

等效原理和互易性定理在两个相邻球形目标 电磁散射中的应用^{*}

郭立新[†] 王运华 吴振森

(西安电子科技大学理学院, 西安 710071)

(2006 年 2 月 10 日收到, 2006 年 3 月 10 日收到修改稿)

基于等效原理和互易性定理研究了两个相邻目标的电磁散射问题, 给出了这一复合电磁散射模型的二阶散射结果. 通常平面入射波的一阶散射结果容易求解, 但由于耦合效应的复杂性, 很难给出二阶散射结果的解析形式. 应用互易性定理给出了求解任意相邻导体/介质目标二阶电磁散射场的公式, 并利用等效原理将求解散射场公式中的体积分简化为面积分的形式, 从而降低了求解难度. 同时还推导了两个目标的二次散射场之间的关系. 最后应用给出的公式, 求解了两相邻球形目标的复合散射场, 对双站散射结果进行了讨论, 同时与应用时域积分方法求得的结果进行了比较.

关键词: 等效原理, 互易性定理, 电磁散射, 相邻圆球

PACC: 4110H, 4120

1. 引言

离散散射体如雨滴、沙尘、云和雾等对电磁波的传播会产生很大的影响, 尤其当雷达波频率较高时^[1]. 通常为了几何形状简单起见, 这些目标大多被看成球形或椭球形. 近年来, 关于单一球形或椭球形目标的电磁散射这一问题有学者在理论和实验上都进行了大量的研究^[2-6]. 然而, 当研究随机离散媒质的电磁散射时, 单次散射模型^[7-10]不再有效, 尤其对于目标密度比较大或目标尺寸较大的情况, 这时, 必须考虑二阶耦合散射的影响. 由于耦合电磁散射涉及到非平面波散射问题, 因此只有极少数情况存在精确解^[11, 12], 而对于一般性目标很难求解. 本文应用互易性定理^[13-16]和等效原理^[16]给出了相邻两目标电磁散射的近似解. 在求解公式中只需要知道入射平面波在单一目标上激发的等效面电流和(或)面磁流及单一目标对平面波的散射场, 这显然降低了求解难度. 同时我们还推导了两个目标的二次散射场之间的关系, 进一步简化了求解问题的难度. 应用给出的求解公式, 我们求解了相邻圆球的

复合电磁散射问题, 并与采用时域积分方程法(TDIE)^[17]得到的结果进行了比较和验证, 分析了考虑二次散射对总复合散射截面的影响, 讨论了复合散射截面角分布随两球形目标之间距离、球形目标半径和入射频率的变化.

2. 互易性定理在两个相邻目标复合电磁散射中的应用

在求解导体及介质目标的电磁散射问题时, 可以应用面等效电流源和(或)磁流源^[16, 18]来代替目标进行求解, 这样可以降低求解问题的难度. 面电流源 J_s 和面磁流源 M_s 都是由于切向电磁场的不连续性产生的, 分别定义为

$$J_s = \hat{n} \times \delta H, \quad M_s = -\hat{n} \times \delta E. \quad (1)$$

假设在空间中有两个相互靠近的目标(如图 1 所示), 设有一平面波 E_1^i, H_1^i 入射到目标 1 和目标 2 上. 第一种情况: 当介质目标 2 不存在时, 入射电磁场在目标 1 的表面上感生的等效面电流密度和面磁流密度分别为 J_1 和 M_1 , 此时由 J_1 在空间中激发的电磁场及其目标 2 对这一电磁场的散射场之和记

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 60571058)、国防科技预研基金、西安电子科技大学研究生创新基金资助的课题.

[†] E-mail: lxguo@mail.xidian.edu.cn

为 E_{J1} 和 H_{J1} ; 由 M_1 在空间中激发的电磁场及其目标 2 对这一电磁场的散射场之和记为 E_{m1} 和 H_{m1} . 对于第二种情况: 去掉入射波在介质目标 1 上感生的等效面电流和等效面磁流, 只是保留目标 2 (如图 2 所示) 在远区观察点 P 处有单位点电流源 $J_e = \hat{p}\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)$ 和单位点磁流源 $M_m = \hat{q}\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)$, 单位点电流源和磁流源的极化方向 $\hat{q}(\hat{v}_s$ 或 $\hat{h}_s)$ 和 $\hat{q}(\hat{v}_s$ 或 $\hat{h}_s)$ 满足条件: $\hat{q} = \hat{k}_s \times \hat{p}$. 单位点电流源 J_e 在空间中激发的电场和磁场分别为 E_{e22} , H_{e22} ; 由单位点磁流源 M_m 在空间中激发的电场和磁场分别为 E_{m22} , H_{m22} . 这里 E_{e22} , H_{e22} , E_{m22} 和 H_{m22} 都是既包括源的一次散射场同时也包括目标 2 对一次散射场的二次散射场. 这样应用互易性定理公式^[16]得

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} J_1 \cdot (E_{e22} + E_{m22}) - J_e \cdot (E_{J1} + E_{m1}) \\ & + M_m \cdot (H_{J1} + H_{m1}) - M_1 \cdot (H_{e22} + H_{m22}) dS \\ & = \oint_{S_\infty + S_2} [(E_{J1} + E_{m1}) \times (H_{e22} + H_{m22}) \\ & - (E_{e22} + E_{m22}) \times (H_{J1} + H_{m1})] \cdot dS, \quad (2) \end{aligned}$$

