第 55 卷 第 11 期 2006 年 11 月
1000-3290/2006/55(11)/5579-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.55,No.11,November,2006

一类带限定变换的二阶耦合线性微分方程组的解析解

杨鹏飞
(陕西广播电视大学榆林市分校,榆林 719000)
(2005 年 11 月 12 日收到;2006 年 3 月 23 日收到修改稿)

用函数和方程变换将二阶耦合线性微分方程组转化为一阶非线性类椭圆方程,并给出了一次和二次限定变换下方程组的 Jacobi 椭圆函数解析解,所得结果修正了文献中超导特例的近似解,进一步肯定了超导边界层电场的存在性.

关键词:微分方程,Jacobi 椭圆函数,解析解,超导
PACC:0290,0340K,7420D

1. 引　　言

物理问题的数学构建方式是多种多样的,对它们解的解决方法同样是丰富多彩的.以场、源相互作用为特点的物理问题,往往会转化为带有限定变换的线性微分方程组的初值或边值问题.这类问题由于场与荷相互作用的动态性,要得到场和源在体系达到稳态时的分布,仅靠方程组自身的量的关系不足以确定问题的解,必须同时考虑问题的边值条件,甚而限定性约束,如基本的守恒量、不变量等.对这一类问题的处理既可以采用直接解它们的初值或边值问题,如导体的静电平衡问题;同样可以选择其他途径如借助非线性微分方程的多样解法寻求答案.

本文是从后一种思路出发,探讨了由文献[1]提出的,对 London 超导方程组的相对论修正所引申出的,一类较一般的一维数学物理问题;应用文献[2,3]中的定理和方法,把之转化为低一阶的非线性常微分方程,并给出了一次、二次变换下的 Jacobi 椭圆函数解析解.在其中大量应用了王、郭[4]、刘等[5—9]中有关 Jacobi 椭圆函数的处理方法和结果,以及文献[10]的一些结论和技巧.所得结果修正了文献[1]的结论;与传统的认为超导体是零电场的观点不同,进一步肯定了超导边界层中电场的存在性.

2. 问题的建立

杨[1]提出的对 London 超导方程的相对论修正,得到了一组带有能量-动量守恒限定的超导场方程组

$$\Box A_\mu = \frac{\delta_s}{\lambda^2}A_\mu + \frac{1}{\lambda^2}\left(0, -\frac{\mathrm{i}m_0c^2}{ce}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}A_\mu = 0, \tag{1}$$

$$eA_\mu eA_\mu = -m_0^2c^2,$$

A_μ 为四维势矢量,$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{\mu_0e^2n_{s0}}{m_0}$,$\lambda$ 为 London 穿透深度,δ_s 为超导电子空间分布不均匀系数,c 为光速,e,m_0 分别为电子电荷和静止质量.限定变换 $eA_\mu eA_\mu=-m_0^2c^2$ 的存在,使得问题(1)中 δ_s 是确定的而不是任意给定的.把之应用于典型的弱磁场半无限大超导体模型,只考察在绝对零度下场的稳态分布,选择坐标系 z 轴方向与外磁场方向一致,x 轴垂直于超导体表面指向超导体内,坐标原点在表面上,考虑对称性,可得简化的一维场方程组

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}A_y = \frac{\delta_s}{\lambda^2}A_y,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi = \frac{\delta_s}{\lambda^2}\varphi - \frac{1}{\lambda^2}\frac{m_0c^2}{e},$$

$$(e\varphi)^2 = (eA_y)^2c^2 + m_0^2c^4, \tag{2}$$

令

$$v = \frac{eA_y}{m_0c}, u = \frac{e\varphi}{m_0c^2}, \frac{x}{\lambda}\Rightarrow x,$$

$$\delta_s \Rightarrow -I.$$

据此,经无量纲约化,可引申出一类较一般的一维数学物理问题

$$v'' + I(x)v = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&u'' + I(x)u = g(x),\\
&\phi(u,v) = 0,\\
&u(x_0) = a, u(x_1) = b,\\
&v'(x_1) = 0,\\
&u'(x_1) = 0,\\
&x \in [x_0, x_1],
\end{aligned} \tag{3}
$$

“$'$”表示$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$,

其中 $\phi(u,v)=0$ 是作为限定性条件,与 $g(x)$,$I(x)$ 可视具体情况,三者须知其二.虽然在 $g(x)$已知情况下,可消去 $I(x)$,但保持问题(3)形式上方程的线性和限定变换的可非线性,物理意义更清晰.因而 $I(x)$可看成是在 $\phi(u,v)$,$g(x)$限定下的跑动函数.

