

动态断裂力学的无网格流形方法*

李树忱^{1)†} 程玉民²⁾ 李术才¹⁾

1) 山东大学土建与水利学院, 济南 250061)

2) 上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(2005 年 3 月 4 日收到, 2005 年 12 月 12 日收到修改稿)

运用无网格流形方法求解动态断裂力学问题. 该方法利用单位分解法和有限覆盖技术建立形函数, 形函数的建立不受域内不连续的影响, 可较好地求解裂纹问题. 对于局部化问题, 该方法的形函数构造较其他方法更为有效, 避免了其他方法在建立试函数时没有考虑不连续尖端的缺点. 由于采用有限覆盖技术建立试函数, 该方法克服了不连续对试函数的影响, 尤其当不连续变得复杂时, 更能显示该方法在处理不连续方面的优点. 在求解动态断裂力学问题时, 弹性动力学积分弱形式的推导采用加权残数法, 空间离散采用基于单位分解法的无网格流形方法, 时间离散主要采用 Newmark 法. 最后给出两个数值算例, 将计算结果与解析解对比, 说明该方法的正确性和可行性.

关键词: 有限覆盖, 无网格流形方法, 动态断裂力学, 动态应力强度因子

PACC: 4630N, 6220M, 4630, 8220W

1. 引 言

在过去几十年中, 有限元法已发展成为求解各种工程问题的通用方法. 然而, 有些问题利用有限元法求解会有一些困难, 这类问题包括: 问题的几何形状发生大的变化, 如大变形问题; 具有动边界的不连续问题, 如断裂力学中的裂纹扩展问题. 有限元法中遇到的这些困难在于单元和节点间关联条件 (connectivity) 的限制, 故不易处理此类不连续变形问题, 尤其是具有动边界裂纹扩展问题. 有限元法在求解这类问题时, 必须不断地进行网格重建, 导致分析的难度加大, 同时也降低了数值解的精度.

为了考虑裂纹尖端的奇异性, 先后发展了奇异单元法和强化单元法^[1-3]. 而对于任意裂纹的扩展, 有限元法依然是有一定的困难的, 因为大量的网格重构和场变量的不断映射是必须的. Swenson 和 Ingraffea 发展了一种局部网格重构技术, 在裂纹尖端局部进行网格重构^[4]. Belytschko 提出了扩展有限元法^[5-8], 该方法不需要网格重构, 但需要场变量不断地映射到新的网格上, 增加了映射误差. 而无网格方法在处理此类问题时, 不连续的扩展可以沿任意方向, 不受单元和节点间关联条件的限制, 从而克服了

有限元方法在处理此类问题时遇到的困难, 提高了数值解的精度, 减少了分析困难. 其中已有两种无网格方法用来求解断裂力学问题: 一是无网格 Galerkin 法^[9-13]; 二是无网格局部 petrov-Galerkin 法^[14]. 但是这两种方法在求解断裂力学问题时, 对于裂纹的处理方法均采用光线法^[15]来处理域内的不连续问题. 对于复杂裂纹而言, 这些方法就会失效, 导致试函数难以建立. 而基于单位分解法的无网格流形方法^[16], 在单位分解法的基础上借鉴了数值流形方法中有限覆盖技术^[17-19], 使数值流形方法摆脱了网格的限制, 使其具有无网格方法的特点, 同时又具有了流形方法的优点. 克服了不连续扩展问题受制于网格的缺点, 同时也避免了无网格方法在建立试函数时遇到的困难.

在动态断裂力学模拟方面, 裂纹问题的瞬态分析依然是断裂力学中的重要内容. 由于问题的复杂性, 裂纹动态应力强度因子的计算至今尚未完善^[20]. Chen^[21]最早用有限差分法 (FDM) 研究了内埋圆片裂纹、椭圆片裂纹和半椭圆表面裂纹. 因为有限差分法不能很好地描绘裂纹前沿的奇异应力场, 此法没有得到广泛应用. 而有限元法 (FEM) 能用裂纹前沿的奇性元模拟动态裂纹的奇异性, 但由于数据准备和计算时间花费大, 至今在二、三维裂纹的瞬态

* 国家自然科学基金 (批准号 50574053) 资助的课题.

