

量子史瓦茨黑洞和暗物质*

刘 辽 裴寿镛

(北京师范大学物理系, 北京 100875)

(2005 年 12 月 13 日收到 2006 年 2 月 27 日收到修改稿)

引入 Sommerfeld 作用量量子化条件来处理 Schwarzschild 黑洞的量子化问题. 发现此类量子化黑洞存在一个质量为 $m_c = \frac{1}{2\sqrt{3}}m_p$ 的基态. 处于基态的量子 Schwarzschild 黑洞不再存在 Hawking 蒸发和任何其他辐射, 可名之曰暗星. 它的存在不仅可以解决信息丢失的疑难, 而且极可能是构成暗物质的主要候选者.

关键词: 量子史瓦茨黑洞, 暗物质

PACC: 9760L

引力量子化是当前亟待解决的一个基本问题. 然而, 迄今为止, 还缺少一个成熟的量子引力理论, 看来目前在量子引力的研究方面我们可能还处于早期量子力学的 Bohr-Sommerfeld 时代. 寻找一条半经典的途径来处理引力场的量子化可能是一条通向未来引力量子化的一个初级的有意义的尝试.

众所周知, 对于经典力学中的单周期运动可定义一个作用量变量 $I_v = \oint p dq$. 它是单周期运动系统, 在一个周期内于相空间内所扫过的面积^[1]. 对于单周期运动, 系统的作用量 I , 作用量变量 I_v 和哈密顿量 H 之间存在关系

$$I = I_v - \oint H dt^{[2]}. \quad (1)$$

在不考虑 Gibbons-Hawking 表面项的情况下 H 应满足所谓哈密顿约束, 即

$$H(h_{ij}, \pi_{ij}) = 0, \quad (2)$$

式中 h_{ij}, π_{ij} 分别是引力系统在 $(3+1)$ 分解中类空超曲面的诱导度规和相应的正则共轲动量.

在考虑 Gibbons-Hawking 表面项的情况下(例如, 一切渐近平直的黑洞), 上式的 H 应代之以,

$$H' = H + \alpha^{[3]}, \quad (3)$$

其中

$$\alpha = \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_s \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^j} \right) ds^i, \quad (4)$$

故(1)式应改为

$$I = I_v - \oint H' dt. \quad (5)$$

重要的是, 在渐近平直的情况下, 任一经典爱因斯坦引力系统的哈密顿量 H' 就是系统的 ADM 质量 m , 因此对于任一单周期且渐近平直的引力系统而言应有

$$I = I_v - \oint H' dt = \oint p dq - m \oint dt = \oint p dq - mT, \quad (6)$$

式中 T 即单周期系统的周期.

1916 年 Sommerfeld 在原子物理中引进了所谓 Sommerfeld 作用量量子化条件

$$\oint p dq = nh^{[4]} \quad (h \text{ 为普朗克常数}), \quad (7)$$

成功地解决了原子物理中的线状光谱问题, 以后 Landau 与 Lifshitz 采用准经典方法重新推导了 Sommerfeld 作用变量量子化条件, 得出

$$\oint p dq = 2\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right)^{[5]}. \quad (8)$$

(6)–(8) 式并不显示地(explicitly)与背景时空度规有关. 因而我们把它们移植到广义相对论中处理周期引力系统量子化问题. 首先把 Sommerfeld 作用量量子化的思想应用于史瓦茨黑洞^[6]. 在史瓦茨黑洞(SBH)理论中, 一个具有最大解析区和最高完备性的坐标覆盖是所谓欧几里得 Kruskal 解, 它的解析区是 $r > 2m$. 在此解析区内, 史瓦茨解为^[7]

$$ds^2 = \frac{32}{r} m^3 \exp \left\{ -\frac{r}{2m} \right\} (dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega_2^2, \quad (r > 2m), \quad (9)$$

其中

* 国家自然科学基金(批准号: 10475013 和 10373003)资助的课题.

$$iT = \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{r}{2m}\right\} \sin\left(\frac{\tau}{4m}\right), \quad (10)$$

$$R = \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{r}{2m}\right\} \cos\left(\frac{\tau}{4m}\right). \quad (11)$$

显然可见,此时 T, R 是 $\tau = it$ 的周期函数,其周期为

$$T = 8\pi m. \quad (12)$$

而(9)式所描述的史瓦茨度规是一个周期为 $T = 8\pi m$ 的单周期引力系统.大家知道,欧几里得 Kruskal 坐标的这一重要性质对揭示 SBH 的热力学性质有重要意义.在本文将看到这一重要性质对揭示 SBH 的量子性质也起着关键性的作用.

由经典黑洞理论知道 SBH 的视界面积 A 和它的作用量 I 分别为

$$A = 16\pi m^2 \quad (G = C = 1) \quad (13)$$

和

$$I = 4\pi m^2. \quad (14)$$

应注意,对于在 $r > m$ 内的真空 SBH,作用量 I 中的体积分贡献为零,不为零的贡献仅来自 Gibbons-Hawking 表面项 $4\pi m^2$,由(8)(12)和(14)式马上可得出

$$m^2 = \frac{1}{6}\left(n + \frac{1}{2}\right) m_p^2, \quad (15)$$

其中 $m_p = (G^{-1} \hbar c)^{1/2}$ 是普朗克质量,

$$A = \frac{8\pi}{3}\left(n + \frac{1}{2}\right) l_p^2, \quad (16)$$

其中 $l_p^2 = G\hbar c^{-3}$ 是普朗克面积.(15)式给出 SBH 的质量量子化条件

$$m = \sqrt{\frac{1}{6}\left(n + \frac{1}{2}\right)} m_p, \quad (17)$$

而(16)式是 SBH 的视界面积量子化条件.

