} L^* &= L\left(t^*, \mathbf{q}^*, \frac{d\mathbf{q}^*}{dt^*}\right) \\ &= L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \epsilon X^{(1)}(L) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (8)$$

定义: 如果用 L^* 替换 L , 方程(1)的形式保持

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10272021, 10572021)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20040007022)资助的课题.

[†] E-mail: huibinwu@bit.edu.cn

不变,即有

$$E_s(L^*) = 0, \quad (9)$$

就称这种不变性为 Lagrange 函数在群的无限小变换(3)式下的准不变性.

将(8)式代入(9)式,忽略 ϵ^2 及更高阶小量并利用方程(1),得

$$E_s\{X^{(1)}(L)\} = 0 \quad (s = 1, \dots, n). \quad (10)$$

(10)式为 Lagrange 函数 L 在群的无限小变换(3)式下准不变性的判据方程.

事实上, Lagrange 函数在群的无限小变换(3)式下的准不变性就是 Lagrange 系统的形式不变性^[17].

特别地,若 Lagrange 函数 L 在无限小变换(3)式下保持不变,即

$$L^* = L(t^*, q^*, \frac{dq^*}{dt^*}) = L(t, q, \dot{q}), \quad (11)$$

则有

$$X^{(1)}(L) = 0. \quad (12)$$

这正是文献[18]中 Noether 定理所依据的.

4. 两种理解之间的关系

上述对 Noether 对称性的两种理解并不是一回事.下面研究两种不同理解之间的关系.

4.1. 作用量的准不变性在什么条件下成为 Lagrange 函数的准不变性

Euler 算子 E_s 对 $L\dot{\xi}_0$ 和 $\dot{G}_N$ 的作用分别为

$$E_s(L\dot{\xi}_0) = E_s(L)\dot{\xi}_0 + LE_s(\dot{\xi}_0) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_0 + \dot{L}\frac{\partial \dot{\xi}_0}{\partial \dot{q}_s},$$

$$E_s(\dot{G}_N) = \frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{G}_N}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial \dot{G}_N}{\partial q_s}.$$

于是

$$\begin{aligned} & E_s(L\dot{\xi}_0) + E_s\{X^{(1)}(L)\} + E_s(\dot{G}_N) \\ &= E_s(L)\dot{\xi}_0 + LE_s(\dot{\xi}_0) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_0 + \dot{L}\frac{\partial \dot{\xi}_0}{\partial \dot{q}_s} \\ &+ \frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{G}_N}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial \dot{G}_N}{\partial q_s} + E_s\{X^{(1)}(L)\}. \end{aligned} \quad (13)$$

因此,我们有命题 1.

命题 1 对于 Lagrange 系统(1),作用量的准不变性若满足条件

$$E_s(L\dot{\xi}_0) + E_s(\dot{G}_N) = 0, \quad (14)$$

则它也是 Lagrange 函数的准不变性.

证明 作用量的准不变性满足等式(4).将 Euler 算子 E_s 对其作用,得

$$E_s(L\dot{\xi}_0) + E_s\{X^{(1)}(L)\} + E_s(\dot{G}_N) = 0.$$

注意到条件(14)式,则有(10)式成立.由此可知,在条件(14)式下,作用量的准不变性也是 Lagrange 函数的准不变性.

对于点变换,有

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \xi_0(t, q), \\ \xi_s &= \xi_s(t, q), \\ G_N &= G_N(t, q). \end{aligned} \quad (15)$$

此时

$$E_s(\dot{\xi}_0) = E_s(\dot{G}_N) = 0. \quad (16)$$

注意到(13)和(1)式,于是有

$$E_s(L\dot{\xi}_0) + E_s\{X^{(1)}(L)\} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_0 + \dot{L}\frac{\partial \dot{\xi}_0}{\partial \dot{q}_s}. \quad (17)$$

命题 2 若作用量准不变性的无限小生成元为

$$\begin{aligned} \xi_0 &= t, \\ \xi_s &= \xi_s(t, q), \end{aligned}$$

则它也是 Lagrange 函数的准不变性.

证明 当

$$\begin{aligned} \xi_0 &= t, \\ \xi_s &= \xi_s(t, q) \end{aligned}$$

时,(17)式右端为零.利用命题 1 得证命题 2.

4.2. Lagrange 函数的准不变性在什么条件下成为作用量的准不变性

命题 3 对于满足(10)式的无限小生成元 ξ_0, ξ_s ,若存在规范函数

$$G_N = G_N(t, q, \dot{q})$$

满足(4)式,则 Lagrange 函数的准不变性成为作用量的准不变性;否则,其不是作用量的准不变性.