而一般的物理问题这样的条件总是满足的:

$$\forall x \in D, \tag{4}$$

D 是实数 R 上的闭区间$[x_0, x_1]$,

$$u, v, g, I, \phi \in C^2(R),$$

则总存在一个 I 使方程组有解 $v = v(x)$, $u = u(x)$. 下边的一系列函数和方程的变换,都是以该条件为出发点,其转化步骤即是问题(3)的一个证明.

3. 线性微分方程组向非线性微分方程的转化

对问题(3),在条件(4)下,可经下边一系列函数和方程的变换,把该带限定变换的二阶耦合线性常微分方程组转化为一阶非线性类椭圆方程,其转化步骤可看成是对问题(3)的一个证明.下文中 ϕ_u, ϕ_v, ϕ_{vu} 等符号表示对应函数的偏导.

3.1. 问题(3)的等价形式

对变换

$$\phi(u,v) = 0, \tag{5}$$

有

$$\mathrm{d}\phi(u,v) = \phi_u \mathrm{d}u + \phi_v \mathrm{d}v = 0, \tag{6}$$

$$\phi_u u' + \phi_v v' = 0, \tag{7}$$

$$\phi_{vu} = \phi_{uv}, \tag{8}$$

$$\phi_u u'' + \phi_v v'' + \left[\phi_{vv} - 2\phi_{vu}\left(\frac{\phi_v}{\phi_u}\right) + \phi_{uu}\left(\frac{\phi_v}{\phi_u}\right)^2\right] v'^2 = 0. \tag{9}$$

考察方程

$$\left(u + \frac{\phi_v}{\phi_u}v\right)v'' + \frac{1}{\phi_u}\left[\phi_{vv} - 2\phi_{vu}\left(\frac{\phi_v}{\phi_u}\right) + \phi_{uu}\left(\frac{\phi_v}{\phi_u}\right)^2\right] vv'^2 + gv = 0, \tag{10}$$

把(9)式代入(10)式,经整理与问题(3)比较,可知在一般的物理问题的条件下,方程(10)式和问题(3)是等价的,据此问题(3)有了一个包含限定变换在内的统一的表示(10)式.

3.2. 问题(3)解的一般形式

对(10)式当

$$\left(u + \frac{\phi_v}{\phi_u}v\right) = 0, \tag{11}$$

由(5)式得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{u}{v}, \tag{12}$$

$$\phi(u,v) = u - cv = 0, c = \mathrm{const}, \tag{13}$$

$$\phi_u = 1, \phi_v = -c, \phi_{uu} = \phi_{vv} = \phi_{vu} = 0.$$

因 v 为解函数,由(10)式,则

$$g = 0. \tag{14}$$

所以齐次线性变换(13)式是问题(3)的平凡变换,它对 $g(x)$的限制,使问题退化为齐次微分方程问题.

对(10)式当

$$u + \frac{\phi_v}{\phi_u}v \neq 0, \phi_u \neq 0, \tag{15}$$

由隐函数存在定理[2],可知存在一个函数 f,使

$$u = f(v). \tag{16}$$

由(6)式,则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v} = -\frac{\phi_v}{\phi_u}. \tag{17}$$

由(8)及(17)式,可得

$$\phi_{vu} = -\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}\phi_{uu}, \tag{18}$$

$$\phi_{vv} = -\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}v^2}\phi_u + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}\right)^2\phi_{uu}. \tag{19}$$

由(16)—(19)式及方程(10)式,整理可得

$$v'' - \frac{v\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}v^2}}{f - v\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}}v'^2 + \frac{gv}{f - v\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}} = 0. \tag{20}$$

令

$$v' = p, v'' = p' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v}, \tag{21}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}v} - \frac{2v\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}v^2}}{f - v\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}}p^2 + \frac{2vg}{f - v\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}} = 0. \tag{22}$$

至此问题(3)已转换成一个一阶线性常微分方程解的问题.由所讨论条件知,该方程(22)的解总是存在的[3],即在所讨论的物理条件下,问题(3)的边值问题有解,即存在连续函数 I,$g(x)$,在 $\phi(u,v)=0$ 为给定变换情况下,问题(3)有 $v=v(x)$,$u=u(x)$的一组解.

