第 55 卷 第 9 期 2006 年 9 月
1000-3290/2006/55(09)/4638-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.9,September,2006

用激光-二能级原子系统实现一位通用量子逻辑门*

陈明伦[1)] 王顺金[1)2)†]

1)(四川大学物理系,成都 610064)

2)(兰州重离子加速器国家实验室核理论中心,兰州 730000)

(2006 年 1 月 4 日收到;2006 年 3 月 8 日收到修改稿)

使用代数动力学方法,对激光-二能级原子系统的含时薛定谔方程进行求解.该系统哈密顿量具有 $SU(2)$ 代数结构,得到了严格解.基于严格解,适当调节单模激光场的频率和振幅以及短脉冲激光与二能级原子的二阶虚光子作用强度,可实现一位通用量子逻辑门.

关键词:代数动力学,激光-二能级原子系统,一位量子逻辑门

PACC:4250

1. 引 言

量子计算与量子信息之所以有实际意义,是因为我们相信量子信息处理机器可以在物理上得以实现,否则,该领域就只能引起数学上的好奇心而已.然而,量子线路、量子算法和量子通信的物理实现被证明是极富挑战性的[1].

量子计算机最基本的逻辑部件就是受控的二量子位物理系统,使它们之间产生的相互作用能根据一个位的状态条件去对另一个位实现需要的幺正演化.已经提出的物理系统有离子阱方案[2—4]、腔量子电动力学方案[5,6]、核磁共振方案[7,8]以及量子点方案[9,10]等.目前在实验上已经实现的二量子位条件操作方案只有上述前三种.

激光场与二能级原子相互作用系统(Jaynes-Cummings(J-C)模型的时间有关推广)是典型的非自治量子系统,其哈密顿量具有 $SU(2)$ 代数结构.代数动力学方法[11]可以求解具有代数结构的非自治系统.因此,本文用代数动力学方法对该系统进行求解,并基于严格解适当调节单模激光场的频率和振幅,以及短脉冲激光与二能级原子的二阶虚光子作用强度,可实现一位通用量子逻辑门.

2. 系统哈密顿量与求解

一切二能级体系均可视为一个假想的 1/2 自旋体系(a fictitious spin one-half system),在激光场中运动的二能级原子(时间有关的 J-C 模型),其哈密顿量可用泡利矩阵表示为

$$\hat{H}(t)=\omega\hat{\sigma}_z+f\hat{\sigma}_++f^*\hat{\sigma}_-,\tag{1}$$

第一项描述原子的二能级,第二、三项描述激光场与原子的偶极作用导致的电子激发与退激发.其中能级升降算子 $\hat{\sigma}_+$,$\hat{\sigma}_-$ 按通常意义用泡利矩阵定义

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_+&=\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x+\mathrm{i}\hat{\sigma}_y),\\ \hat{\sigma}_-&=\frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x-\mathrm{i}\hat{\sigma}_y),\end{aligned}\tag{2}$$

激光场取为单模光场,即

$$f=A_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\quad(A_0\text{ 为实数}).\tag{3}$$

把(2),(3)式代入(1)式,得

$$\hat{H}(t)=A_0\cos\omega t\hat{\sigma}_x-A_0\sin\omega t\hat{\sigma}_x+\omega\hat{\sigma}_z,\tag{4}$$

令

* 国家自然科学基金(批准号:10375039,90503008)、教育部博士点基金和中国科学院兰州重离子加速器国家实验室核理论中心基金资助的课题.

† 通讯联系人.E-mail:sjwang@home.swjtu.edu.cn

$$E_x = A_0 \cos\omega t,\quad E_y = -A_0 \sin\omega t,\quad E_z = \omega, \tag{5}$$

则(4)式变为

$$\hat{H}(t) = E_x(t)\hat{\sigma}_x + E_y(t)\hat{\sigma}_y + E_z(t)\hat{\sigma}_z = E(t)\cdot\hat{\sigma}. \tag{6}$$

由于泡利矩阵 $\hat{\sigma}_j$ 满足 $SU(2)$ 代数关系

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k \quad i,j,k = x,y,z, \tag{7}$$

故时间有关的薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}(t)\psi \tag{8}$$

可用代数动力学方法[11]求解. 利用恒等关系

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu_i\hat{\sigma}_i}\hat{\sigma}_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu_i\hat{\sigma}_i} = \hat{\sigma}_j\cos\nu_i + \varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k\sin\nu_i, \tag{9}$$