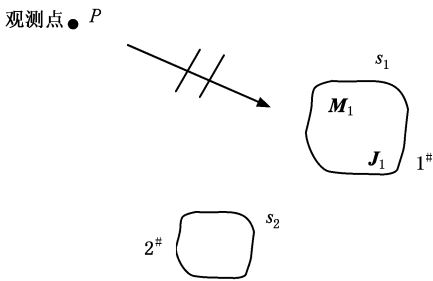


图 1 两个目标的复合电磁散射示意图

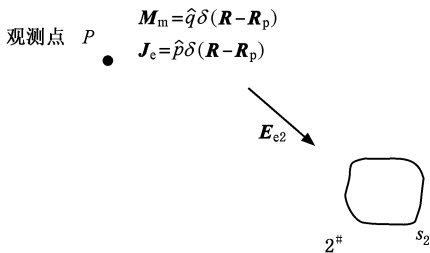


图 2 目标 1 不存在时的示意图

这里 S_∞ 代表无限远闭合球面. 因为在无限远处电磁场存在关系 $(E_{J1} + E_{m1}) = -Z_0 \hat{n} \times (H_{J1} + H_{m1})$,

$(E_{e22} + E_{m22}) = -Z_0 \hat{n} \times (H_{e22} + H_{m22})$ (Z_0 为自由空间的特征阻抗), 所以上式中关于 S_∞ 的积分为零. 同时根据互易性定理^[16]关于 S_2 的积分也等于零. 这样 (2) 式可写为

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} J_1 \cdot (E_{e22} + E_{m22}) - J_e \cdot (E_{J1} + E_{m1}) \\ & + M_m \cdot (H_{J1} + H_{m1}) \\ & - M_1 \cdot (H_{e22} + H_{m22}) dS = 0. \quad (3) \end{aligned}$$

对于两个理想导体目标而言 (3) 式可以写为

$$\int_{S_1} J_1 \cdot E_{e22} - J_e \cdot E_{J1} dS = 0, \quad (4)$$

对于两个理想导磁体目标而言 (3) 式可以写为

$$\int_{S_1} M_m \cdot H_{m1} - M_1 \cdot H_{m22} dS = 0. \quad (5)$$

对于两个相邻介质目标而言, 将 (4) 式和 (5) 式代入 (3) 式, 又因为 J_e 和 M_m 是单位点源, 可得

$$\hat{p} \cdot E_{J1} = \int_{S_1} J_1 \cdot E_{e22} dS, \quad (6)$$

$$\hat{q} \cdot H_{m1} = \int_{S_1} M_1 \cdot H_{m22} dS, \quad (7)$$

$$\hat{p} \cdot E_{m1} - \hat{q} \cdot H_{J1} = \int_{S_1} J_1 \cdot E_{m22} - M_1 \cdot H_{e22} dS. \quad (8)$$

同理可以求得

$$\hat{p} \cdot E_{J2} = \int_{S_2} J_2 \cdot E_{e11} dS, \quad (9)$$

$$\hat{q} \cdot H_{m2} = \int_{S_2} M_2 \cdot H_{m11} dS, \quad (10)$$

$$\hat{p} \cdot E_{m2} - \hat{q} \cdot H_{J2} = \int_{S_2} J_2 \cdot E_{m11} - M_2 \cdot H_{e11} dS. \quad (11)$$

应用 (6) (7) (9) 和 (10) 式及关系 $E_{m1} = -Z_0 \hat{k}_s \times H_{m1}$, $E_{m2} = -Z_0 \hat{k}_s \times H_{m2}$ 可求解任意两相邻目标的复合二阶复合电磁散射场. 以上应用等效原理和互易性定理推导了两个靠近目标复合电磁散射场的求解公式, 当目标均为理想导体时, 所得 (6) 和 (9) 式与文献 [8] 中的 (2) 和 (3) 式是一致的.

3. 二次散射场分析

上面借助等效原理和互易性定理给出了考虑二

次耦合散射时相邻两目标复合散射场的面积分求解公式. 由于目标一次散射场的求解较为简单, 在此不多做讨论. 以下主要分析目标 1 对目标 2 一次散射场的二次散射场及目标 2 对目标 1 一次散射场的二次散射场之间的关系.

根据第 2 部分的讨论, 可以看出目标 2 对目标 1 初次散射场的二次散射场实质上就是目标 2 对目标 1 上感应面电流 J_1 和(或)磁流 M_1 所激发电磁场的散射场之和, 反之亦然. 根据 Stratton-Chu 公式^[1] 可得由 M_1 激发磁场为

$$\begin{aligned} H_{1m}^s &= ik_0 Y_0 \int_{S_1} \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') M_1(\mathbf{r}') dS' \\ &= \frac{-k_0 Y_0}{8\pi^2} \iint \frac{1}{k_z} (\bar{I} - \hat{k}\hat{k}) \int_{S_1} M_1(\mathbf{r}') \\ &\quad \times \exp[j\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] dS' dk_x dk_y, \quad (12) \end{aligned}$$

其中 $Y_0 = 1/Z_0$. 在求解 (12) 式的过程中应用了并矢格林函数 $\bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 的傅里叶变换, 其中下角标 m 分别表示由 M_1 激发的磁场.