† E-mail: shuchenli@sdu.edu.cn

分析方面很少有文献发表^[22]. 程玉民等应用相似边界元法和无限相似边界元法研究了瞬态荷载作用下的动态应力强度因子问题^[23]. 在断裂机理研究方面, 国内有许多学者进行了有益的研究, 也取得了许多丰富的成果^[24-26]. 本文试图探索一种新的无网格流形方法来求解动态断裂力学问题, 尤其是动态应力强度因子问题.

2. 控制方程

设问题的求解域为 Ω , 边界为 S , 则线弹性动力学的控制方程为

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad (3)$$

式中 ρ 是质量密度, $\ddot{u}_i = \partial^2 u_i / \partial t^2$ 是加速度, u_i 是位移, t 是时间, σ_{ij} 是应力矢量, ε_{ij} 是应变矢量, b_i 是体力, λ 和 μ 是 Lamé 常数.

初始条件

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4a)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad (4b)$$

边界条件

$$u_i = \bar{u}_i, \text{ 在边界 } \Gamma_u \text{ 上}, \quad (4c)$$

$$t_i \equiv \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i, \text{ 在边界 } \Gamma_t \text{ 上}; \quad (4d)$$

式中 \bar{u}_i , \bar{t}_i , \mathbf{u}_0 和 \mathbf{v}_0 分别表示位移, 面力, 初始位移和初始速度, n_j 为单位法向量, Γ_u 和 Γ_t 是整个求解域边界 Γ 的一部分, 分别是必要边界条件和自然边界条件.

3. 动态断裂力学的无网格流形方法

(1) 式的弱形式可以通过加权残数法获得

$$\int_{\Omega} w_i (\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i + b_i) d\Omega - \delta W_u(\mathbf{u}) = 0, \quad (5)$$

式中 w_i 是权函数, $\delta W_u(\mathbf{u})$ 是在无网格流形方法中考虑位移边界时增加的一项. 这将在边界条件处理中给出显式表达.

对 (5) 式进行分步积分, 则 (5) 式变为

$$\int_{\Omega} w_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} \rho w_i \ddot{u}_i d\Omega - \int_{\Omega} (w_{i,j} \sigma_{ij} - w_i b_i) d\Omega - \delta W_u(\mathbf{u}) = 0. \quad (6)$$

将自然边界条件式 (4d) 应用于 (6) 式中可得

$$\int_{\Gamma} w_i \bar{t}_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \rho w_i \ddot{u}_i d\Omega - \int_{\Omega} (w_{i,j} \sigma_{ij} - w_i b_i) d\Omega - \delta W_u(\mathbf{u}) = 0, \quad (7)$$

整理 (7) 式可得

$$\int_{\Omega} w_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma} \rho w_i \ddot{u}_i d\Omega + \delta W_u(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} w_i b_i d\Omega - \int_{\Gamma} w_i \bar{t}_i d\Gamma. \quad (8)$$

在无网格流形方法中^[16], 位移试函数的建立是通过单位分解得到的, 设求解域 Ω 的试函数为 $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t)$, 通过单位分解法定义为

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_c} \phi_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t), \quad (9)$$

式中 $\phi_i(\mathbf{x})$ 是和覆盖 Ω_i 相关的单位分解函数, $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t)$ 是节点 i 的未知系数, N_c 是影响域内点的个数. 单位分解函数 ϕ_i 有不同的建立方法, 目前主要利用 shepard 方法或移动最小二乘法来建立单位分解函数. 本文应用移动最小二乘法构造单位分解函数

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_i(\mathbf{x}), \quad (10)$$

式中

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{\mathbf{p}_1(\mathbf{x}), \mathbf{p}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{p}_m(\mathbf{x})\}, \quad (11)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_c} w_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i), \quad (12)$$

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{x}) = w_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i). \quad (13)$$

一般而言, 函数集 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 是实数域中的完备多项式的集合.

对于连续情况试函数为 (9) 式, 对于不连续情况试函数为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^M \phi_i^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_i^j(\mathbf{x}, t) \\ &= \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^M \phi_i(\mathbf{x}) \cdot \delta_j^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_i^j(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (14)$$

式中 M 是不连续面引起的节点数, 即不连续将一个子覆盖变成多个子覆盖的数目. 一个子覆盖变成多个子覆盖时, 在原节点处的单位分解函数乘以 $\delta_j^i(\mathbf{x})$ 就把该节点所形成的子覆盖变成多个子覆盖, 节点也相应增加.