从(22)式得[3]

$$v'^2=\exp\left[\int\frac{2v\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}v^2}}{f-v\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}}\mathrm{d}v\right]\left[c_0-\int\left(\frac{2vg}{f-v\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}}\times\exp\left[-\int\frac{2v\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}v^2}}{f-v\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}}\mathrm{d}v\right]\right)\mathrm{d}v\right],\tag{23}$$

c_0 为积分常数,进一步整理得

$$v'^2=\left(f-v\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}\right)^{-2}\left[c_0-2\int gv\left(f-v\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}\right)\mathrm{d}v\right],\tag{24}$$

因此问题(3)被进一步转化为一阶非线性类椭圆方程,且只当 ϕ 或f,g 为特定的函数或值时,才能化为常规的椭圆方程来求解[4-9].对 f 是三次及三次以上函数形式,一般成为超椭圆方程,难以获得初等或椭圆函数的解析解.但对变换为一次和二次函数形式,控制函数为常数,可有普遍的解析解法.下边给出论证.

4. 一次、二次变换下的解析解

4.1. ϕ 为一次变换

$$\phi(u,v)=au+bv+c=0,a,b,c\neq0,\tag{25}$$

($c=0$ 退化为平凡变换),得

$$au''+bv''=0,\tag{26}$$

对问题(3)有

$$g(x)=u''+Iu=-\frac{c}{a}I(x),\tag{27}$$

所以 $\forall g\in c(D)$,v,u 有解.设 v 的两个线性无关解是 y_1,y_2,y_0 是 u 的一个特解,则问题(3)转化为普通的二阶线性常微分方程解的问题,有[3]

$$\begin{aligned}v&=c_1y_1+c_2y_2,\\ u&=d_1y_1+d_2y_2+y_0(y_1,y_2,g),\end{aligned}\tag{28}$$

c_1,c_2,d_1,d_2 是由边界条件所确定的常数.

对

$$g=d=\mathrm{const}\neq0,\tag{29}$$

若

$$\begin{aligned}&\frac{ad}{c}>0,\\ &v=c_1\exp\left(\sqrt{\frac{ad}{c}}x\right)+c_2\exp\left(-\sqrt{\frac{ad}{c}}x\right),\\ &u=d_1\exp\left(\sqrt{\frac{ad}{c}}x\right)+d_2\exp\left(-\sqrt{\frac{ad}{c}}x\right)-\frac{c}{a};\end{aligned}\tag{30}$$

若

$$\begin{aligned}&\frac{ad}{c}<0,\\ &v=c_1\cos\left(\sqrt{\frac{ad}{c}}x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{\frac{ad}{c}}x\right),\\ &u=d_1\cos\left(\sqrt{\frac{ad}{c}}x\right)+d_2\sin\left(\sqrt{\frac{ad}{c}}x\right)-\frac{c}{a}.\end{aligned}\tag{31}$$

一次变换下问题的解是确定的,对 g 是常数解的结果是简单的.

4.2. ϕ 为二次变换

不失一般性可分为三种情况.

4.2.1. 取变换为椭圆型

$$\phi(u,v)=u^2+v^2-1=0,\tag{32}$$

$$\begin{aligned}&u,v\in[0,1],\\ &\exists u=b\geqslant0,1\geqslant b\geqslant0,\\ &u'=v'=0,\end{aligned}\tag{33}$$

由(16—17),(32)式,得

$$\begin{aligned}&f=\sqrt{1-v^2},\\ &\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}=-\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}.\end{aligned}\tag{34}$$

再由(24)式,得

$$v'^2=(1-v^2)(c_0+2g\sqrt{1-v^2}).\tag{35}$$

对

$$\exists g=1,c_0=-2b,\tag{36}$$

有

$$u'^2=-2(u-1)(u-b)(u+1).\tag{37}$$

按文献[5]的结果,令 $k=\sqrt{\frac{1-b}{2}}$有椭圆函数解

$$u=b+(1-b)cn^2(x,k),(1\geqslant u\geqslant0),\tag{38}$$

进而,得

$$v=\sqrt{1-[b+(1-b)cn^2(x,k)]^2}.\tag{39}$$

当

$$\begin{aligned}&b=1,k=0,\\ &v=0,u=1.\end{aligned}\tag{40}$$

解退化为定点.