可使 $\hat{H}(t)$ 经规范变换 $U_g = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu_y\hat{\sigma}_y}$ 后变为

$$\begin{aligned}\hat{\bar{H}}(t) &= U_g^{-1}\hat{H}(t)U_g - \mathrm{i}U_g^{-1}\frac{\partial}{\partial t}U_g \\ &= (E_x\sin\nu_y + E_y\cos\nu_y)\hat{\sigma}_x + (E_z + \dot{\nu}_y)\hat{\sigma}_y \\ &\quad + (E_x\cos\nu_y - E_y\sin\nu_y)\hat{\sigma}_z,\end{aligned} \tag{10}$$

当 ν_y 满足规范条件

$$\nu_y(t) = -\omega t \tag{11}$$

时,规范变换后的哈密顿量变得与时间无关,即为

$$\hat{\bar{H}} = A_0\hat{\sigma}_z. \tag{12}$$

令 $\Omega = A_0/\hbar$,则

$$\hat{\bar{H}} = \hbar\Omega\hat{\sigma}_z. \tag{13}$$

在规范参考系中,薛定谔方程变为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\bar{\psi}} = \hat{\bar{H}}\hat{\bar{\psi}}. \tag{14}$$

二能级原子系统的初始波函数一般可写为

$$\hat{\psi}(0) = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}. \tag{15}$$

在规范参考系中,随时间演化的波函数 $\hat{\bar{\psi}}(t)$ 可以由方程(14)以及初条件 $\hat{\bar{\psi}}(0) = \hat{\psi}(0)$ 确定,具体为

$$\hat{\bar{\psi}}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\alpha|1\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\beta|0\rangle. \tag{16}$$

回复到实验室参考系后,薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi} = \hat{H}(t)\hat{\psi}, \tag{17}$$

其解可以通过 $\hat{\bar{\psi}}(t)$ 的逆规范变换得到

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(t) &= U_g\hat{\bar{\psi}}(t) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu_y\hat{\sigma}_y}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\alpha|1\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\beta|0\rangle) \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t\hat{\sigma}_y}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\alpha|1\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\beta|0\rangle),\end{aligned} \tag{18}$$

这就是含时 J-C 系统的薛定谔方程的严格解,写成矩阵形式为

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(t) &= \begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\cos(\omega t) & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\sin(\omega t)\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\sin(\omega t) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\cos(\omega t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \\ &= M(t)\hat{\psi}(0).\end{aligned} \tag{19}$$

3. 整体相位的调整

时间演化矩阵 $M(t)$ 可用来实现一位量子逻辑门,但比一位通用量子逻辑门少了一个整体相位. 从形式上看,如果我们在哈密顿量(6)式中增加一个含时 $SU(2)$ Casimir 项或 $SU(2)$ 含时标量项,那么总体相位就可以在上述操作中实现. 物理上,这个含时 $SU(2)$ 标量项可以通过短脉冲激光与二能级原子的二阶虚光子作用[12—15]来实现

$$\begin{aligned}\hat{H}_1(t) &= \hat{H}(t) + \hat{H}_b(t) \\ &= E(t)\cdot\hat{\sigma} + (E_b\cdot\hat{\sigma})^2\delta(t - t_0).\end{aligned} \tag{20}$$

由于 $\hat{H}_b(t)$ 是 $\hat{H}(t)$ 的不变量,由群论可知 $[\hat{H}(t), \hat{H}_b(t)] = 0$,所以 $\hat{H}(t)$ 的本征态必是 $\hat{H}_b(t)$ 的本征态

$$\hat{H}_b(t)|0\rangle = 3E_b^2\delta(t - t_0)|0\rangle, \tag{21}$$

$$\hat{H}_b(t)|1\rangle = 3E_b^2\delta(t - t_0)|1\rangle. \tag{22}$$

因此,$\hat{H}_1(t)$ 的本征态比 $\hat{H}(t)$ 的本征态多出了一个整体相位 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3E_b^2}{\hbar}t}$. 这时,时间演化算子矩阵变为

$$\begin{aligned}M_1(t) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3E_b^2}{\hbar}t}M(t) \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3E_b^2}{\hbar}t}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\cos(\omega t) & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\sin(\omega t)\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\sin(\omega t) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\cos(\omega t)\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{23}$$

$M_1(t)$正是一位通用量子逻辑门.

4. 常用一位量子逻辑门的实现

适当调节单模激光场 $f = A_0 e^{i\omega t}$ 的频率 ω 和振幅 A_0 以及短脉冲激光与二能级原子的二阶虚光子作用$(E_b \cdot \hat{\sigma})^2 \delta(t - t_0)$的强度 E_0,就可实现常用的 X, Y, Z, S, T, H 门[1].