众所周知, 如果两个目标彼此是在远区, 那么由 M_1 在目标 2 处激发的磁场又可写为

$$\begin{aligned} H_m^s(\hat{k}_i, \hat{k}) &= ik_0 Y_0 \int_{S_1} \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') M_1(\mathbf{r}') dS' \\ &= \frac{ik_0 Y_0 e^{ik_0 r}}{4\pi r} (\bar{I} - \hat{k}\hat{k}) \int_{S_1} M_1(\mathbf{r}') \\ &\quad \times \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') dS' \\ &= \frac{e^{ik_0 r}}{4} e^{ik_0(\hat{k}_i - \hat{k}) \cdot \mathbf{r}_1} \bar{S}_{1m}(\hat{k}_i, \hat{k}) H_i \quad (13) \end{aligned}$$

这里 $\hat{k}_i$ 和 $\hat{k}$ 分别表示为入射波和散射波的传播方向, $\bar{S}_{1m}(\hat{k}_i, \hat{k})$ 表示目标 1 的磁场散射振幅矩阵矢量, $\mathbf{r}_1$ 是目标 1 的位置矢量. 由 (13) 式可得

$$\begin{aligned} &\frac{ik_0 Y_0}{4\pi} (\bar{I} - \hat{k}\hat{k}) \int_{S_1} M_1(\mathbf{r}') \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') dS' \\ &= e^{ik_0(\hat{k}_i - \hat{k}) \cdot \mathbf{r}_1} \bar{S}_{1m}(\hat{k}_i, \hat{k}) H_i. \quad (14) \end{aligned}$$

将 (14) 式代入 (12) 式, 散射场 H_{1m}^s 可写为

$$\begin{aligned} H_{1m}^s &= ik_0 Y_0 \int_{S_1} \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') M_1(\mathbf{r}') dS' \\ &= \frac{i}{2\pi} \iint \frac{1}{k_z} \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \frac{ik_0 Y_0}{4\pi} (\bar{I} - \hat{k}\hat{k}) \\ &\quad \times \int_{S_1} M_1(\mathbf{r}') \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') dS' dk_x dk_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{2\pi} \iint \frac{1}{k_z} \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) e^{ik_0(\hat{k}_i - \hat{k}) \cdot \mathbf{r}_1} \\ &\quad \times \bar{S}_{1m}(\hat{k}_i, \hat{k}) dk_x dk_y \cdot H_i. \quad (15) \end{aligned}$$

由 (15) 式可以看出目标 1 散射场的近场可表示为平面波谱域叠加的形式. 将 H_{1m}^s 视为入射场, 目标 2 对 H_{1m}^s 的散射场可以写为

$$\begin{aligned} H_{21m}^s &= \frac{e^{ik_0 r}}{r} \left\{ \frac{i}{2\pi} \iint \frac{1}{k_z} e^{ik_0(\hat{k}_i - \hat{k}) \cdot \mathbf{r}_1} e^{ik_0(\hat{k} - \hat{k}_s) \cdot \mathbf{r}_2} \right. \\ &\quad \times \bar{S}_{1m}(\hat{k}_i, \hat{k}) \bar{S}_{2m}(\hat{k}, \hat{k}_s) dk_x dk_y \left. \right\} \cdot H_i \\ &= \frac{e^{ik_0 r}}{r} \bar{S}_{21m}(\hat{k}_i, \hat{k}_s) \cdot H_i. \quad (16) \end{aligned}$$

同理可求得

$$\begin{aligned} E_{21e}^s &= \frac{e^{ik_0 r}}{r} \left\{ \frac{i}{2\pi} \iint \frac{1}{k_z} e^{ik_0(\hat{k}_i - \hat{k}) \cdot \mathbf{r}_1} e^{ik_0(\hat{k} - \hat{k}_s) \cdot \mathbf{r}_2} \right. \\ &\quad \times \bar{S}_{1e}(\hat{k}_i, \hat{k}) \bar{S}_{2e}(\hat{k}, \hat{k}_s) dk_x dk_y \left. \right\} \cdot E_i \\ &= \frac{e^{ik_0 r}}{r} \bar{S}_{21e}(\hat{k}_i, \hat{k}_s) \cdot E_i, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{12e}^s &= \frac{e^{ik_0 r}}{r} \left\{ \frac{i}{2\pi} \iint \frac{1}{k_z} e^{ik_0(-\hat{k} - \hat{k}_s) \cdot \mathbf{r}_1} e^{ik_0(\hat{k} + \hat{k}_i) \cdot \mathbf{r}_2} \right. \\ &\quad \times \bar{S}_{1e}(-\hat{k}, \hat{k}_s) \bar{S}_{2e}(\hat{k}_i, -\hat{k}) dk_x dk_y \left. \right\} \cdot E_i \\ &= \frac{e^{ik_0 r}}{r} \bar{S}_{12e}(\hat{k}_i, \hat{k}_s) \cdot E_i, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{12m}^s &= \frac{e^{ik_0 r}}{r} \left\{ \frac{i}{2\pi} \iint \frac{1}{k_z} e^{ik_0(-\hat{k} - \hat{k}_s) \cdot \mathbf{r}_1} e^{ik_0(\hat{k} + \hat{k}_i) \cdot \mathbf{r}_2} \right. \\ &\quad \times \bar{S}_{1m}(-\hat{k}, \hat{k}_s) \bar{S}_{2m}(\hat{k}_i, -\hat{k}) dk_x dk_y \left. \right\} \cdot H_i \\ &= \frac{e^{ik_0 r}}{r} \bar{S}_{12m}(\hat{k}_i, \hat{k}_s) \cdot H_i. \quad (19) \end{aligned}$$