将试函数 (9) 式或 (14) 式代入 (8) 式, 且令权函数等于形函数, 可得下列离散方程

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (15)$$

式中 M 称为质量矩阵, K 称为刚度矩阵, f 称为荷载矩阵. 则

$$M_{IJ} = \int_{\Omega} \rho \phi_I \phi_J d\Omega, \quad (16)$$

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T D B_J d\Omega, \quad (17)$$

$$f_I = \int_{\Gamma_t} \phi_I \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_I \mathbf{b} d\Omega, \quad (18)$$

式中

$$B_I = \begin{bmatrix} \phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \phi_{I,y} \\ \phi_{I,y} & \phi_{I,x} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ (平面应力)}. \quad (20)$$

4. 边界条件的处理

由于无网格流形方法采用了有限覆盖技术, 导致求解域的边界与节点形成的数学覆盖边界可能不一致, 且边界条件也不满足 Dirichlet 边界条件, 因此位移边界条件不能像有限元法那样直接满足. 因此本文采用罚函数来强制满足, 则

$$\delta W_u(\mathbf{u}) = \alpha \int_{s_u} \delta \mathbf{u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \lambda d\Gamma_u, \quad (21)$$

式中 α 为罚数. 则 (21) 式离散形式为

$$G_{IJ} = \alpha \int_{\Gamma_u} \phi_I^T S \phi_J d\Gamma_u, \quad (22)$$

$$q_I = \alpha \int_{\Gamma_u} \phi_I^T S \bar{\mathbf{u}} d\Gamma_u, \quad (23)$$

式中

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_x & 0 \\ 0 & \Gamma_y \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\Gamma_i = \begin{cases} 1, & \text{当 } \Gamma_u \text{ 上有位移约束,} \\ 0, & \text{当 } \Gamma_u \text{ 上无位移约束.} \end{cases} \quad (25)$$

由 (8) 式和 (21) 式及它们的离散形式可得最终求解方程

$$M \ddot{\mathbf{u}}(t) + (K + G) \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{q}. \quad (26)$$

令

$$\tilde{K} = K + G, \quad (27)$$

$$F = \mathbf{f}(t) + \mathbf{q}, \quad (28)$$

则方程 (26) 式可简写为

$$M \ddot{\mathbf{u}}(t) + \tilde{K} \mathbf{u}(t) = F(t). \quad (29)$$

5. 时间积分方案

本文对时间域的离散采用传统的 Newmark 平均加速度法, Newmark 法于 1959 年由线性加速度法延伸推导而得, 是一种相当广泛应用的直接积分法. 在时间 t_n 和 t_{n+1} 步内, 位移和速度的递归关系为

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \{ (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{u}}_n + 2\beta \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \}, \quad (30)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \{ (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \}, \quad (31)$$

式中 \mathbf{u}_n , $\dot{\mathbf{u}}_n$ 和 $\ddot{\mathbf{u}}_n$ 分别表示在 $t_n = n\Delta t$ 时刻的位移, 速度和加速度, Δt 表示相邻两个时间步的时间间隔. 其中所选用的参数 γ 和 β 与计算结果的稳定性及精度有关. γ 为控制数值阻尼参数, β 为控制时间步长中加速度的变化.

在 Newmark 法中, 考虑 (29) 式, 并将 (30) 式和 (31) 式代入 (29) 式可得

$$\bar{K}_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} = \bar{F}_{n+1}, \quad (32)$$

式中

$$\bar{K}_{n+1} = \tilde{K}_{n+1} + \alpha_1 M_{n+1}, \quad (33)$$

$$\bar{F}_{n+1} = F_{n+1} + M_{n+1} (\alpha_1 \mathbf{u}_n + \alpha_2 \dot{\mathbf{u}}_n + \alpha_3 \ddot{\mathbf{u}}_n), \quad (34)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\beta \Delta t}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2\beta} - 1. \quad (35)$$

当位移 \mathbf{u}_{n+1} 被计算出来后, $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$ 和 $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$ 可通过下式获得

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \alpha_1 (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \alpha_2 \dot{\mathbf{u}}_n - \alpha_3 \ddot{\mathbf{u}}_n, \quad (36)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}. \quad (37)$$

