

混沌的乘法规律^{*}

于津江^{1)2)†} 许海波³⁾

1) (石家庄学院物理系, 石家庄 050035)

2) (石家庄学院物理研究所, 石家庄 050035)

3) (北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(2005 年 4 月 29 日收到, 2005 年 6 月 6 日收到修改稿)

从理论上分析了几个混沌映射相乘的规律, 提出了混沌相乘的思想. 数值仿真与理论计算结果表明, 几个混沌映射相乘仍然具有非线性动力学特性和分岔序列, 并且具有混沌吸引子和对初值敏感性. 混沌的乘法概念具有重要的理论意义和应用价值.

关键词: 相乘混沌, 吸引子, 分岔序列

PACC: 0545

1. 引言

在上个世纪末, 随着近代科学的迅猛发展, 混沌作为边缘学科已经成为一项热门话题. 人们已经认识到混沌过程可能对初值的敏感性问题, 系统从规则运动变到混沌运动的一些道路已经为人所知. 所谓混沌是指在确定性系统中出现的一种貌似无规则、类似随机现象, 是普遍存在的复杂运动形式和自然规律. 在这些看似杂乱无章的表面现象下却有着惊人的相似的运动规律. 混沌现象是非线性动力学系统在一定条件下所表现的一种运动形式, 是发生在确定性系统中的一种不确定行为, 表现在混沌系统具有分维吸引子和对初值敏感性, 由于非线性的动力学系统的运动状态失稳而出现混沌状态是非常普遍的现象. 在过去的几十年中, 非线性动力学的知识已经应用到范围极其广泛的各个领域^[1-4].

自然界中的很多混沌现象并不是一个简单形式. 在许多情况下混沌系统是由几个相同或不同结构的混沌映射相乘的结果, 本文就这一类混沌系统的特点进行了分析, 通过各种相乘组合和改变系统参数, 相乘系统的混沌行为和分岔序列出现了很多鲜为人知的现象, 并在 Lyapunov 指数谱上体现出来, 得到了许多新的相乘系统的混沌行为变化规律. 由于相乘混沌系统的组成形式繁多, 文章中主要对

两个相同或不同混沌映射相乘而构成的新系统进行分析, 经过计算机模拟仿真实验, 从中得到了许多不同组合的相乘混沌系统的非线性动力学特性和分岔序列^[5-11].

2. 相乘混沌系统的动力学模型

首先考虑有 M 个混沌映射的基本形式, 其动力学差分方程为

$$x_{n+1}^j = f(x_n^j, \mu_j), \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (1)$$

为了研究和讨论方便, 选取两个混沌映射 ($M=2$) 作为研究对象, 对其进行基本乘法规律的分析, 则(1)式可以改写为

$$\begin{aligned} x_{n+1}^1 &= f(x_n^1, \mu_1), \\ x_{n+1}^2 &= f(x_n^2, \mu_2), \end{aligned} \quad (2)$$

这里取 $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ 为所有混沌系统的统一系统参数, 那么则完全相同结构相乘映射的基本形式为

$$x_{n+1} = f(x_n^1, \mu) \cdot f(x_n^2, \mu), \quad (3)$$

如果两混沌映射为不相同结构, 则相乘后的新混沌系统可写为

$$x_{n+1} = f(x_n^1, \mu) \cdot g(x_n^2, \mu). \quad (4)$$

对于二维离散混沌系统的两个迭代变量方向上, 分别有两种相乘形式, 在 x 变量方向上的相乘形式

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10147201, 10247003)资助的课题

[†] E-mail: yujinjiang 6060@Yahoo.com.cn

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n, \mu) \cdot h(x_n, \mu), \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n, \mu) \cdot h(x_n, \mu); \end{cases} \quad (5)$$

在 y 变量方向上的相乘形式

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n, \mu) \cdot h(y_n, \mu), \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n, \mu) \cdot h(y_n, \mu). \end{cases} \quad (6)$$

以上只给出了两种一维混沌映射及其两种一维和二维混沌映射的相乘形式. 由于混沌映射的相乘形式很多, 尤其是高维混沌映射和不同结构混沌映射的相乘形式更为复杂.