将 (16) 式 (17) 式分别和 (18) 式 (19) 式相比较, 容易得到下面的关系:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{21e}(\hat{k}_i, \hat{k}_s) &= \bar{S}_{12e}^{(-t)}(-\hat{k}_s, -\hat{k}_i), \\ \bar{S}_{21m}(\hat{k}_i, \hat{k}_s) &= \bar{S}_{12m}^{(-t)}(-\hat{k}_s, -\hat{k}_i). \quad (20) \end{aligned}$$

在 (20) 式的求解过程中应用到了下面的关系:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{1e}(\hat{k}, \hat{k}_s) &= \bar{S}_{1e}^{(-t)}(-\hat{k}_s, -\hat{k}), \\ \bar{S}_{2e}(\hat{k}_i, \hat{k}) &= \bar{S}_{2e}^{(-t)}(-\hat{k}, -\hat{k}_i). \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{1m}(\hat{k}, \hat{k}_s) &= \bar{S}_{1m}^{(-t)}(-\hat{k}_s, -\hat{k}), \\ \bar{S}_{2m}(\hat{k}_i, \hat{k}) &= \bar{S}_{2m}^{(-t)}(-\hat{k}, -\hat{k}_i), \quad (22) \end{aligned}$$

上角标 $(-t)$ 表示矩阵转置并且非主对角线元素前加负号.

根据第 2 部分的讨论, 目标 1 和目标 2 的二次散射场可以写为

$$= \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} \hat{p} \cdot S_1(\hat{k}_i, \hat{k}_s), \quad (35)$$

在(35)式中 $E_{\text{mld}}^s = -Z_0 \hat{k}_s \times H_{\text{mld}}^s$, $\bar{S}_1(\hat{k}_i, \hat{k}_s)$ 是球 1 对平面波的散射振幅矩阵^[20].

同理可以求得圆球 2 的一次散射场为

$$\hat{p} \cdot E_{2s}^s(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} e^{-ik_0(\hat{k}_s - \hat{k}_i) \cdot \tilde{\mathbf{r}}} \hat{p} \cdot \bar{S}_2(\hat{k}_i, \hat{k}_s). \quad (36)$$

以下应用第 3 部分给出的公式求解两球之间的二次散射场. 假设观测点在远区, 这样由单位电流源和磁流源分别激发的电场 E_{el} 和 H_{ml} 可以认为是沿 $-\hat{k}_s$ 方向传播的平面波. 因此(29)式(30)式中的 E_{e2s} 和 H_{m2s} 可以写为

$$E_{\text{e2s}}(\mathbf{r}) = \frac{-ik_0 Z_0}{4\pi} \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} e^{ik_0 \hat{k}_s \cdot \tilde{\mathbf{r}}} \times \frac{e^{ik_0 r'}}{r'} \bar{S}_{\text{e2s}}(-\hat{k}_s, \hat{r}'), \quad (37)$$

$$H_{\text{m2s}}(\mathbf{r}) = \frac{-ik_0 Y_0}{4\pi} \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} e^{ik_0 \hat{k}_s \cdot \tilde{\mathbf{r}}} \times \frac{e^{ik_0 r'}}{r'} \bar{S}_{\text{m2s}}(-\hat{k}_s, \hat{r}'). \quad (38)$$

(37)式(38)式中有 $r' = |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|$, $\hat{r}' = (\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}) / |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|$, $\bar{S}_{\text{e2s}}(-\hat{k}_s, \hat{r}')$ 和 $\bar{S}_{\text{m2s}}(-\hat{k}_s, \hat{r}')$ 分别为球 2 的电场和磁场散射振幅矩阵. 根据(29)式(30)式可以求得球 2 的二次散射场为

$$\hat{p} \cdot E_{\text{J12s}}^s = \frac{-ik_0 Z_0}{4\pi} \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} e^{ik_0 \hat{k}_s \cdot \tilde{\mathbf{r}}} \int_{S_1} \mathbf{J}_1 \cdot \frac{e^{ik_0 r'}}{r'} \bar{S}_{\text{e2s}}(-\hat{k}_s, \hat{r}') dS, \quad (39)$$

$$\hat{q} \cdot H_{\text{M12s}}^s = \frac{-ik_0 Y_0}{4\pi} \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} e^{ik_0 \hat{k}_s \cdot \tilde{\mathbf{r}}} \int_{S_1} \mathbf{M}_1 \cdot \frac{e^{ik_0 r'}}{r'} \bar{S}_{\text{m2s}}(-\hat{k}_s, \hat{r}') dS, \quad (40)$$

这里 $\mathbf{J}_1$ 和 $\mathbf{M}_1$ 分别代表球 1 上由入射波激发的等效面电流和面磁流.