6. 数值算例

6.1. 二维矩形平面受固定轴向荷载作用时的动力学模拟

一个宽 2m, 长 4m 的二维矩形平面, 左端固定, 右端受到固定轴向均布载荷的作用, 在 $t = 0^+$ 时作用一突加荷载 $P(t) = P_0 H(t)$, 随后荷载值保持不变, 荷载值为 $P_0 = 200\text{Pa}$, 如图 1 所示. 假设杨氏模量为 $E = 80\text{kPa}$, 泊松比 $\nu = 0.0$, 质量密度 $\rho = 2450\text{kg/m}^3$. 本算例用无网格流形方法做空间域离散, 再配合 Newmark- β 时间积分法进行动力学模拟, 此处所要模拟的有自由端 A 点的位移随时间的变

化关系,中央 B 点位移和应力随时间的变化及固定端 C 点的应力变化,并与解析解比较.

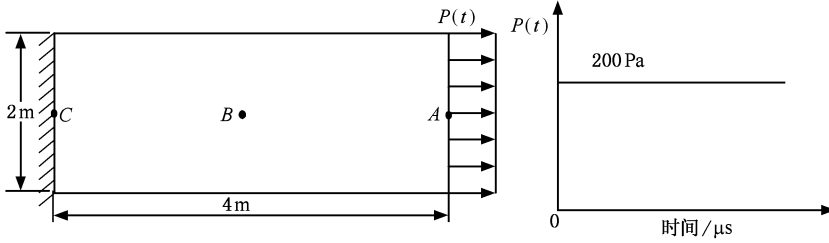


图 1 二维矩形平面受均布轴向固定荷载作用示意图

本算例采用 861 个规则节点分布.分析中采用线性基函数和高斯权函数,动力模拟方面采用 Newmark- β 方法中的向后差分法($\gamma = 3/2, \beta = 2$).时间步长为 $0.0001\mu s$.

图 2 和图 3 分别为 A 点和 B 点的位移随时间变化关系,图 4 和图 5 分别为 B 点和 C 点的应力随时间变化关系,并将其与解析解比较^[27].图中显示 Newmark- β 法不具有高频消散的能力,所以应力变化关系会有剧烈的上下振荡现象.