因为各种相乘混沌映射的分岔序列和简单混沌映射的分岔序列有相似的规律, 所以可以使用不动点的确定方法和(7)式得出具体的分岔序列,

$$| [F^n(x) \cdot F^n(x)] | = 1. \quad (7)$$

从(7)式可以看出相乘混沌映射的系统参数 μ 的临界值仍然有收敛趋势, 并且最后收敛到一个极值 μ_∞ . 下面具体讨论一维 logistic 映射、三角迭代映射和二维 Henon 映射相乘的混沌系统分岔序列、Lyapunov 指数谱和吸引子的基本特点^[5].

3. 数值模拟结果

由于多个混沌映射所构成的相乘混沌系统种类很多, 要讨论多个混沌映射相乘的情况较为复杂. 为了便于讨论和研究, 如下只讨论两个简单映射相乘的混沌行为和非线性动力学特性. 对于两个较为简单的混沌映射而言, 选取相同和不同结构的映射形式相乘, 可以得到许多非线性动力学特性. 并以每个简单映射的特征为基础推算出许多新的非线性动力学规律.

3.1. 相同结构混沌映射的相乘形式及分岔序列

考虑两个相同结构的一维 logistic 映射, 由于(3)式可得到的相乘映射表达方式为

$$x_{n+1} = (1 - \mu x_n^2)^2, \quad (8)$$

选取系统参数 $0.2 < \mu < 2$ 的范围, 对相乘映射(8)进行数值模拟. 从图1可以看出整个混沌系统的分岔情况, 它具有与简单映射相似的分岔序列, 但是自分岔点开始二周期轨道的分离速度要比简单映射更快, 而后又略有收拢. 这里还可通过分岔和临界点的计算方法, 得到相应的相乘混沌系统的分岔序列及简单系统与相乘系统分岔点的关系.

根据不动点的确定方法和(7)式可以得出简单映射的不动点条件和临界条件, 其中 μ_a 为简单映

射的系统参数

$$x_n = 1 - \mu_a x_n^2, \quad (9)$$

$$2\mu_a x_n = 1, \quad (10)$$

同时还可得到相乘映射的不动点条件和临界条件, 其中 μ_b 为相乘映射的系统参数

$$x_n = 1 - 2\mu_b x_n^2 + \mu_b^2 x_n^4, \quad (11)$$

$$-4\mu_b x_n + 4\mu_b^2 x_n^3 = -1. \quad (12)$$

由(9)和(10)式可以得到简单映射在分岔点的系统值为 0.667, 同理可以推导出相乘映射在分岔点的系统值为 0.64, 两个映射分岔点的系统差值为 $\Delta x = 0.027$. 将简单映射在分岔点系统值减去系统差值代入(11)式便得到简单映射与相乘映射第一分岔点的关系

$$\mu_b = \frac{4\mu_a^2 - \frac{4\mu_a^2}{\sqrt{2\mu_a}} \sqrt{1 - 0.054\mu_a}}{(1 - 0.054)^2}. \quad (13)$$

用上述方法还可得到简单映射与相乘映射二倍周期以上的分岔时的系统参数关系, 表1为简单序列与相乘序列的系统参数值比较.

表1 简单映射与相乘映射分岔序列数值比较

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	...
简单序列	0.75	1.25	1.36	1.392	...
相乘序列	0.5	1.41	1.55	1.586	...