应用(27)式所给出的条件(39)和(40)两式可以解析求解. 在(39)和(40)式中, 注意到 $\mathbf{r}$ 是球 1 的球心到指向球面上某点的位置矢量, 所以有 $|\mathbf{r}| \ll |\tilde{\mathbf{r}}|$, 这样

$$\hat{r}' = \frac{\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}|} \approx -\hat{\tilde{\mathbf{r}}}. \quad (41)$$

在(41)式这一条件下, 在(39)式(40)式中, $\bar{S}_{\text{e2s}}(-\hat{k}_s, \hat{r}')$ 和 $\bar{S}_{\text{m2s}}(-\hat{k}_s, \hat{r}')$ 不再是积分变量的函

数, 可以提到积分号外, 由此(39)式(40)式可以表示为

$$\begin{aligned} \hat{p} \cdot E_{\text{J12s}}^s &= \frac{-ik_0 Z_0}{4\pi} \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} e^{ik_0 \hat{k}_s \cdot \tilde{\mathbf{r}}} \bar{S}_{\text{e2s}}(-\hat{k}_s, -\hat{\tilde{\mathbf{r}}}) \\ &\quad \cdot \int_{S_1} \mathbf{J}_1 \cdot \frac{e^{ik_0 r'}}{r'} dS \\ &= \frac{-ik_0 Z_0}{4\pi} \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} e^{ik_0 \hat{k}_s \cdot \tilde{\mathbf{r}}} \bar{S}_{\text{e2s}}(-\hat{k}_s, -\hat{\tilde{\mathbf{r}}}) \\ &\quad \cdot \left[\hat{\tilde{\mathbf{r}}} \times \hat{\tilde{\mathbf{r}}} \times \int_{S_1} \mathbf{J}_1 \cdot \frac{e^{ik_0 r'}}{r'} dS \right], \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{q} \cdot H_{\text{M12s}}^s &= \frac{-ik_0 Y_0}{4\pi} \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} e^{ik_0 \hat{k}_s \cdot \tilde{\mathbf{r}}} \bar{S}_{\text{m2s}}(-\hat{k}_s, -\hat{\tilde{\mathbf{r}}}) \\ &\quad \cdot \int_{S_1} \mathbf{M}_1 \cdot \frac{e^{ik_0 r'}}{r'} dS \\ &= \frac{-ik_0 Y_0}{4\pi} \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} e^{ik_0 \hat{k}_s \cdot \tilde{\mathbf{r}}} [-\hat{\tilde{\mathbf{r}}} \times \bar{S}_{\text{e2s}}(-\hat{k}_s, -\hat{\tilde{\mathbf{r}}})] \cdot \int_{S_1} \mathbf{M}_1 \cdot \frac{e^{ik_0 r'}}{r'} dS \\ &= \frac{-ik_0 Y_0}{4\pi} \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} e^{ik_0 \hat{k}_s \cdot \tilde{\mathbf{r}}} \bar{S}_{\text{e2s}}(-\hat{k}_s, \hat{\tilde{\mathbf{r}}}) \\ &\quad \cdot \left[\hat{\tilde{\mathbf{r}}} \times \int_{S_1} \mathbf{M}_1 \cdot \frac{e^{ik_0 r'}}{r'} dS \right]. \quad (43) \end{aligned}$$

应用(42)式和(43)式, 球 2 的二次散射场 $\hat{p} \cdot (E_{\text{J12s}}^s + E_{\text{M12s}}^s)$ 可以写为

$$\begin{aligned} \hat{p} \cdot E_{\text{12s}}^s &= k_0^2 \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} e^{-ik_0 \hat{k}_s \cdot \tilde{\mathbf{r}}} \bar{S}_{\text{e2s}}(-\hat{k}_s, -\hat{\tilde{\mathbf{r}}}) \\ &\quad \cdot \left\{ \left[\hat{\tilde{\mathbf{r}}} \times \hat{\tilde{\mathbf{r}}} \times \int_{S_1} \frac{iZ_0}{4k_0\pi} \mathbf{J}_1 \cdot \frac{e^{ik_0 r'}}{r'} dS \right] \right. \\ &\quad \left. - Z_0 \left[\hat{\tilde{\mathbf{r}}} \times \int_{S_1} \frac{iY_0}{4k_0\pi} \mathbf{M}_1 \cdot \frac{e^{ik_0 r'}}{r'} dS \right] \right\} \\ &= \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} e^{-ik_0 \hat{k}_s \cdot \tilde{\mathbf{r}}} \bar{S}_{\text{e2s}}(-\hat{k}_s, -\hat{\tilde{\mathbf{r}}}) \\ &\quad \cdot k_0^2 \left\{ \hat{\tilde{\mathbf{r}}} \times \hat{\tilde{\mathbf{r}}} \times \int_{S_1} \frac{iZ_0}{4k_0\pi} \mathbf{J}_1 \cdot \frac{e^{ik_0 r'}}{r'} dS \right. \\ &\quad \left. - Z_0 \hat{\tilde{\mathbf{r}}} \times \int_{S_1} \frac{iY_0}{4k_0\pi} \mathbf{M}_1 \cdot \frac{e^{ik_0 r'}}{r'} dS \right\} \\ &= \frac{e^{-ik_0 r_0}}{r_0} e^{-ik_0 \hat{k}_s \cdot \tilde{\mathbf{r}}} \bar{S}_{\text{e2s}}(-\hat{k}_s, -\hat{\tilde{\mathbf{r}}}) \\ &\quad \cdot \bar{E}_{\text{el}}(\hat{k}_i, \hat{\tilde{\mathbf{r}}}), \quad (44) \end{aligned}$$

这里 $\bar{S}_{\text{e2s}}(-\hat{k}_s, -\hat{\tilde{\mathbf{r}}})$ 和 $\bar{E}_{\text{el}}(\hat{k}_i, \hat{\tilde{\mathbf{r}}})$ 分别是球 2 和球

1 的散射振幅矩阵.