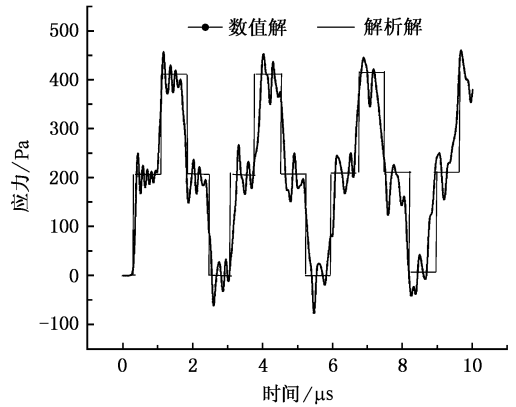


图 4 B 点应力随时间变化关系

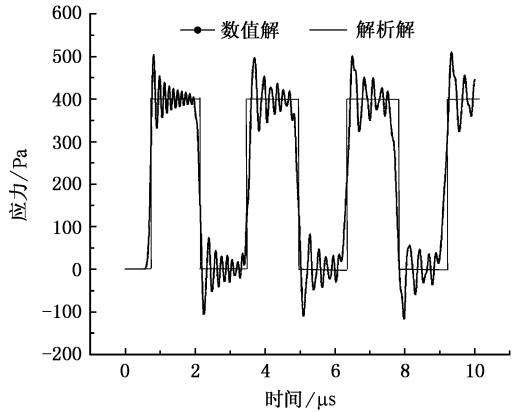


图 5 C 点应力随时间变化关系

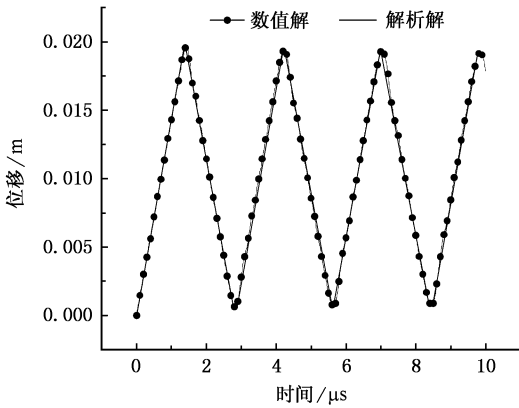


图 2 A 点位移随时间变化图

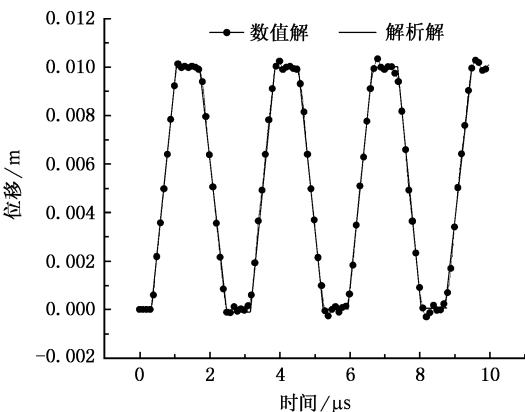


图 3 B 点位移随时间变化图

6.2 含中心裂纹平板单向受拉

如图 6 所示含中心裂纹平板单向受拉^[20],几何及物理参数为 $\bar{t} = 0.4H(t)GPa, L = 52mm, D = 20mm, a = 12mm, E = 76GPa, \rho = 2450kg/m^3$ 和 $\mu = 0.286$.在计算中假设该问题为平面应变问题.模型共用 5200 节点离散,基函数取线性基,如图 7 所示.时间设置为 $\Delta t = 4 \times 10^{-2}\mu s$,结束时间为 $t = 12\mu s$.

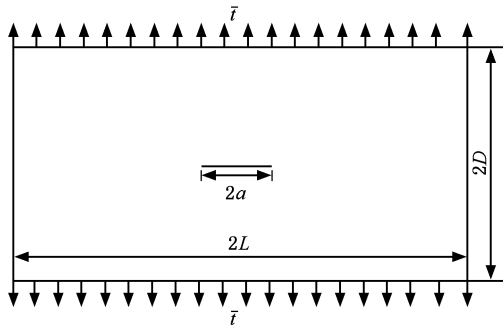


图 6 几何模型

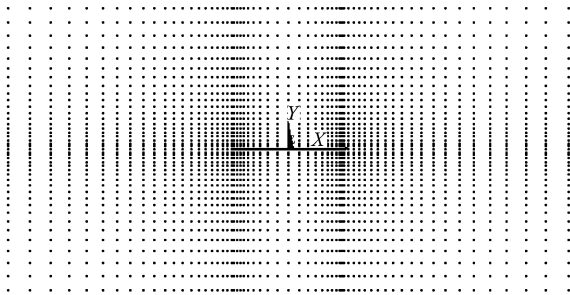


图 7 配点图

计算所得的正则应力强度因子 $K_I/\bar{t} \sqrt{a\pi}$ 随时间变化如图 8 所示,从图中可以看出,正则应力强度因子一直到 $t = 2.5\mu\text{s}$ 时,保持为零.当 $t > 2.5\mu\text{s}$ 时,应力强度因子开始大于零,直到 $t = 11\mu\text{s}$ 应力强度因子达到最大值,随后应力强度因子开始下降.同时,图 9 和图 10 分别给出了裂纹尖端不同位置 x 和 y 方向应力随时间变化图;图 11 和图 12 分别给出了在 $t = 6\mu\text{s}$ 时, x 和 y 方向应力随裂纹尖端距离的变化关系.从计算结果可以看出,所得应力强度因子

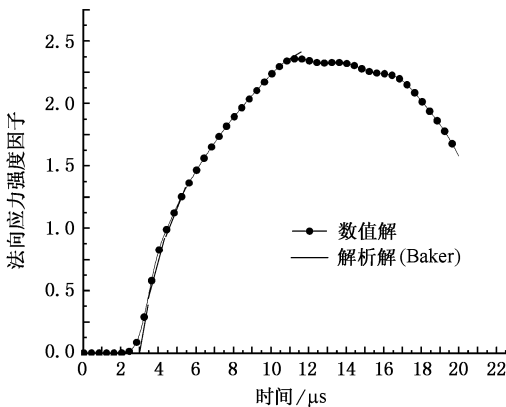


图 8 正则化应力强度因子随时间变化关系

和解析解符合很好;另外,从裂纹尖端场的变化关系来看,说明了本文方法的正确性与可行性.