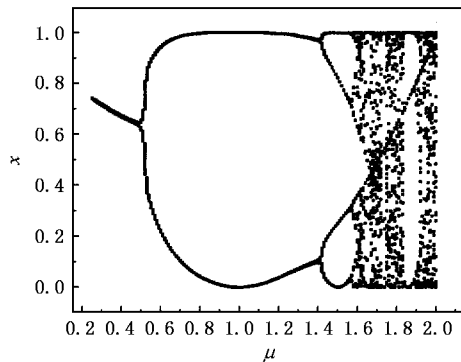


图1 映射(8)式分岔图

从图1可看到, 在混沌区内同样存在着许多 $3P, 5P, 7P, \dots$ 等周期窗口, 这与一维 logistic 映射的规律基本相同. 由此可见, 相乘映射的混沌带中同样存在着无穷层次的自相似结构. 图2为映射(8)式的 Lyapunov 指数.

3.2. 不同结构混沌映射的相乘形式及分岔序列

选择平方映射与三角映射相乘, 从而得到不同

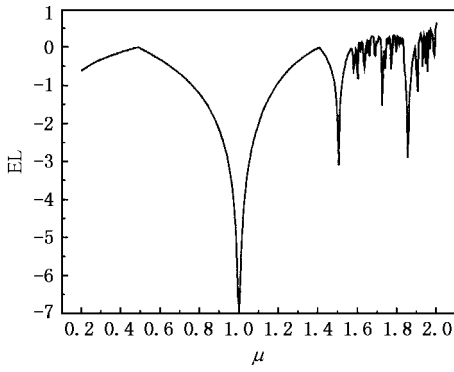


图 2 映射(8)式的 Lyapunov 指数谱

结构的一维相乘混沌映射

$$x_{n+1} = \mu(1 - \mu x_n^2) \cos x, \quad (14)$$

其分岔序列与上述讨论的相同结构混沌映射相乘时的情况基本相同. 图 3 是相乘混沌系统(14)所形成的分岔图, 图 4 为 Lyapunov 指数谱. 从图中可看到不

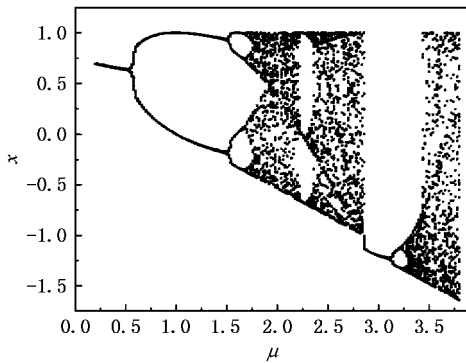


图 3 映射(14)分岔图

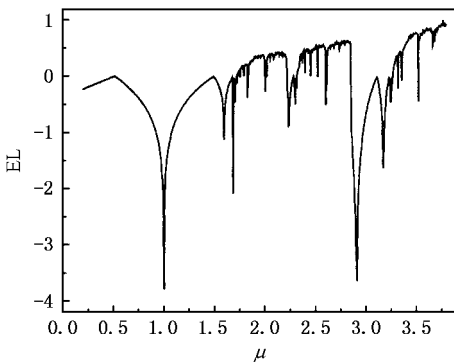


图 4 映射(14) Lyapunov 指数谱

同结构的混沌映射相乘时其分岔序列与简单映射的分岔序列极为相似. 在混沌区内仍然有混沌窗口出现, 其中包含有无穷层次的自相似结构, 但是在混沌

吸引子扩散到一定程度时, 映射又重新从不动点开始到周期分岔最后到混沌状态.

3.3. 一维映射与二维映射的相乘的混沌行为

我们再考虑一维 logistic 映射与二维 Henon 映射的基本形式

$$x_{n+1} = (1 - \mu x_n^2), \quad (15)$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = bx_n. \end{cases} \quad (16)$$

根据(5)式可以得到如下的相乘混沌映射

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - ax_n^2 + y_n)(1 - \mu x_n^2), \\ y_{n+1} = bx_n(1 - \mu x_n^2). \end{cases} \quad (17)$$

选取 logistic 映射的系统参数 μ 在 [0.2, 3.8] 之间, 选取 Henon 映射的系统参数 $a = 1.4, b = 0.3$ 时, 经过 20000 次迭代运算, 去掉与初值有关的 400 次迭代, 可得到图 5 所示的相乘混沌映射(17)的分岔图. 在图 5 中清晰地显示出相乘混沌映射(17)的分岔结构, 它是由混沌开始收缩为二周期轨道, 再进入混沌区, 而后又是二周期轨道. 最后经过分岔到混沌. 相乘混沌映射(17)也具有简单系统的分岔序列和混沌行为, 并在混沌区内呈现出混沌窗口. 图 6 为映射(17)的 $x-y$ 平面上二维吸引子.