同理可以求得球 1 的二次散射场为

$$\hat{p} \cdot \boldsymbol{E}_{21s}^s = \frac{e^{ik_0 r_0}}{r_0} e^{ik_0 \hat{k}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{r}}} \bar{S}_{\text{els}}(-\hat{k}_s, \hat{\tilde{\boldsymbol{r}}}) \cdot \bar{\boldsymbol{E}}_{\text{e2s}}(\hat{k}_s, -\hat{\tilde{\boldsymbol{r}}}). \quad (45)$$

通过比较(44)和(45)两式,可以看到当求得一个目标上的二次散射场后,就可以应用(32)式给出的关系求解另一目标上的二次散射场,耦合散射场即为(44)和(45)式之和. 这样相邻两个球形目标的二阶总复合散射场为

$$\hat{p} \boldsymbol{E}_2^s = \hat{p} \cdot \boldsymbol{E}_{1s}^s + \hat{p} \cdot \boldsymbol{E}_{2s}^s + \hat{p} \cdot \boldsymbol{E}_{12s}^s + \hat{p} \cdot \boldsymbol{E}_{21s}^s. \quad (46)$$

5. 数值计算结果与讨论

为了验证本文所给方法的正确性,图4(a)(b)比较了TE波入射时,考虑一次散射的一阶散射场((35)式与(36)式之和)和考虑二次散射的二阶散射场((46)式)情况下两个球形目标在相距不同距离时

的双站散射截面随散射方位角 ϕ_s 的角分布,图中同时与采用时域积分方程(TDIE)^[17]的计算结果进行了比较. 计算中入射波频率取为 10GHz,入射波矢量在 y - z 平面内(如图3所示),入射角和散射角分别为 $\theta_i = 90^\circ$ 和 $\theta_s = 90^\circ$,两个球形目标的半径均为 5mm,球 1 的球心位置位于坐标原点. 球 1 和球 2 的相对介电常数分别为(10,0.01)和(12.5,0.01). 从图4可以看出,考虑二次散射结果和时域积分方程(TDIE)的计算结果有较好的符合. 当两球形目标之间距离 $\tilde{r}$ 较小时,一次散射截面和二次散射截面角分布有一些差别,随着两球形目标之间距离的增大,耦合散射对复合散射场的影响逐渐减小,考虑一次散射和二次散射的结果几乎相同. 从图中还可以看出,随着 $\tilde{r}$ 的增大,散射截面角分布曲线振荡起伏增强,此时两球之间的耦合效应减弱,两球散射场之间的相位差由于波程差的增加而增大,它随散射方位角的变化而有较大的变化.

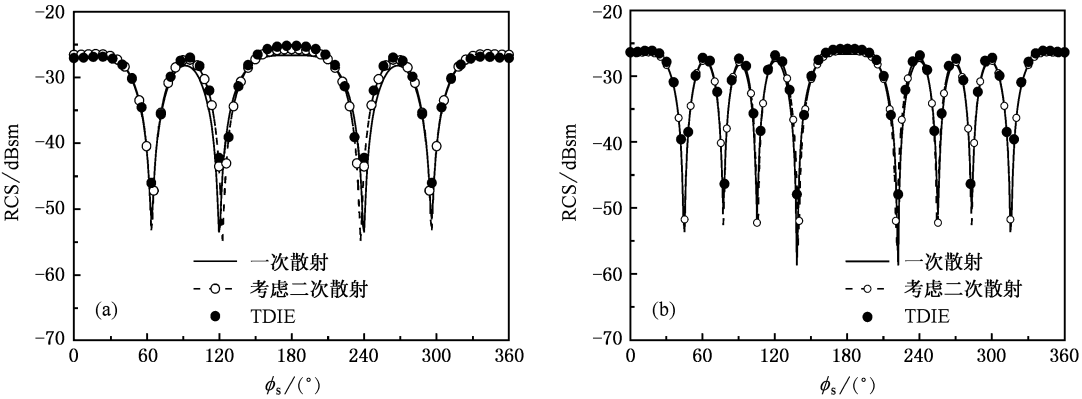


图4 TE波入射下两相邻球形目标双站散射截面散射方位角分布随 $\tilde{r}$ 的变化 (a) $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}, \tilde{r}) = (90^\circ, 90^\circ, 30\text{mm})$ (b) $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}, \tilde{r}) = (90^\circ, 90^\circ, 60\text{mm})$

为了进一步说明二次耦合散射((44)式(45)式)对二阶总复合散射((46)式)的贡献,图5给出了不同散射方位角下耦合散射截面随两球之间距离的变化,图中入射频率为 9GHz,其他参数选取同图4. 从图中也不难发现,在其他条件不变的情况下,无论散射方位角大小如何,两球之间的耦合散射截面均随着两球之间距离的增加而逐渐减小. 图6则给出了考虑二次散射时的两相邻球形目标二阶复合散射截面方位角分布随球体半径的变化. 图中两球相距 50mm,其他参数选取同图4. 可以看出,球体半径对散射截面方位角分布有一定影响,随着两球半径的

增大,对于相同的散射方位角,散射截面幅值有增大的趋势.