同理,对

$$\exists g=-1, \quad c_0=2b, 1\geqslant b\geqslant 0, \quad b\geqslant u\geqslant 0, \tag{41}$$

有

$$u'^2=2(u-1)(u-b)(u+1). \tag{42}$$

令 $k=\sqrt{\frac{1+b}{2}}$,有椭圆函数解[5]

$$u=b-(1+b)cn^2(x,k), (b\geqslant u\geqslant 0), \tag{43}$$

$$v=\sqrt{1-[b-(1+b)cn^2(x,k)]^2}. \tag{44}$$

当

$$b=1, k=1, \quad u=1-2\operatorname{sech}^2(x), \quad v=2\operatorname{sech}(x)\tanh(x), \tag{45}$$

椭圆函数解退化为双曲空间分布函数.

4.2.2. 取变换为双曲型

$$\phi(u,v)=u^2-v^2-1=0, \tag{46}$$

$$\begin{gathered}u\in[1,\infty), v\in(-\infty,\infty), a\geqslant b\geqslant 1,\\ x=x_0, u=a,\\ x=x_1, u=b, u'=v'=0,\\ x_1\to\infty, b\to 1.\end{gathered} \tag{47}$$

由(16—17),(46)式,得

$$f=\sqrt{1+v^2}, \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}=\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}. \tag{48}$$

再由(24)式,得

$$v'^2=(1+v^2)(c_0-2g\sqrt{1+v^2}). \tag{49}$$

$$\exists g=-1, x=x_1, c_0=-2b, \tag{50}$$

有

$$u'^2=2(u-1)(u-b)(u+1). \tag{51}$$

按文献[5]结果方法,可有解

$$u=1-2\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{b+1}{2}}x, k\right), \quad k=\sqrt{\frac{2}{b+1}}, b\geqslant 1\geqslant u\geqslant 0. \tag{52}$$

但该解的范围不满足变换(46)的要求,故还须考虑 $u\geqslant b$ 的情况.而对 $u\geqslant b$,可按文献[4]方法,令

$$u=\frac{1}{t}, t=\frac{w^2}{b+1-w^2}, \quad k^2=\frac{2}{b+1}, w^2=\frac{(b+1)t}{t+1}, \tag{53}$$

$$t\in[0,1), w\in\left[0,\sqrt{\frac{b+1}{2}}\right), \tag{54}$$

$$L(w)=(1-w^2)(1-k^2w^2), \tag{55}$$

有

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u-1)(u-b)(u+1)}}=\pm\sqrt{2}\int\mathrm{d}x, \tag{56}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(t-1)\left(t-\frac{1}{b}\right)t(t+1)}}=2\sqrt{\frac{b}{b+1}}\int\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}, \tag{57}$$

$$\int_{w_0}^{w}\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{L(w)}}=\pm\frac{\sqrt{2(b+1)}}{2}\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x. \tag{58}$$

当

$$x=x_0, u=a, w_0=\sqrt{\frac{b+1}{a+1}}, \tag{59}$$

令

$$\xi=\int_0^{w}\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{L(w)}}, \xi_0=\int_0^{w_0}\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{L(w)}}, \tag{60}$$

$$\xi=\xi_0\pm\frac{\sqrt{2(b+1)}}{2}(x-x_0), \tag{61}$$

则

$$w_0=\mathrm{sn}(\xi_0,k), w=\mathrm{sn}(\xi,k), \quad w=\mathrm{sn}\left[\xi_0\pm\frac{\sqrt{2(b+1)}}{2}(x-x_0),k\right], \tag{62}$$

$$u=\frac{1+b-\mathrm{sn}^2(\xi,k)}{\mathrm{sn}^2(\xi,k)}=\frac{b+\mathrm{cn}^2\left(\xi_0\pm\frac{\sqrt{2(b+1)}}{2}(x-x_0),k\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\xi_0\pm\frac{\sqrt{2(b+1)}}{2}(x-x_0),k\right)}, \tag{63}$$

$$v=\pm\frac{(1+b)\mathrm{dn}(\xi,k)}{\mathrm{sn}^2(\xi,k)}. \tag{64}$$

这是一种新的 Jacobi 椭圆函数解的表示,问题边界条件被吸收入解的相位中,产生了一个零点解值.