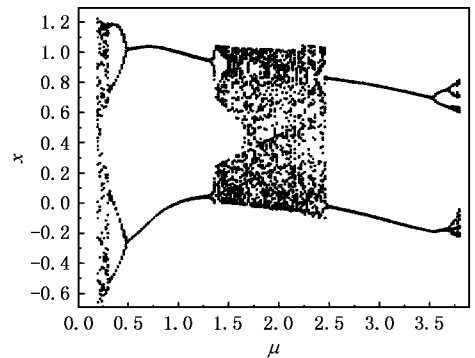


图 5 映射(17)分岔图

由相乘形式(6)可以得到一维 logistic 映射与二维 Henon 映射的另一种相乘形式

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - ax_n^2 + y_n)(1 - \mu y_n^2), \\ y_{n+1} = bx_n(1 - \mu y_n^2), \end{cases} \quad (18)$$

在实际计算中发现, 当 Henon 映射的系统参数 $a = 1.4, b = 0.3$ 时, 选取 logistic 映射的系统参数 μ 在 [0.2, 8] 之间, 相乘混沌系统(18)具有一个不稳定结点和一个焦点. 图 7 是相乘混沌映射(18)式的二维吸引子. 由图 7 可以更清楚地看出, 相乘混沌映射

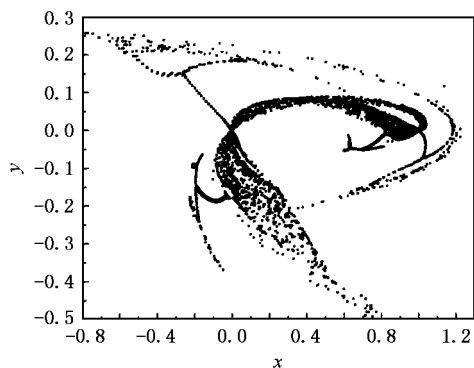


图6 映射(17)吸引子

(18)式的吸引子仍然具有吸引域,其吸引域的范围在 $y = -0.38 \sim 0.38$ 和 $x = -1.25 \sim 1.25$ 之间,并呈现倍周期分叉现象.

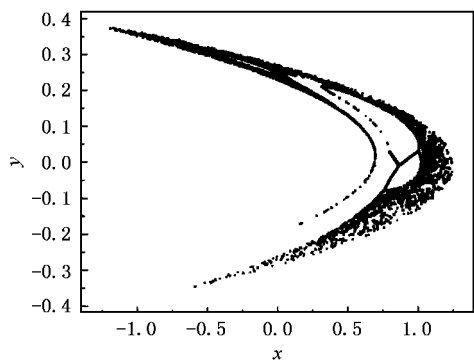


图7 映射(18)吸引子

以上理论分析和计算机仿真的结果表明,相乘映射(8)(14)(17)和(18)式都具有不同的非线性动力学行为和分岔序列.四种相乘混沌映射仍然是一种有序状态,对于一维相乘映射来说,改变其相乘映射的系统参数使系统的行为轨道分裂,继续改变系统参数,轨道的分裂继续发生,最后将失去周期性而进入混沌状态.由(5)式和(6)式还可以看出,在一

维映射与二维映射相乘时,能够得到很多相乘形式.不同的相乘形式,非线性动力学行为也不同,各自都具有不同层次的自相似结构.