图7和图8分别给出了TM波入射下不同入射频率时,考虑一次和二次散射时双站散射截面随散射方位角 ϕ_s 和散射角 θ_s 的分布. 其中球 2 的位置矢量为 $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}, \tilde{r}) = (90^\circ, 90^\circ, 30\text{mm})$,其他参数选取同图4. 通过图7和图8中的计算结果可以看出,当入射频率较小时,考虑一次和考虑二次散射结果几乎一致. 随着入射频率的增大,考虑二次散射中的耦合散射对总的复合散射场影响增大,这主要是因为当两球之间的距离不变时,根据条件(27)式,入射

频率越大,两球越是处于靠近彼此的近区,耦合效应越强.同时从图中还可以发现,当入射频率较大时,与仅考虑一次散射结果相比,考虑二阶散射场的结果与时域积分方程方法求得的结果符合得更好.因

此在求解相邻球形目标的复合电磁散射场时,特别是当耦合效应影响显著时,经典的仅考虑一次散射而忽略二次散射场的结果是不准确的.需要说明的是本文所得结论对 TM 波和 TE 波入射同样适用.

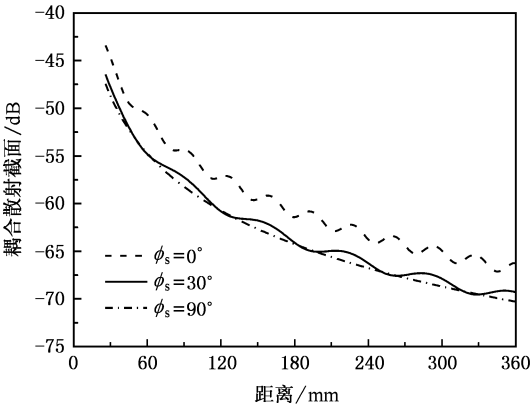


图5 耦合散射截面随两球之间距离的变化

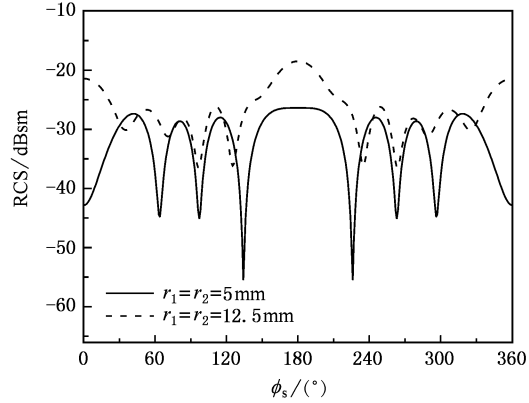


图6 二阶复合散射截面方位角分布随球体半径的变化

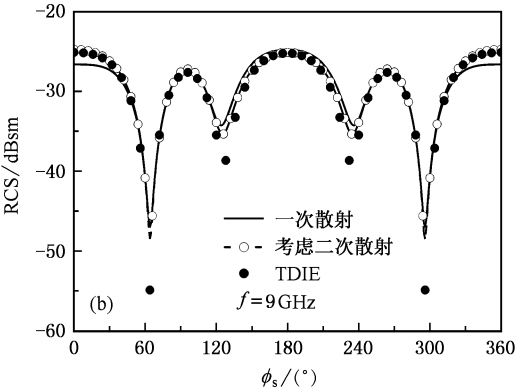
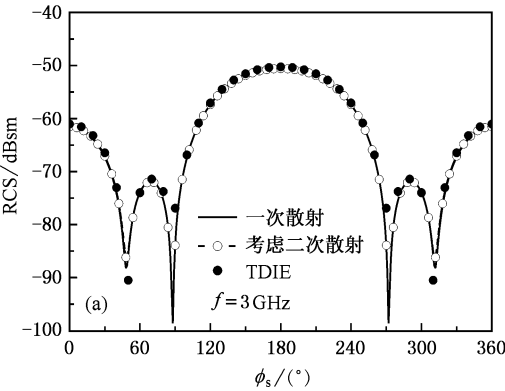


图7 TM 波入射时两相邻球形目标双站散射截面方位角分布随入射频率的变化($\theta_s = 90^\circ$)

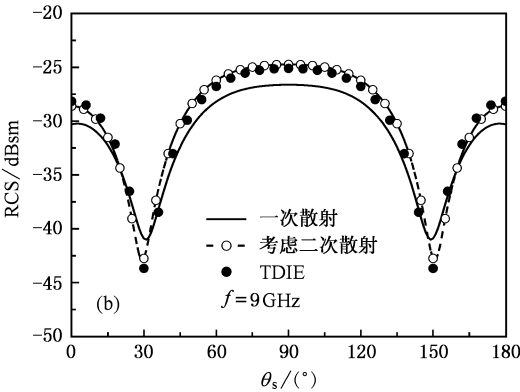
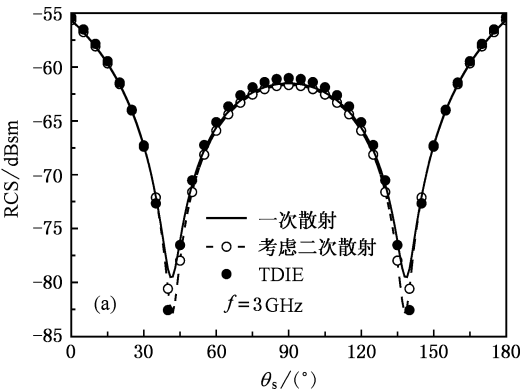