1) X 门的实现

当 $\omega t = \frac{\pi}{2}, \Omega t = \frac{A_0}{\hbar} t = \frac{\pi}{2}, \frac{3E_b^2}{\hbar} t = \frac{\pi}{2}$时,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

2) Y 门的实现

当 $\omega t = \frac{\pi}{2}, \Omega t = \frac{A_0}{\hbar} t = \pi, \frac{3E_b^2}{\hbar} t = \frac{\pi}{2}$时,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

3) Z 门的实现

当 $\omega t = \pi, \Omega t = \frac{A_0}{\hbar} t = \frac{\pi}{2}, \frac{3E_b^2}{\hbar} t = \frac{3\pi}{2}$时,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

4) S 门的实现

当 $\omega t = \pi, \Omega t = \frac{A_0}{\hbar} t = \frac{\pi}{4}, \frac{3E_b^2}{\hbar} t = \frac{5\pi}{4}$时,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}. \tag{27}$$

5) T 门的实现

当 $\omega t = 2\pi, \Omega t = \frac{A_0}{\hbar} t = \frac{\pi}{8}, \frac{3E_b^2}{\hbar} t = \frac{9\pi}{8}$时,

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

6) H 门的实现

当 $\omega t = \frac{3\pi}{4}, \Omega t = \frac{A_0}{\hbar} t = \frac{\pi}{2}, \frac{3E_b^2}{\hbar} t = \frac{\pi}{2}$时,

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

5. 结 论

激光-二能级原子系统可作为一位量子比特,利用单模激光场来控制系统随时间演化,并利用短脉冲激光与原子的二阶虚光子作用来控制总体相位,就可以得到一位通用量子逻辑门.适当调节单模激光场的振幅和频率以及短脉冲激光与原子的二阶虚光子作用强度,可以得到常用的 X, Y, Z, S, T, H 一位量子逻辑门.完全封闭的量子系统是不存在的[16—20],环境对一位量子逻辑门的影响是我们下一步要研究的问题.

[1] Nielson M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press)

[2] Sleane A 1997 *Appl*. *Phys*. B **64** 623

[3] Monroe C, Meekhof D M, King B E, Itano W M, Wineland D J 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **75** 4714

[4] Circa J I, Zoller P 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **74** 4091

[5] Turchette Q A, Hood C J, Lange W, Mabuchi H, Kimble H J 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **75** 4710

[6] Sleator T, Weinfurter H 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **74** 4087

[7] Braunstein S L, Caves C M, Jozsa R, Linden N, Popescu S, Schack R 1998 Quant-ph/9811018

[8] Gershenfeld N A, Chuang I L 1997 *Science* **275** 350

[9] Loss D, DiVincenzo D P 1997 *Phys*. *Rev*. A **57** 120

[10] Barenco A, Deutsch D, Ekert A 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **74** 4083

[11] Wang S J 1999 *Progress in Physics* **19** 331 (in Chinese) [王顺金 物理学进展 1999 **19** 331]

[12] Lehmberg R H 1970 *Phys*. *Rev*. A **2** 883

[13] Lehmberg R H 1970 *Phys*. *Rev*. A **2** 889

[14] Rudolph T G, Ficek Z, Dalton B J 1995 *Phys*. *Rev*. A **52** 636

[15] Cen L X, Wu N J, Yang F H, An J H 2000 *Phys*. *Rev*. A **65** 052318

[16] Steane A 1998 *Rep*. *Prog*. *Phys*. **61** 117

[17] Wang S J, An J H, Luo H G, Jia C L 2003 *J*. *Phys*. A **36** 829

[18] Cen L X, Zanardi P 2005 *Phys*. *Rev*. A **71** 060307(R)

[19] Su X F, Wang S J 2005 *Int*. *J*. *Phys*. B **19** 2481

[20] Xiang S H, Song K H 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 529 (in Chinese) [向少华、宋克慧 2006 物理学报 **55** 529]

Physical realization of single qubit gate using laser-two-level-atom system *

Chen Ming-Lun[1)] Wang Shun-Jin[1)2)†]

1)(*Department of Physics, Sichuan University, Chengdu* 610064, *China*)

2)(*Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Facilities, Lanzhou* 730000, *China*)

(Received 4 January 2006; revised manuscript received 8 March 2006)

Abstract

The time dependent Schrödinger Equation of a laser-two-level-atom system has been solved by algebraic dynamics method. The exact analytical solution is obtained, and the single qubit logical gate can be realized through adjusting the amplitude and frequency of the single mode laser field as well as strength of the short pulse laser field.

Keywords: algebra dynamics method, laser-two-level atom system, single-bit quantum logical gate

PACC: 4250

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10375039, 90503008), the Doctoral Fund of Ministry of Education of China and the Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Facilities of Lanzhou.

† E-mail: sjwang@home.swjtu.edu.cn