在相乘混沌映射中,特别是在高维和重度的相乘混沌映射中,由于两个或者多个混沌映射相乘时,整个映射具有很多个系统参数.在研究过程中一般将相乘映射的两个或多个系统参数合并为一个系统参数进行研究分析,特殊条件下也可确定多个系统参数进行讨论,但是情况较为复杂.

4. 结 论

文章讨论了两个相同或不同结构的混沌映射相乘形式,同时进行了详细地研究分析,剖析了其混沌动力学行为,从理论推导和数值模拟运算上解释了两个混沌映射相乘的系统其吸引子具有复杂的分形结构,它们仍然具有对初值的敏感性和混沌行为,而且两个简单映射相乘的新系统也是一个混沌系统,两个以上的混沌映射相乘时情况依然如此.相乘混沌映射的各种动力学行为是在简单映射的基础上演变而来的,在相乘映射中除了含有它特殊的动力学行为,还包含有简单映射的某些混沌性质,这说明了相乘混沌映射与原简单映射有不同的动力学特征.

混沌映射的相乘形式具有重要的理论意义.它不仅具有十分重要的应用价值,而且能够解决实际应用中两个或两个以上的相乘混沌映射所涉及的很多问题.对于复杂的混沌系统如 $f(x_n^m, \mu)$,还可通过因式分解的方法,将复杂的混沌系统分解成一个含有系统参数的映射和一个平方映射相乘的形式 $g(x_n^{m-2}, \mu) \cdot h(x_n^2, \mu)$ 进行分析,如果 $g(x_n^{m-2}, \mu)$ 仍然复杂还可继续分解,从而简化了研究过程.此方法不仅可应用于离散系统,在连续系统中仍然可以使用.

[1] Kennedy M P 1993 *IEEE Trans Circ Syst.* **40** 657
 [2] Liu Y, Barbosa L C, Rios Leite J R 1994 *Phys. Rev. Lett.* **A 193** 259
 [3] Matian M A, Guemez J 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 1145
 [4] Qu S X, He D R 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1307 [in Chinese] 屈世显、何大韧 1997 物理学报 **46** 1307]

[5] Gan J C, Xiao X C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1085 [in Chinese] 甘建超、肖先赐 2003 物理学报 **52** 1085]
 [6] Yu J J, Zhang M X, Xu H B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3701 [in Chinese] 于津江、张明轩、许海波 2004 物理学报 **53** 3701]
 [7] Yu S M, Lin Q H, Qiu S S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2084 [in Chinese] 禹思敏、林清华、丘水生 2004 物理学报 **53** 2084]

- [8] Wang H W , Ma G F 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3293(in Chinese) Chinese] 肖方红、阎桂英、韩宇航 2005 物理学报 **54** 550]
 [王宏伟、马广富 2004 物理学报 **53** 3293] [10] Peng Z W , Zhong T X 2000 *Chin. Phys.* **9** 244
 [9] Xiao F H , Yan G Y , Han Y H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 550(in [11] Li K P , Gao Z Y , Chen T L 2003 *Chin. Phys.* **12** 1213

Regularity of multiplication of chaotic maps^{*}

Yu Jin-Jiang^{1)2)3)†} Xu Hai-Bo³⁾

1) Department of Physics , Shijiazhuang Normal College , Shijiazhuang 050035 , China)

2) Institute of Physics , Shijiazhuang Normal College , Shijiazhuang 050035 , China)

3) Institute of Applied Physics and Computational Mathematics , Beijing 100088 , China)

(Received 29 April 2005 ; revised manuscript received 6 June 2005)

Abstract

The multiplication of chaotic maps is analyzed theoretically in this paper. The result of our computer simulation shows that the new chaotic map , combined by several chaotic maps , still has chaos attractors and is sensitive to the initial states. The concept of multiplication of chaotic maps is important in theory and applications.

Keywords : multiplication of chaotic maps , attractor , bifurcation series

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10147201 , 10247003).

[†] E-mail : yujinjiang 6060@ yahoo. com. cn