当

$$x\to\infty, b\to 1, u\to 1, v\to 0, k\to 1, \quad K(k)\to\infty, K(k)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{L(w)}}, \tag{65}$$

Jacobi 椭圆函数解退化为双曲函数解,则

$$u=\frac{1+\mathrm{sesh}^2\xi}{\tanh^2\xi}$$

$$= 1 + \frac{2}{\mathrm{sh}^2(\xi_0 \pm (x - x_0))}, \tag{66}$$

$$v = \pm \frac{2\mathrm{ch}(\xi)}{\mathrm{sh}^2(\xi)}. \tag{67}$$

对$(\xi_0 \pm (x - x_0))$，取 $x_0 = 0$ 和 + 号，解在 $x = -\xi_0$ 有奇性；若取‘ − ’号，解在 $x = \xi_0$ 产生奇性.

有

$$\xi_0 = \int_0^{w_0} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{(1 - w^2)^2}} = \ln\left|\frac{1 + w_0}{1 - w_0}\right|^{1/2}, \tag{68}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{2}{1 + a}}, \tag{69}$$

对问题(2)因是弱磁场，可有

$$a^2 = 1 + \varepsilon^2, 1 \gg \varepsilon > 0, \tag{70}$$

则

$$\xi_0 = \ln\frac{4}{\varepsilon} > 0. \tag{71}$$

在 $x \in [0, \infty)$上解有意义.则有

$$u \cong 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \mathrm{e}^{-2x}, v \cong -\varepsilon \mathrm{e}^{-x}, \tag{72}$$

$$u' = -\varepsilon^2 \mathrm{e}^{-2x}, v' = \varepsilon \mathrm{e}^{-x}. \tag{73}$$

据(2)式还原约化，则

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{m_0 c^2}{e}\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \exp\left(-\frac{2x}{\lambda}\right)\right),\\
A_y &= -\frac{m_0 c}{e}\varepsilon \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right),\\
E &= \frac{m_0 c^2}{e\lambda}\varepsilon^2 \exp\left(-2\frac{x}{\lambda}\right),\\
B &= \frac{m_0 c}{e\lambda}\varepsilon \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right),\\
J &= n_{s0} ec\varepsilon \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right).
\end{aligned} \tag{74}$$

该问题的物理意义明确，它在低速近似下仍逼近 London 刚性模型；但由于考虑了超导的相对论效应，把电磁场的矢势和标势统一起来，矢势有空间变化必伴随标势的空间变化，从而导致超导体边界层电磁场的空间变化分布.以超导体内无穷深处磁场和电场为零边界条件，在边界层处磁场的衰减分布与 London 理论一致，但电场不为零，也是一指数衰减分布，只是比磁场衰减更快，该解析解修正了文献[1]中的近似解.这一新结论极有必要进一步分析其效应，并给予实验验证.

对 $g = 1$ 的情况可同理讨论，略去.

4.2.3. 取变换为抛物型

$$\phi(u, v) = u - v^2 = 0, \tag{75}$$

由(16—17)，(75)式，得

$$f = v^2,\quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v} = 2v. \tag{76}$$

再由(24)式，得

$$v'^2 = v^{-4}\left(c_0 + \frac{1}{2}gv^4\right), \tag{77}$$

对 $g = -2$，当 $v = b \neq 0$，

$$v' = 0, c_0 = b^4, \tag{78}$$

取 $b \geqslant v \geqslant 0$ 讨论问题的解，则

$$\int \frac{v^2}{\sqrt{(b^2 - v^2)(b^2 + v^2)}}\mathrm{d}v = \pm\int \mathrm{d}x, \tag{79}$$

该方程无初等函数解[10]，则按文献[4]方法，令

$$\begin{aligned}
Q(v) &= (b^2 - v^2)(b^2 + v^2),\\
L(t) &= (1 - t^2)(1 - k^2 t^2),
\end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned}
k^2 &= \frac{b^2}{b^2 + b^2} = \frac{1}{2},\\
v^2 &= b^2(1 - t^2),
\end{aligned} \tag{81}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{Q(v)}} = -\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}b\sqrt{L(t)}}, \tag{82}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{v^2}{\sqrt{Q(v)}}\mathrm{d}v &= -\int \frac{b^2(1 - t^2)}{\sqrt{2}b\sqrt{L(t)}}\mathrm{d}t\\
&= -\sqrt{2}b\left(\int \frac{1 - k^2 t^2}{\sqrt{L(t)}}\mathrm{d}t\right.\\
&\quad \left.- \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{L(t)}}\right).
\end{aligned} \tag{83}$$