不难看出量子 SBH 的 Hawking 辐射是一个不连续的分立过程,过程中的辐射量子的质量或能量 δm 为

$$\delta m = \frac{1}{12} \frac{m_p^2}{m_T}, \quad (18)$$

式中 m_T 是温度为 T 时 SBH 的量子化的质量.

由(16)式可以得到 SBH 的 Hawking 辐射过程中,视界面积量子为

$$\delta A = \frac{8\pi}{3} l_p^2. \quad (19)$$

此值与 Dreyer 等人经由圈量子化所得的面积量子 $4\ln 3 \cdot l_p^2$ 不同^[8].本文的面积量子化仅适用于 SBH 的视界.

有意义的是(17)式中 $n = 0$ 应对应着量子 SBH 的基态质量 m_G ,

$$m_G = \frac{1}{2\sqrt{3}} m_p, \quad (20)$$

量子 SBH 在演化中存在一个基态质量表示量子 SBH 有一个最小质量,任何量子过程不可能使得一个量子 SBH 的质量低于其基态质量 m_G .这意味着一个进入晚期强烈喷射的 SBH,量子力学的能量量子化规则将迫使它在到达基态时停止辐射,结果是任何蒸发的量子黑洞最后均有一个质量为 $m_G = \frac{1}{2\sqrt{3}} m_p$ 的遗迹(remnant, relic),Hawking 蒸发不会把量子 SBH 化为乌有.

量子 SBH 的遗迹的存在马上导致两个重要结论:

其一,在黑洞蒸发中信息丢失疑难^[9]可能不再存在.理由很简单,在黑洞蒸发的末期,一个入射的真空纯态再也不会变为一个出射的混合态,因而演化中的么正对称性始终保持,信息始终守恒,并未丢失.

其二,由于量子 SBH 的遗迹不再包含有 Hawking 量子辐射在内的任何其他经典辐射,其存在只能通过引力作用来探测,我们可把此类遗迹叫作暗物质或“暗星”,看来天文观测中通过星系的转动曲线探测出的暗物质极有可能就是我们在这里所谓的量子黑洞的遗迹或暗星.

Zeldovich, Novikov^[10]与 Carr, Hawking^[11]等曾指出,极早期宇宙物质密度的涨落将产生大量的原初小黑洞, Hawking 等人认为凡寿命小于宇宙年龄的原初小黑洞都已完全蒸发掉.我们的工作表明,凡寿命小于当前宇宙年龄的原初小黑洞并未消失而是作为原初小黑洞的遗迹变为暗星或暗物质保存了下来,可认为天文观测通过星系的转动曲线所发现的暗星与暗物质既支持了我们提出的量子黑洞理论,也支持了 Zeldovich, Novikov 与 Carr, Hawking 等人的原初小黑洞理论.

- [1] Wu T Y 1983 *Classical Kinetics* (Beijing :Science Press) pp 265 , 279 (in Chinese) [吴大猷 1983 古典动力学 (北京 : 科学出版社) 第 265 279 页]
- [2] Landau L D , Lifshitz E M 1976 *Mechanics* 3rd ed (Oxford , New York : Pergamon) pp2 , 138 , 157
- [3] Wald R M 1984 *General Relativity* (Chicago and London : the University of Chicago Press) p 469
- [4] Sommerfeld A 1916 *Ann . Physik .* **51** 1
- [5] Landau L D , Lifshitz E M 1977 *Quantum Mechanics* (Non-Relativity Theory)(Oxford : Pergamon Press) pp 170—174
- [6] Liu L , Pei S Y 2004 *Chin . Phys . Lett .* **21** 1887
- [7] Wald R M 1984 *General Relativity* (Chicago and London : the University of Chicago Press) p153
- [8] Dreyer O arXiv gr-qc/0211076
- [9] Hawking S W 1976 *Phys . Rev . D* **14** 2460
- [10] Zeldovich Ya B , Novikov I D 1966 *Sov . Astron . A . J .* **10** 602
- [11] Carr B J , Hawking S W 1974 *MNRAS* **168** 399

Quantum Schwarzschild black hole and dark matter ^{*}

Liu Liao Pei Shou-Yong

(Department of Physics , Beijing Normal University , Beijing 100875 , China)

(Received 13 December 2005 ; revised manuscript received 27 February 2006)

Abstract

If the situation of quantum gravity nowadays is nearly the same as that of quantum mechanics in its early time of Bohr and Sommerfeld , then a first-step study of the quantum gravity under Sommerfeld 's quantum condition of action might be helpful . We present the spectra of quantum Schwarzschild black hole in non-relativistic quantum mechanics . It is found that the quantum of area is $\frac{8\pi}{3} l_p^2$, the quantum of entropy is $\frac{2\pi}{3} k_B$, and the Hawking evaporation will cease when the black hole reaches the ground state $m = \frac{1}{2\sqrt{3}} m_p$. A very natural conjecture is that the constituents of dark matter may come from the remnant (relics) of primordial black hole with life time smaller than that of the universe .

Keywords : quantum schwarzschild black hole , dark matter

PACC : 9760L

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10475013 and 10373003).