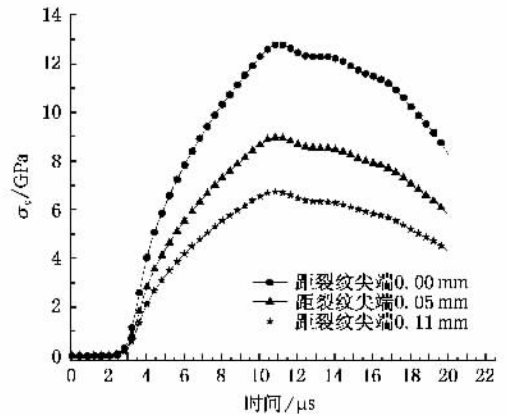


图 9 裂纹尖端不同位置 x 方向应力随时间变化图

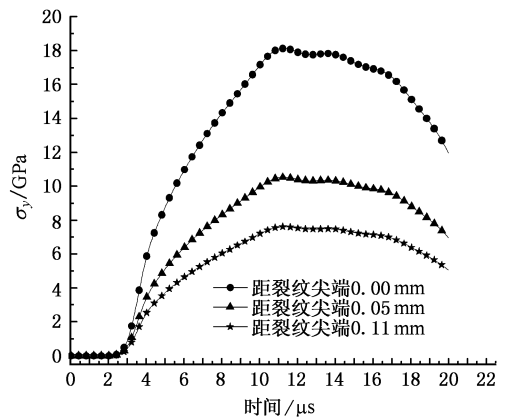


图 10 裂纹尖端不同位置 y 方向应力随时间变化图

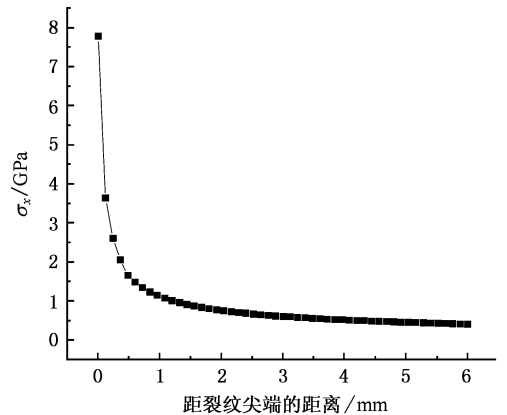


图 11 在 $t = 6\mu\text{s}$ 时, x 方向应力随裂纹尖端距离的变化关系

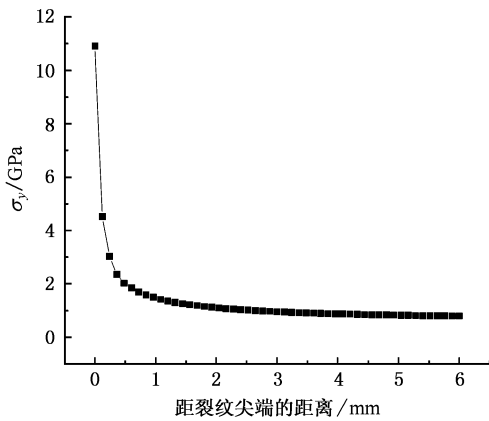


图 12 在 $t = 6\mu\text{s}$ 时, y 方向应力随裂纹尖端距离的变化关系

7. 结 论

本文将无网格流形方法进一步推广来求解动态

断裂力学问题. 对于域内的不连续, 由于该方法通过流形中的有限覆盖技术, 能够同时处理域内连续与非连续问题, 从而克服了长裂纹在有限元或无网格方法中的映射过程. 进而, 提高了数值解的精度, 同时也方便了试函数建立过程.

由于在形函数构造过程中采用了单位分解法, 导致形函数也具有单位分解的特性. 对于局部化问题, 形函数的构造较其他方法更为有效, 从而避免了其他方法在建立试函数时, 对不连续尖端缺乏考虑的缺点, 提高了裂隙尖端解的精度.

通过两个算例的分析来看, 计算结果与解析结果符合较好, 说明该方法的正确性. 也说明该方法可用于求解动态断裂力学和静力学问题, 及裂纹扩展问题.