按勒让德椭圆积分的定义，

$$W(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{L(t)}}\mathrm{d}t, E(t) = \int_0^t \frac{1 - k^2 t^2}{\sqrt{L(t)}}\mathrm{d}t, \tag{84}$$

结合(79)，(83)式有

$$W(t) - 2E(t) = \pm\frac{\sqrt{2}}{b}(x - x_0), \tag{85}$$

这是椭圆积分的超越函数，难以给出显式表示.

对 $g = 2$ 的情况与上同，略去.

5. 结　论

本文应用方程变换和 Jacobi 椭圆函数，探究了问题(3)及其一次、二次变换下的解析解，所得结果包含了文献中未见的新的解的 Jacobi 椭圆函数表示形式.该问题的逆问题可为解椭圆方程提供一种新思路.二次双曲变换下的解析解，修正了文献[1]的结论；与传统的认为超导体不能存在电场不同，该结

果进一步明确了超导边界层电场是与磁场共存的,超导是电磁场的矢势和标势产生可观察物理效应的典型现象,在超导宏观现象中该效应虽然很弱,但极有必要进一步分析其效应,并给予实验验证.

[1] Yang P F, Li C Z 1999 *Joural of Northwest University* (Natural Science Edition) **29**(6) S.I. p44 (in Chinese) [杨鹏飞、李存志 1999 西北大学学报(自然科学版)29(6) 专辑 44]

[2] Department of Mathematics, Sichuan University 1978 *Higher Mathematics* No.2 (Beijing:People 's Education Press) (in Chinese) [四川大学数学系 1978 高等数学第二册 (北京:人民教育出版社)]

[3] Department of Mathematics, Northeast Normal University 1992 *Ordinary differential quation* (Beijing: People 's Education Press) (in Chinese) [东北师范大学数学系 1992 常微分方程(北京:人民教育出版社)]

[4] Wang Z X, Guo D R 2000 *Introduction to Special Function* (Beijing:Peking University Press) (in Chinese) [王竹溪、郭敦仁 2000 特殊函数概论(北京 北京大学出版社)]

[5] Lin S K, Liu S D 2000 *Nonlinear Equations in Physics* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [刘式适、刘式达 2000 物理中的非线性方程(北京 北京大学出版社)]

[6] Lin S K ,Fu Z T,Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin*. **51** 10 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘适达、赵 强 2002 物理学报 **51** 10]

[7] Lin S K ,Fu Z T,Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin*. **51** 718 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘适达、赵 强 2002 物理学报 **51** 718]

[8] Lin S K, Fu Z ,T,Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin*. **51** 1923 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘适达、赵 强 2002 物理学报 **51** 1923]

[9] Fu Z T, Lin S K, Liu S D 2004 *Acta Phys. Sin*. **53** 343 (in Chinese) [付遵涛、刘式适、刘适达 2004 物理学报 **53** 343]

[10] Hua L G 1963 *Introduction to Higher mathematics* Vol.1 No.1 (Beijing:Science Press) (in Chinese) p266 [华罗庚 1963 高等数学引论 第一卷 第一分册(北京 科学出版社) 第 266 页]

Analytical solution for a class of coupled linear second-order differential equations limited by transformations

Yang Peng-Fei

(*Yulin Branch of Shaanxi Radio and Television University*, *Yulin* 719000, *China*)

(Received 12 November 2005; revised manuscript received 23 March 2006)

Abstract

By using the function and equation transformations, a coupled linear second-order differential equations are reduced to a nonlinear first-order Elliptic equation. And the analytical solutions to coupled transformations that include first-order and second-order transformations are given. The special approximate solution to a superconductivity question derived from a reference is reformed by using the new result given in this paper, and the existence of electric field in the surface of superconductor is validated.

Keywords: differential equations, Jacobi elliptic equations, analytical solution, superconductivity

PACC: 0290, 0340K, 7420D