图8 TM 波入射时双站散射截面随散射角 θ_s 的分布($\phi_s = 90^\circ$)

6. 结 论

本文基于互易性定理求解了两个相邻目标的复合电磁散射问题,同时应用等效原理将求解介质目标散射场公式中的体积分化为面积分的形式,并在此基础上推导给出了两个目标的二次散射场之间的关系,从而进一步降低求解问题的难度.应用本文

提出的求解相邻目标复合散射场的公式求解了两个相邻球形目标的二阶复合散射场.通过和时域积分方程方法计算结果的比较,可以看出文中的二阶散射结果更为准确,尤其当入射波频率较高或两球心之间的距离较近时,二次散射场不可以忽略.本文所得有关结论可以应用到其他形状目标之间的电磁散射计算.

[1] Li L W , Kooi P S , Leong M S , Yeo T S , Gao M Z 1995 *IEEE Trans . Antennas Propagat .* **43** 811

[2] Wu Z S , Guo L X , Ren K F , Gouesbet G , Grehan G 1997 *Applied Opt .* **36** 5188

[3] Gouesbet G , Grehan G , Maheu B 1990 *J . Opt . Soc . Am . A* **7** 998

[4] Doicu A , Wriedt T 1997 *Applied Opt .* **36** 2971

[5] Li Y , Huang J 2003 *J . Electromagn . Waves and Appl .* **17** 1745

[6] Wu P , Han Y P , Liu D F 2005 *Acta Phys . Sin .* **54** 2776 (in Chinese)[吴 鹏、韩一平等 2005 物理学报 **54** 2776]

[7] Karam M A , Fung A K , Antar Y M 1988 *IEEE Trans . Geosci . Remote Sensing* **26** 799

[8] Tsang L , Kubasci M C , Kong J A 1981 *Radio Science* **16** 321

[9] Lang R H , Sidhu J S 1983 *IEEE Trans . Geosci . Remote Sensing* **21** 62

[10] Seker S 1986 *IEE Proc . Microwave , Antennas and Propagat .* **133** 497

[11] Liang C , Lo Y T 1967 *Radio Science* **2** 1481

[12] Bruning J B , Lo Y T 1971 *IEEE Trans . Antennas Propagat .* **18** 378

[13] Sarabandi K , Polatin P F 1994 *IEEE Trans . Antennas Propagat .* **42** 510

[14] Li S Q , Fang J , Wang W B 1998 *IEEE Trans . Geosci . Remote Sensing* **36** 1981

[15] Chiu T C 1998 Electromagnetic scattering from rough surface covered with short branching vegetation , Ph.D. Dissertation , the University of Michigan , Ann Arbor

[16] Kong J A 2000 *Electromagnetic Wave Theory* (New York : Wiley & Sons)

[17] Bluck M J , Walker S P , Pocock M D 2001 *IEEE Trans . Antennas Propagat .* **49** 875

[18] Chang Y , Harrington R F 1977 *IEEE Trans . Antennas Propagat .* **25** 789

[19] Wang M G 1994 *Geometrical Theory of Diffraction* (Xi 'an : Xidian University Press)

[20] Tsang L , Kong J A , Ding K H 2000 *Scattering of Electromagnetic Waves : Theories and Applications* (New York : A Wiley- Interscience Publication)

Application of the equivalence principle and the reciprocity theorem to electromagnetic scattering from two adjacent spherical objects^{*}

Guo Li-Xin[†] Wang Yun-Hua Wu Zhen-Sen

(School of Science , Xidian University , Xi ' an 710071 , China)

(Received 10 February 2006 ; revised manuscript received 10 March 2006)

Abstract

Based on the equivalence principle and the reciprocity theorem , the problem of electromagnetic scattering from two adjacent objects is considered and a solution that accounts for multiple scattering up to second-order is evaluated. In general , the first-order solution can easily be obtained by calculating the scatted field from isolated targets when illuminated by a plane-wave. However , due to the difficulty in formulating the coupled scattering field , it is impossible to find an exact analytical solution for the second-order scattered field. In this work , the second-order solution of electromagnetic scattering from two adjacent conducting/dielectric objects is derived by employing the reciprocity theorem and this solution is simplified from volume integral to surface integral form by using the equivalence principle. Meanwhile , the relation between the secondary scattering field from one target and the other is derived. Finally , the composite scattering field from two adjacent spheres is calculated using the formulas obtained in this work. The bistatic scattering pattern is discussed and the results are compared with numerical computations based on Time Domain Integral Equation Method (TDIEM).

Keywords : reciprocity theorem , equivalence theorem , electromagnetic scattering , two adjacent spheres

PACC : 4110H , 4120

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60571058) , the National Defense Foundation of China and Graduate Innovation Fund , Xidian University .

[†] E-mail : lxguo@mail.xidian.edu.cn