4.3. 通过 Lie 对称性研究两种理解的关系

对于 Lagrange 系统,作用量的准不变性一定是 Lie 对称性,而 Lie 对称性为 Lagrange 函数准不变性的充要条件是下式成立^[17]:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial L}{\partial t}\right) - \frac{\partial \xi_0}{\partial q_s}\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial L}{\partial q_k}\right) \\ & - \frac{\partial \xi_k}{\partial q_s}\frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \xi_k}{\partial q_s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \end{aligned}$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{\xi}_0}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial \dot{\xi}_0}{\partial q_s} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \dot{\xi}_0 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = 0. \quad (18)$$

当

$$\begin{aligned} \xi_0 &= t, \\ \xi_s &= \xi_s(t, q) \end{aligned} \quad (19)$$

时 (18) 式的等号左端成为

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial \xi_k}{\partial q_s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial q_s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \xi_k}{\partial q_s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \\ &= \frac{\partial \xi_k}{\partial q_s} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

于是有命题 4.

命题 4 若生成元 (19) 式是作用量准不变的, 则它也是 Lagrange 函数准不变的.

由此可见, 命题 4 与命题 2 一致.

这样, 对 Noether 对称性的两种理解之异同就得以解决.

5. 算 例

考虑一个二自由度系统, 其 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \exp(-\gamma t) \quad (\gamma = \text{const}). \quad (21)$$

取生成元为

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 0, \\ \xi_1 &= \frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma t), \end{aligned}$$

$$\xi_2 = 0, \quad (22)$$

将其代入 (4) 式, 得

$$G_N = -q_1. \quad (23)$$

因此, 生成元 (22) 式对应系统作用量的准不变性. 由命题 2 或命题 4 可知, 这个准不变性也是 Lagrange 函数的准不变性. 取生成元为

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 1, \\ \xi_1 &= \xi_2 = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

则有

$$X^{(1)}(L) = -\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \exp(-\gamma t) = -\gamma L, \quad (25)$$

$$E_s\{X^{(1)}(L)\} = 0 \quad (s = 1, 2). \quad (26)$$

因此, 生成元 (24) 式对应 Lagrange 函数的准不变性, 将 (24) 式代入 (4) 式得

$$-\gamma L + \dot{G}_N = 0. \quad (27)$$

由此找不到 G_N . 由命题 3 可知, 它不是作用量的准不变性.

6. 结 论

本文的研究表明, 作用量的不变性与 Lagrange 函数的不变性是两种不同的不变性. 当然, 在一定条件下两者可以一致. Noether 的论文称之为“不变变分问题”, 研究的是“积分是群不变的”. 因此, Noether 对称性应理解为作用量的不变性, 而 Lagrange 函数的不变性就是我们研究的一类形式不变性.

- [1] Noether E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys.* **K I** 235
- [2] Djukić D S 1974 *Arch. Mech.* **26** 243
- [3] Candotti E, Palmieri C, Vitale B 1972 *Am. J. Phys.* **40** 424
- [4] Li Z P 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 1659 (in Chinese) [李子平 1981 物理学报 **30** 1659]
- [5] Vujanović B 1978 *J. Non-Linear Mech.* **13** 185
- [6] Luo Y, Zhao Y Y 1986 *J. Beijing Inst. Technol.* **6** 41 (in Chinese) [罗勇、赵跃宇 1986 北京工业学院学报 **6** 41]
- [7] Liu D 1989 *Acta Mech. Sin.* **21** 75 (in Chinese) [刘瑞 1989 力学学报 **21** 75]
- [8] Mei F X 1993 *Sci. China A* **36** 1456
- [9] Zhang J F 1993 *Appl. Math. Mech.* **14** 635
- [10] Ge W K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 939 (in Chinese) [葛伟宽 2002 物理学报 **51** 939]
- [11] Lutzky M 1979 *J. Phys. A* **12** 973

- [12] Fu J L, Chen J Q 2003 *Phys. Lett. A* **317** 255
- [13] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120
- [14] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2004 *Chin. Phys.* **13** 1999
- [15] José J V, Saletan E J 1998 *Classical Dynamics, A Contemporary Approach* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [16] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京: 科学出版社)]
- [17] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京: 北京理工大学出版社)]
- [18] Arnold V I 1978 *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (New York: Springer-Verlag)

Two comprehensions on Noether symmetry^{*}

Wu Hui-Bin[†] Mei Feng-Xiang

(*Faculty of Science , Beijing Institute of Technology , Beijing 100081 , China*)

(Received 4 November 2005 ; revised manuscript received 25 January 2006)

Abstract

This paper presents two ways of comprehending the Noether symmetry for the Lagrange system. One is based on invariance of the Lagrangian , the other is based on invariance of the action. This paper proves that these two comprehensions are different from each other. We give the condition under which the invariance of the Lagrangian can become the invariance of the action , and the condition under which the invariance of the action can become the invariance of the Lagrangian is obtained. It is suitable that the Noether symmetry is comprehended as the invariance of the action.

Keywords : Lagrange system , Noether symmetry , invariance of action , invariance of Lagrangian

PACC : 0320

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10272021 , 10572021) and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China (Grant No. 20040007022).

[†] E-mail : huibinwu@bit.edu.cn