- [1] Benzley S E 1974 *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **8** 537
- [2] Atluri S N, Kobayashi A S, Nakagaki M 1975 *International Journal of Fracture* **11** 257
- [3] Nishioka T, Atluri S N 1984 *AIAA Journal* **22** 409
- [4] Swenson D V, Ingraffea A R 1988 *Computational Mechanics*. **3** 381
- [5] Belytschko T, Black T 1999 *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **45** 601
- [6] Christophe D, Dolbow M N J 2000 *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **48** 1741
- [7] Fleming M, Chu Y A, Moran B, Belytschko T 1997 *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **40** 1483
- [8] Moes N, Dolbow J, Belytschko T. 1999 *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **46** 131
- [9] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L 1994 *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **37** 229
- [10] Belytschko T, Gu L, Lu Y Y 1994 *Modeling Simul mater. Sci. Eng.* **2** 519
- [11] Lu YY, Belytschko T, Tabbara M 1995 *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **126** 131
- [12] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L 1995 *International Journal of Solids and Structures*. **32** 2547
- [13] Belytschko T, Tabbara M 1996 *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **39** 923
- [14] Ching H K, Batra R C 2001 *Computer Modeling in Engineering & Science*. **2** 273
- [15] Belytschko T, Fleming M. 1999 *Computer and Structures*. **71** 173
- [16] Li S C, Cheng Y M 2004 *Acta Mechanica Sinica*. **4** 496 (in Chinese) [李树忱、程玉民 2004 力学学报 **4** 496]
- [17] Babuska I, Melenk J M 1997 *Int. J. Numer. Meth. Engng.* **40** 727
- [18] Shi G H 1992 *Proceedings of the 33rd US Rock Mechanics Symposium* 639
- [19] Shi Genhua. 1997 *Numerical manifold method and discontinuous deformation analysis* (Beijing :Tsinghua University Press). P12 (in Chinese) [石根华著 1997 数值流形方法与非连续变形分析 (北京 :清华大学出版社). 第 12 页]
- [20] Zhong M, Zhang Y Y 2001 *Applied mathematics and mechanics* **22** 1211 (in Chinese) [钟 明、张永元 2001 应用数学和力学 **22** 1211]
- [21] Chen Y M, Wilkins M L 1977 *Mechanics of Fracture*. (Leyden. Noordhoff) p436
- [22] Nishioka T 1995 *Dynamic Fracture Mechanics* (Southampton : Computational Mechanics Publications) p345
- [23] Cheng Y M, Peng M J 2000 *Journal of Chongqing Jianzhu University* **22** 1 (in Chinese) [程玉民、彭妙娟 2000 重庆建筑大学学报 **22** 1]
- [24] Xing X S 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 107 (in Chinese) [邢修三 1999 物理学报 **48** 107]
- [25] Zhu L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 571 (in Chinese) [朱 亮 2004 物理学报 **53** 571]
- [26] Tan Y L, Ma Z T, Zhou H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 704 (in Chinese) [谭亚亮、马志涛、周 辉 2001 物理学报 **50** 704]
- [27] Anderson T L 1991 *Fracture Mechanics : Fundamentals and Applications* (First ed.) (New York : CRC Press) p156

Meshless manifold method for dynamic fracture mechanics^{*}

Li Shu-Chen^{1)†} Cheng Yu-Min²⁾ Li Shu-Cai¹⁾

¹⁾ School of Civil & Hydraulic Engineering, Shandong University, Ji'nan 250061, China)

²⁾ Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China)

(Received 4 March 2005; revised manuscript received 12 December 2005)

Abstract

In the paper, the meshless manifold method (MMM) is utilized to analyze transient deformations in dynamic fracture. The MMM is based on the partition of unity method and the finite coverage approximation which provides a unified framework for solving problems involving both continuums and dis-continuums. The method can treat crack problem easily because the shape function is not affected by the discontinuity in the domain. For localization problems at the tip of the discontinuity, these shape functions are more effective than those used in other numerical methods. The method avoids the disadvantages of other meshless methods in which the tip of a discontinuous crack is not considered. In meshless manifold method, the finite coverage approximation is used to construct the shape functions that overcome influences of the interior discontinuities in the displacement. Consequently, the meshless manifold method has some advantages in solving the discontinuity problems when the discontinuities are complex. When the dynamic fracture mechanics is analyzed by the MMM, the weak formulation of the partial differential equation for elastic dynamics is derived from the method of weighted residuals (MWR). The discrete space of the domain is used for the MMM. The Newmark family of methods is used for the time integration scheme. At last, the validity and accuracy of the MMM are illustrated by two numerical examples of which the numerical results agree with the analytical solution.

Keywords : finite coverage technology, meshless manifold method, dynamic fracture mechanics, dynamic stress intensity factors

PACC : 4630N, 6220M, 4630, 8220W

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.50574053).

[†] E-mail : shuchenli@sdu.edu.cn